AKA
0424

HARVARD UNIVERSITY.

LIBRARY

OF THE

MUSEUM OF COMPARATIVE ZOÖLOGY.

11704.

Exchange.

November 20, 1906.

NOV 20 1906

11,704

DENKSCHRIFTEN

DER

KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MUS. COMP. ZOOLOGY
CAMBRIDGE MASS.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

ZWÖLFTER BAND.

MIT XXVI TAFELN.

IN COMMISSION BEI W. BRAUMÜLLER,
BUCHHÄNDLER DES K. K. HOFES UND DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Ausgegeben am 6. December 1856.

INHALT.

Seite

Personalstand der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften V
Veränderungen in demselben seit der Gründung der Akademie XI

ABHANDLUNGEN.

I. ABTHEILUNG.

Abhandlungen von Mitgliedern der Akademie.

Hyrtl: Anatomische Mittheilungen über *Mormyrus* und *Gymnarchus*. (Mit VI Tafeln.) 1
Diesing: Zwanzig Arten von Cephalocotyleen. (Mit VI Tafeln.) 23
Kreil: Erste Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Wien. 39

II. ABTHEILUNG.

Abhandlungen von Nicht-Mitgliedern.

Langer: Über das Sprunggelenk der Säugethiere und des Menschen. (Mit II Tafeln.) 1
Hörnes: Über Gastropoden aus der Trias der Alpen. (Mit III Tafeln.) . . . 21
Langer: Das Gefäss-System der Teichmuschel. (Mit III Tafeln.) 35
Neugeboren: Die Foraminiferen aus der Ordnung der Stichostegier von Ober-Lapugy in Siebenbürgen. (Mit V Tafeln.) 65
Heger: Auflösungsmethode für algebraische Buchstabengleichungen mit einer einzigen unabhängigen Buchstabengrösse. (Mit I Tafel.) 103

NOV 20 1908

DENKSCHRIFTEN

DER

KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

ZWÖLFTER BAND.

A
WIEN.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

1856.

INHALT.

Seite

Personalstand der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften und *Veränderungen* in demselben seit der Gründung der Akademie V

ABHANDLUNGEN.

I. ABTHEILUNG.

Abhandlungen von Mitgliedern der Akademie.

Hyrtl: Anatomische Mittheilungen über *Mormyrus* und *Gymnarchus*. (Mit VI Tafeln.) . 1
Diesing: Zwanzig Arten von Cephalocotyleen. (Mit VI Tafeln.) 23
Kreil: Erste Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Wien 39

II. ABTHEILUNG.

Abhandlungen von Nicht-Mitgliedern.

Langer: Über das Sprunggelenk der Säugethiere und des Menschen. (Mit II Tafeln.) . 1
Hörnes: Über Gastropoden aus der Trias der Alpen. (Mit III Tafeln.) 21
Langer: Das Gefäss-System der Teichmuschel. (Mit III Tafeln.) 35
Neugeboren: Die Foraminiferen aus der Ordnung der Stichostegier von Ober-Lapugy in Siebenbürgen. (Mit V Tafeln.) 65
Heger: Auflösungsmethode für algebraische Buchstabengleichungen mit einer einzigen unabhängigen Buchstabengrösse. (Mit I Tafel.). 109

MITGLIEDER

der

kaiserlichen Akademie der Wissenschaften.

(Mit Ende des Jahres 1856.)

Inländische Ehrenmitglieder der Gesammt-Akademie.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Erzherzog **Franz Karl.**
Erzherzog **Ludwig.**
Graf **Kolowrat-Liebsteinsky**, Anton.
Fürst **Metternich**, Clemens.
Graf **Münch-Bellinghausen**, Joachim Eduard.
Freiherr von **Pillersdorff**, Franz.

Ernennung vom 12. November 1856.

Erzherzog **Ferdinand Maximilian.**
Freiherr von **Bach**, Alexander.

Mitglieder der philosophisch-historischen Classe.

Im Inlande.

Wirkliche Mitglieder.

(Nach den Daten der Ernennung und nach dem Alter geordnet.)

Ernennung vom 14. Mai 1847.

Grillparzer, Franz . . . . . Wien.
Arneth, Joseph . . . . . Wien.
Schafařik, Paul . . . . . Prag.
Hügel, Karl Freiherr von . . . . . Florenz.
Wolf, Ferdinand, der Zeit Secretär der philos.-histor. Classe . . . . . Wien.
Chmel, Joseph . . . . . Wien.
Palacky, Franz . . . . . Prag.
Weber, Beda . . . . . Frankfurt a. M.
Stülz, Jodok . . . . . St. Florian (Österreich ob d. Enns).
Jaeger, Albert . . . . . Wien.
Cittadella-Vigodarzere, Andreas Graf v. Padua.
Münch-Bellinghausen, Eligius Freih. v. Wien.
Auer, Alois . . . . . Wien.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Bergmann, Joseph . . . . . Wien.
Pfizmaier, August . . . . . Wien.
Karajan, Theodor Georg von, der Zeit Vice-Präsident . . . . . Wien.

Ernennung vom 26. Juni 1848.

Diemer, Joseph . . . . . Wien.

Ernennung vom 19. Juni 1849.

Springer, Johann . . . . . Wien.

Ernennung vom 28. Juli 1851.

Seidl, Johann Gabriel . . . . . Wien.
Birk, Ernst . . . . . Wien.
Meiller, Andreas von . . . . . Wien.
Miklosich, Franz . . . . . Wien.

Ernennung vom 24. Juli 1852.

Prokesch-Osten, Anton Freiherr von . . . . . Constantinopel.

Ernennung vom 2. Juli 1853.

Kandler, Peter . . . . . Triest.
Phillips, Georg . . . . . Wien.

Ernennung vom 5. August 1854.

Cicogna, Emanuel . . . . . Venedig.
Bonitz, Hermann . . . . . Wien.

Ernennung vom 18. October 1855.

Ankershofen, Gottlieb Freiherr von . . . . . Klagenfurt.

Ernennung vom 12. November 1856.

Aschbach, Joseph . . . . . Wien.

Correspondirende Mitglieder.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Blumberger, Friedrich . Göttweig (Österreich u. d. E.).
Boller, Anton . . . . . Wien.
Gar, Thomas . . . . . Trient.
Goldenthal, Jakob . . . . . Wien.
Hanka, Wenzel . . . . . Prag.
Karadschitsch, Wuk-Stephanowitsch . Wien.
Keiblinger, Ignaz . . . . Melk (Österreich u. d. E.).
Toldy, Franz . . . . . Pesth.
Wartinger, Joseph . . . . . Graz.
Wolny, Gregor . . . . . Raygern.

Ernennung vom 26. Juni 1848.

Bauernfeld, Eduard Edler von . . . . Wien.
Reméle, Johann Nep. . . . . Wien.
Schuller, Johann Karl . . . . . Hermannstadt.

Ernennung vom 19. Juni 1849.

Czoernig, Karl Freiherr v. Czernhausen Wien.
Hye-Glunek, Anton Ritter von . . . . Wien.

Ernennung vom 28. Juli 1851.

Beidtel, Ignaz . . . . . Olmütz.
Edlauer, Franz . . . . . Wien.
Feil, Joseph . . . . . Wien
Gaisberger, Joseph . . . . . Linz.
Höfler, Constantin . . . . . Prag.
Pritz, Franz . . . . . Linz.
Schlechta-Wssehrd, Ottokar Freiherr von . . . . . Constantinopel.
Wocel, Johann Erasmus . . . . . Prag.
Zappert, Georg . . . . . Wien

Ernennung vom 2. Juli 1853.

Firnhaber, Friedrich . . . . . Wien.
Günther, Anton . . . . . Wien.

Ernennung vom 5. August 1854.

Kink, Rudolph . . . . . Triest.
Rossi, Francesco . . . . . Mailand.
Weinhold, Karl . . . . . Graz.

Ernennung vom 12. November 1856.

Schleicher, August . . . . . Prag.

Im Auslande.

Ehrenmitglieder.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Grimm, Jakob Ludwig . . . . . Berlin.
Guizot, Franz Peter Wilhelm . . . . Paris.
Pertz, Georg Heinrich . . . . . Berlin.
Reinaud, Jos. Toussaint . . . . . Paris.
Ritter, Karl . . . . . Berlin.
Wilson, Horaz Haymann . . . . . Oxford.

Ernennung vom 19. Juni 1849.

Rau, Karl Heinrich . . . . . Heidelberg.

Ernennung vom 18. October 1855.

Boeckh, August . . . . . Berlin.

Correspondirende Mitglieder.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Böhmer, Johann Friedrich . . . . . Frankfurt a. M.
Cibrario, Giovanni Antonio Luigi Nobile Turin.
Dahlmann, Friedrich Christoph . . . Bonn.
Diez, Friedrich . . . . . Bonn.
Flügel, Gustav Lebrecht . . . . . Dresden.
Gfrörer, August Friedrich . . . . . Freiburg i. Brg.
Haupt, Moriz . . . . . Berlin.
Maelen, Philipp van der . . . . . Brüssel.
Michel, Francisque . . . . . Bordeaux.
Mohl, Julius von . . . . . Paris.
Thiersch, Friedrich Wilhelm . . . . München.

Ernennung vom 26. Juni 1848.

Bland, Nathaniel . . . . . London.
Creuzer, Friedrich . . . . . Heidelberg.
Fallmerayer, Jakob Philipp . . . . . München.
Gervinus, Georg Gottfried . . . . . Heidelberg.
Stälin, Christoph Friedrich . . . . Stuttgart.
Uhland, Ludwig . . . . . Tübingen.
Wilkinson, John Gardener . . . . London.

Ernennung vom 19. Juni 1849.

Brandis, August . . . . . Bonn.
Gachard, Ludwig Prosper . . . . . Brüssel.
Gerhard, Eduard . . . . . Berlin.
Kerckhove, Joseph Vicomtè de . . . Brüssel.
Kopp, Eutychius . . . . . Luzern.
Ritter, Heinrich . . . . . Göttingen.

Ernennung vom 28. Juli 1851.

Lanz, Karl . . . . . München.

Ernennung vom 24. Juli 1852.

Gayangos, Pascual de . . . . . Madrid.

Ernennung vom 2. Juli 1853.

Mone, Franz Joseph . . . . . Karlsruhe.

Ernennung vom 5. August 1854.

Voigt, Johannes . . . . . Königsberg.

Ernennung vom 18. October 1855.

Édélestand Du-Méril . . . . . Paris.

Wattenbach, Wilhelm . . . . . Breslau.

Mitglieder der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe.

Im Inlande.

Wirkliche Mitglieder.

(Nach den Daten der Ernennung und nach dem Alter geordnet.)

Ernennung vom 14. Mai 1847.

Carlini, Franz . . . . . Mailand.
Santini, Johann . . . . . Padua.
Bordoni, Anton . . . . . Pavia.
Zippe, Franz . . . . . Wien.
Stampfer, Simon . . . . . Wien.
Baumgartner, Andreas Freiherr v., der Zeit Präsident . . . . . Wien.
Haidinger, Wilhelm . . . . . Wien.
Ettingshausen, Andreas von . . . . Wien.
Kreil, Karl . . . . . Wien.
Unger, Franz . . . . . Wien.
Schrötter, Anton, d. Z. General-Secretär Wien.
Redtenbacher, Joseph . . . . . Wien.
Hyrtl, Joseph . . . . . Wien.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Koller, Marian . . . . . Wien.
Kollar, Vincenz . . . . . Wien.
Burg, Adam Ritter von . . . . . Wien.
Fenzl, Eduard . . . . . Wien.
Reuss, August Emanuel . . . . . Prag.

Ernennung vom 26. Juni 1848.

Fitzinger, Leopold . . . . . Wien.

Ernennung vom 17. Juli 1848.

Heckel, Jakob . . . . . Wien.
Boué, Ami . . . . . Wien.
Diesing, Karl . . . . . Wien.
Rokitansky, Karl . . . . . Wien.
Škoda, Joseph . . . . . Wien.
Rochleder, Friedrich . . . . . Prag

Ernennung vom 19. Juni 1849.

Petzval, Joseph . . . . . Wien.
Brücke, Ernst . . . . . Wien.

Ernennung vom 2. Juli 1853.

Littrow, Karl von . . . . . Wien.

Ernennung vom 18. October 1855.

Leydolt, Franz . . . . . Wien.

Correspondirende Mitglieder.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Belli, Joseph . . . . . Pavia.
Hauer, Franz Ritter von . . . . . Wien.
Hauslab, Franz Ritter von . . . . . Wien.
Hessler, Ferdinand . . . . . Wien.
Kunzek, August . . . . . Wien.
Panizza, Bartholomäus Ritter von . . . Pavia.
Redtenbacher, Ludwig . . . . . Wien.
Russegger, Joseph . . . . . Schemnitz.
Schott, Heinrich . . . . . Schönbrunn b. Wien.
Tschudi, Johann Jakob von . . . . Jakobihof bei Wr.-Neustadt.

Ernennung vom 26. Juni 1848.

Balling, Karl . . . . . Prag.
Freyer, Heinrich . . . . . Triest.
Gintl, Wilhelm . . . . . Wien.
Hruschauer, Franz . . . . . Graz.
Löwe, Alexander . . . . . Wien.
Moth, Franz . . . . . Wien.
Purkyně, Johann . . . . . Prag.
Reichenbach, Karl Freiherr von . . . Wien.
Reissek, Siegfried . . . . . Wien.
Wertheim, Theodor . . . . . Pesth.

Ernennung vom 19. Juni 1849.

Barrande, Joachim . . . . . Prag.
Weisse, Maximilian . . . . . Krakau.
Kner, Rudolf . . . . . Wien.
Wedl, Karl . . . . . Wien.
Fritsch, Karl . . . . . Wien.

Ernennung vom 2. Juli 1853.

Ettingshausen, Constantin von . . . . Wien.
Reslhuber, Augustin . . . . . Kremsmünster

Ernennung vom 18. October 1855.

Gottlieb, Johann . . . . . Gratz.

Ernennung vom 12. November 1856.

Ludwig, Karl . . . . . Wien.

Im Auslande.

Ehrenmitglieder.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Brown, Robert . . . . . London.
Faraday, Michael . . . . . London.
Humboldt, Alexander von . . . . . Berlin.
Liebig, Justus Freiherr von . . . . München.
Müller, Johann . . . . . Berlin.

Ernennung vom 19. Juni 1849.

Herschel, Sir John . . . . . London.

Ernennung vom 2. Juli 1853.

Dumas, Jean Bapt. . . . . Paris.

Ernennung vom 18. October 1855.

Struve, Friedrich G. W. von . . . . . St. Petersburg.

Correspondirende Mitglieder.

Ernennung vom 1. Februar 1848.

Bunsen, Robert Wilhelm . . . . . Heidelberg.
Élie de Beaumont, Léonce . . . . . Paris.
Encke, Johann Franz . . . . . Berlin.
Martius, Karl Friedrich Philipp von . München.
Meyer, Hermann von . . . . . Frankfurt a. M.
Mitscherlich, Eilard . . . . . Berlin.
Poggendorff, Johann Christian . . . . Berlin.
Quetelet, Làmbert Adolphe Jacques . Brüssel.
Rose, Heinrich . . . . . Berlin.
Steinheil, Karl August . . . . . München.
Weber, Ernst . . . . . Leipzig.
Weber, Wilhelm Eduard . . . . . Göttingen.
Wöhler, Friedrich . . . . . Göttingen.

Ernennung vom 26. Juni 1848.

Agassiz, Louis . . . . . Boston.
Bischoff, Theodor Ludwig Wilhelm . . München.
Dove, Heinrich Wilhelm . . . . . Berlin.
Ehrenberg, Christian Gottfried . . . . Berlin.
Grunert, Johann August . . . . . Greifswald.
Mädler, Johann Heinrich . . . . . Dorpat.
Milne Edwards, Henry . . . . . Paris.
Mohl, Hugo . . . . . Tübingen.
Owen, Richard Esq. . . . . London.
Schleiden, Matthias Jakob . . . . . Jena.
Wertheim, Wilhelm . . . . . Paris.

Ernennung vom 28. Juli 1851.

Argelander, Friedrich Wilh. August . Bonn.
Du Bois-Reymond, Emil Heinrich . . . Berlin.
Baer, Karl Ernst von . . . . . St. Petersburg.
Brewster, Sir David . . . . . Edinburgh.

Ernennung vom 18. October 1855.

Hausmann, J. F. Ludwig . . . . . Göttingen.

Ernennung vom 12. November 1856.

Neumann, Franz H. . . . . Königsberg.

VERÄNDERUNGEN IM PERSONALSTANDE SEIT DER GRÜNDUNG DER AKADEMIE.

Mit Tode abgegangen.

Im Inlande.

Ehrenmitglieder:

Inzaghi, Karl Graf von, 17. Mai 1856 . . . . . Graz.
Kübeck von Kübau, Karl Friedrich Freiherr, 11. September 1855 . . Wien.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.

Wirkliche Mitglieder:

Balbi, Adrian Edler von, 13. März 1848 Venedig.
Doppler, Christian, 17. März 1853 . . Venedig.
Partsch, Paul, 3. October 1856 . . . Wien.
Prechtl, Johann Ritter v., 28. Oct. 1854 Wien.
Presl, Joh. Swatopluk, 7. April 1849 Prag.
Rusconi, Maurus, 27. März 1849 . . Cadenobbia.

Correspondirende Mitglieder:

Corda, August Joseph . . . . . Prag.
Petřina, Franz, 27. Juni 1855 . . . . Prag.
Presl, Karl, 2. October 1852 . . . . Prag.
Salomon, Joseph, 2. Juli 1856 . . . Wien.

Philosophisch-historische Classe.

Wirkliche Mitglieder:

Exner, Franz, 21. Juni 1853 . . . . Padua.
Feuchtersleben, Ernst Freiherr v., 3. September 1849 . . . . . Wien.
Grauert, Wilhelm, 10. Jänner 1852 . . Wien.
Hammer-Purgstall, Joseph Freiherr von, 23. November 1856 . . . . . Wien.
Kudler, Jos. Ritter v., 6. Februar 1853 Wien.
Kemény, Jos. Graf v., 12. Septemb. 1855 Gerend.
Labus, Johann, 6. October 1853 . . Mailand.
Litta, Pompeo, 17. August 1852 . . Mailand.
Muchar, Albert von, 6. Juni 1849 . . Graz.
Pyrker, Franz Ladislaus von Felső-Eör, 2. December 1847 . . . . . Wien.
Teleky, Jos. Graf v., 15. Februar 1855 Szirak.
Wenrich, Georg, 15. Mai 1847 . . . Wien.

Correspondirende Mitglieder:

Filz, Michael, 19. Februar 1854 . Michaelbeuern.
Fischer, Maximilian, 26. Dec. 1851 . Klosterneuburg.
Frast, Johann von, 30. Jänner 1850 Nussdorf b. Wien.
Jaszay, Paul von, 29. December 1852 Wien.
Kiesewetter, Raphael Edler v., 1. Jänner 1850 . . . . . Wien.
Schlager, Johann, 18. Mai 1852 . . Wien.
Spaun, Anton Ritter von, 26. Juni 1849 Kremsmünst.

Im Auslande.

Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe.

Ehrenmitglieder:

Berzelius, Johann Jakob Freiherr von, 7. August 1848 . . . . . Stockholm.
Buch, Leopold v., 4. März 1853 . . . . Berlin.
Gauss, Karl Friedrich, 23. Febr. 1855 . Göttingen.

Correspondirende Mitglieder:

Fuchs, Johann Nepomuk v., 5. März 1856 München.
Fuchs, Wilhelm, 28. Jänner 1853 . . Belgrad.
Fuss, Paul Heinr. v., 24. Jänner 1855 . Petersburg.
Gmelin, Leopold, 13. April 1855 . . . Heidelberg.
Jacobi, Karl Gustav Jakob, 18. Febr. 1851 Berlin.

Philosophisch-historische Classe.

Ehrenmitglieder:

Hermann, Joh. Gottf., 31. December 1848 Leipzig.
Mai, Angelo, 8. September 1854 . . . Rom.

Correspondirende Mitglieder:

Baranda, Sainz de, 27. August 1853 . Madrid.
Burnouf, Eugène, 28. Mai 1852 . . . Paris.
Letronne, Anton Johann, 14. December 1848 . . . . . Paris.
Orelli, Joh. Kaspar v., 6. Jänner 1849 . Zürich.
Raoul-Rochette, Desiré, 6. Juli 1854 . . Paris.
Schmeller, Andreas, 27. Juli 1852 . . München.
Stenzel, Gustav, 2. Jänner 1854 . . . Breslau.

Ausgetreten sind die wirklichen Mitglieder:

Endlicher, Stephan, am 11. März 1848 . Wien.
Dessewffy, Emil Graf, am 9. März 1849 . Pesth.

Erste Abtheilung.

Abhandlungen von Mitgliedern der Akademie.

Mit 12 Tafeln.

ANATOMISCHE MITTHEILUNGEN

ÜBER

MORMYRUS UND GYMNARCHUS.

VON

PROF. JOSEPH HYRTL,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Mit 6 Tafeln.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 10. JÄNNER 1856.

I.

ÜBER DIE DIVERTICULA AM BULBUS DER KIEMENARTERIE VON MORMYRUS UND GYMNARCHUS.

Taf. IV und V.

Ein bisher übersehenes constantes Vorkommen, und somit einen anatomischen Charakter der Familie der *Mormyri*, bilden die an dem Bulbus der Kiemenarterie befindlichen *Diverticula*. Sie kommen bei keiner anderen Familie vor. Bei acht untersuchten Arten von *Mormyrus* war ihr Dasein constant, ihr Vorkommen auf eine und dieselbe Stelle des Bulbus beschränkt, und ihre Grösse, so wie ihre Gestalt bei den einzelnen Species eine so allenthalben gleichförmige, dass dem Gedanken einer zufälligen Entwickelung derselben kein Raum gegeben werden kann.

Der im Ganzen sehr dickwandige und konische Bulbus, an dessen Kammerostium sich die gewöhnlichen doppelten Halbmondklappen befinden, besitzt bei *Mormyrus Bane* an seiner unteren Wand ein kleines konisches Anhängsel, welches seine stumpfe Spitze nach vorne kehrt.

Seine Länge beträgt ungefähr die Hälfte der Länge des Bulbus, und seine Wand besteht aus denselben Schichten, welche in der Wand des Bulbus selbst vorkommen. Die beiden untersuchten Exemplare von *M. Bane* waren nur etwas über eine Spanne lang, und dennoch betrug die Länge des Divertikels (bei einer Länge des Bulbus von 3 Linien) fast 2 Linien.

Bei *Momyrus cyprinoides* glich die Form des Divertikels mehr einem rundlichen Hügel, und hatte an seiner Kuppe eine seichte longitudinale Furche, durch welche zwei äusserst flache seitliche Ausbuchtungen desselben angedeutet wurden. So unerheblich diese Furche selbst am

Divertikel eines 15 Zoll langen Exemplares von *M. cyprinoides* erschien, so ist sie doch des später bei *Gymnarchus* zu erwähnenden seitlichen Doppeltwerdens des Divertikels wegen, welches durch die Furche zuerst angedeutet wird, von Interesse.

Bei *Mormyrus elongatus*[1]) wird das Divertikel so lang wie der Bulbus selbst, sitzt mit breiter Basis auf, und zeigt an seiner Spitze eine unbedeutende S-förmige Biegung.

Bei *Mormyrus dorsalis* und *oxyrhynchus*[2]) findet es sich halbmondförmig gekrümmt, mit unterer Convexität, überragt bei ersterem mit seiner Spitze die vordere Grenze des Bulbus, und erscheint an seiner breiten Basis etwas eingeschnürt. An einem injicirten Exemplare von *M. oxyrhynchus* (von 22 Zoll Länge) hatte das Diverticulum eine Länge von $4\frac{1}{2}$ Linien, auf 2 Linien Breite an seiner eingeschnürten Basis.

Bei einem *Mormyrus* aus dem Senegal habe ich es jenem von *M. oxyrhynchus* gleichgestaltet gesehen. Eben so bei *M. Caschive.*

Bei *Mormyrus anguillaris*[3]), dessen Bulbus bei einer Länge des Thieres von 24 Zoll im uninjicirten Zustande nur 4 Linien Länge hatte, erscheint das Diverticulum als eine längsovale Ausbuchtung der unteren Bulbuswand. Das vordere Ende dieser Ausbuchtung bezeichnet eine tiefe Kerbe[4]). Der Bulbus und sein Divertikel sind stark seitlich comprimirt. Die obere Wand des Bulbus gleichfalls mehr ausgebuchtet, als es bei den übrigen Arten von *Mormyrus* der Fall ist[5]). Die beiden Halbmondklappen am Ursprunge des Bulbus nehmen die rechte und linke Seite des *Ostium arteriosum* ein. Die oberen und unteren Enden beider Klappen stossen zusammen, und heften sich zugleich an eine obere und untere niedrige und kurze longitudinale Leiste, welche sich an der unteren Wand des Bulbus bis in das Divertikel hinein verfolgen lässt, — an der oberen aber schon etwas früher verschwindet. Mit diesen beiden Leisten hängt eine Schicht von Muskelfasern zusammen, welche sich zunächst unter dem Plattenepithel des Bulbus ausbreitet und als continuirliche Membran sich aus dem Bulbus und seiner Ausbuchtung ausschälen lässt. Die mikroskopischen Elemente desselben sind weiche, leicht von einander trennbare, ziemlich dicke Fadencylinder, welche hin und wieder zu kurzen Säulenstücken zerfallen, unverästelt und parallel neben einander liegen, und zu grösseren Bündelchen zusammentreten, welche sich dann in verschiedenen Richtungen durch einander flechten. Quergestreiftes Ansehen besitzen sie nicht; wenigstens ist dieses an den Weingeist-Exemplaren nicht zu sehen. Die Muskelfasern der Kammer zeigen dieselben mikroskopischen Eigenschaften, wie jene des Bulbus. Nur die äussere Haut des Bulbus und seines Divertikels wird aus elastischen Elementen gebildet. — Bei *Mormyrus zambacensis* Pet. stimmt Form und Grösse des Divertikels mit jenem von *M. anguillaris* überein.

Bei *Gymnarchus niloticus* bietet die Divertikelbildung am Bulbus einen complicirteren Entwickelungsgrad dar. Der ganze Bulbus ist ringsum mit Divertikeln so besetzt, dass er von ihnen gänzlich verdeckt wird[6]). Der Bulbus ist bei einem 3 Fuss langen Exemplare nicht einmal eben so viele Linien lang. Seine Höhle misst nur anderthalb Linien in der grössten Breite, während der Kranz von Divertikeln, der seine äussere Fläche besetzt hält, im injicirten Zustande einen Querdurchmesser von $5\frac{1}{2}$ Linien zeigt und seine Peripherie 14 Linien misst.

---

[1]) Tab. V, Fig. 5, lit. *a*.

[2]) Tab. V, Fig. 3, lit. *d*.

[3]) Tab. V, Fig. 4, lit. *b*.

[4]) Das Diverticulum von *Mormyrus zambacensis* ist kleiner als jenes von *M. anguillaris*, aber an Form diesem ähnlich.

[5]) Lit. *a* derselben Figur.

[6]) Tab. IV, Fig. 2, lit. *gg*, und Fig. 3, lit. *cc*.

Hat man den Bulbus sammt seinen Divertikeln senkrecht in der Medianlinie durchschnitten, so sieht man in jeder Seitenhälfte des Bulbus zwei Öffnungen, welche in die Divertikel führen, deren somit vier vorhanden sind. Sie sind weder von gleicher Grösse, noch von gleicher Gestalt, und stellen unregelmässig ausgebuchtete Säcke dar mit 2, 3, bis 4 kleineren sackförmigen Anhängseln, welche den Bulbus rings umschliessen. Das linke obere Divertikel ist besonders reich an solchen sackförmigen Ausbuchtungen.

Die elastische Haut und die Muskelhaut des Bulbus nehmen auch an der Bildung der Divertikel Antheil, und es können desshalb letztere nicht für Hernien (partielle Aneurysmen) des Bulbus gehalten werden, welche sie ihrer Form nach allerdings zu sein scheinen. Auch fanden sie sich an drei untersuchten Exemplaren in ganz gleichen Verhältnissen vor.

Erdl[1]) hatte diese Divertikel gesehen, und erwähnt ihrer flüchtig und zum Theil unrichtig mit folgenden Worten: „Ein eigentlicher *Bulbus aortae* fehlt; statt seiner ist eine Art zweiten Atriums auf der breiten Basis des Ventrikels vorhanden. Dieses besteht aus vier pyramidenartigen Lappen, deren freie, breite Basis nach aussen gekehrt ist; mit ihren Spitzen laufen sie nach innen zusammen, um sich zu einem sehr kurzen Gefässstamm zu vereinigen.“ Hierauf folgt: „Leider war es nicht möglich, das Verhalten dieser Höhlen zu den aus ihrer Mitte hervorkommenden Gefässen genau zu untersuchen, ebensowenig gelang es mir, die Gefässverbindung zwischen Herz und Lunge vollkommen klar darzustellen.“

Prof. Förg hatte ebenfalls nur eine unvollkommene Kenntniss von ihnen, indem er sich in einem Schreiben an Herrn Professor Duvernoy in Paris, welches in den Annales des sciences naturelles abgedruckt wurde[2]), über sie folgendermassen äussert: „Devant le ventricule est placé un bulbe aortique très compliqué, silloné, divisé extérieurement en plusieurs parties, qui correspondent à autant de divisions plus au moins incomplètes de la cavité même du bulbe.“ Die dazu gehörige Abbildung ist höchst mangelhaft[3]). In einem diesem Schreiben angehängten Zusatz von Professor Duvernoy[4]) wird der Bulbus eines *Gymnarchus* aus dem Senegal so beschrieben: „Il se compose de l'origine du tronc artériel, autour duquel sont fixées trois poches musculaires: deux inférieures moins séparées entre elles, et une supérieure tout à fait séparée de la droite inférieure, qui est aussi un peu supérieure; de sorte, qu'en considérant ce bulbe par haut, on dirait voir deux oreillettes. Ces poches débordent, comme des oreillettes, au devant du ventricule, et montrent un rebord festonné, qui répond à leur cavité anfractueuse.“

Sonst ist das Herz des *Gymnarchus* von jenem der *Mormyri* nicht verschieden. Die Kammer hat die Gestalt einer dreiseitigen Pyramide, deren Basis nach vorne und eine Kante nach unten sieht[5]). In der Mitte der vorderen Basis tritt der Bulbus hervor. Zwei halbmondförmige Klappen sitzen auf der Grenze zwischen Kammer und Bulbus, — eine rechte und linke. Duvernoy erwähnt bei dem *Gymnarchus* aus dem Senegal wohl unrichtig dreier Halbmondklappen: „qui répondent aux trois divisions de la cavité du bulbe.“ Sie hängen ebenso wie bei *Mormyrus anguillaris* an ihrer oberen und unteren Commissur mit zwei tendinösen Strängen zusammen, welche sich in den Bulbus hinauf verlängern, und der Muskelschicht des Bulbus zum Ausgangs- und Endpunkt dienen.

---

[1]) Münchner gelehrte Anzeigen, 23. Bd., pag. 594 und 595.
[2]) 3. serie, 10. année, 1853, pag. 149.
[3]) Planche 5, Fig. 5 et 6, lit. *b*.
[4]) Pag. 157.
[5]) Tab. IV, Fig. 2 und 3.

Die Vorkammer (lit. *b*, *b*) ist ungleich voluminöser als die Kammer. Sie erstreckt sich jedoch nicht über die Seitenflächen des Ventrikels herab, sondern liegt nur seiner dorsalen Fläche auf, welche sie nach hintenzu weit überragt. Ihre Ränder sind spärlich und nur seicht gekerbt. Das *Ostium atrio-ventriculare* liegt der Spitze des Herzens näher als seiner Basis, und besitzt eine obere und untere halbmondförmige Klappe, welche beide horizontal in die Kammerhöhle hineinragen, mit ihren Enden aber nicht zusammentreffen, wie am *Ostium arteriosum*. Der freie Zwischenraum zwischen beiden Klappen rechts ist kleiner als jener an der linken Seite, welcher durch eine eingeschobene kleinere dritte Klappe, welche etwas tiefer steht als die beiden grösseren, eingenommen wird, und welche bei *Mormyrus anguillaris* fehlt.

Bemerkenswerth ist noch, dass die beiden *Ductus Cuvieri (Trunci venosi transversi* Stann.*)* sich nicht zu einem einfachen *Sinus venosus communis* vereinigen, sondern jeder für sich, obwohl beide mit einander verwachsen, in das hintere Ende des voluminösen Vorhofes einmünden[1]).

Die physiologische Bedeutung dieser Divertikel des Bulbus ergibt sich aus Folgendem. Die vergleichende Übersicht der Grössenverhältnisse des Bulbus in den einzelnen Fischfamilien zeigt, dass der Bulbus um so umfangreicher wird, je weiter das Herz nach vorne lagert und je näher es an die Kiemen heranrückt. Als ein aus vorwaltend elastischen Elementen gebildeter Behälter, absorbirt der Bulbus einen Theil der Propulsionskraft des Herzens, welcher auf die Erweiterung des Bulbus verwendet wird. Der Herzstoss in ganzer Kraft wäre vielleicht für die äusserst zarten Capillargefässe der Kiemenblättchen, durch welche er das Blut zu treiben hat, eine zu intensive Grösse gewesen, und darum sollte ein Theil derselben zu anderem Zwecke verwendet werden. Eine andere Verwendung des Bulbus besteht darin, dem stossweise aus dem Herzen ausgetriebenen Blute, welches nicht auf Umwegen, sondern gleich nach den ersten Theilungen des *Truncus branchialis communis* in die Kiemencapillaren strömt, seine stossweise Bewegung frühzeitig zu nehmen und eine gleichförmige Bewegung des Blutes in den Kiemencapillaren zu ermöglichen. Der Bulbus repräsentirt gleichsam die Gesammtelasticität eines verzweigten arteriellen Gefässsystems, welches durch die Länge seiner Bahn den stossweisen Blutandrang allmählich abschwächt, während der Bulbus des Herzens ihn mit Einem Male aufhebt. Je näher das Herz den Kiemen rückt, desto grösser muss aus diesem Grunde der Bulbus werden, und da der Raum für seine Vergrösserung durch das Näherrücken des Herzens an die Kiemen in longitudinaler Richtung verkürzt wird, so muss er durch seine Entwickelung in die Breite das gewinnen, was ihm durch Vergrösserung in der Länge zu erreichen verweigert wird. So erklären sich die kurzen aber dickbauchigen, und im Inneren häufig durch Scheidewände in viele Fächer getheilten *Bulbi arteriosi* der Siluroiden, der Cyprinoiden, u. a. m., während das weit von den Kiemen entlegene Herz der Anguilloiden (besonders *Ratabura Hardwickii* Gray[2]) an seinem langen Hauptstamm der Kiemenarterie gar keine bulbusähnliche Auftreibung erkennen lässt. Bei den *Mormyri* liegt das Herz weiter nach vorne als bei den übrigen Familien der Knochenfische, und bei *Gymnarchus* liegt es sogar unter und zum Theil vor dem dritten und vierten Kiemenbogen, welche letztere desshalb keine untere *Copula* besitzen, um der Diastole des Herzens kein Hemmniss entgegen zu stellen.

Bei der so auffallenden Verkürzung des Weges aus dem Herzen in die Kiemen, darf es desshalb nicht überraschen, gerade bei den *Mormyri* und noch mehr bei *Gymnarchus* eine

---

[1]) Tab. IV, Fig. 2.

[2]) Bei einem 1 Schuh 7 Zoll langen Exemplare liegt das Herz $5^1/_2$ Zoll hinter dem vorderen Kopfende.

Divertikelbildung am Bulbus anzutreffen, welche bei jeder anderen Familie fehlt. Sie hat dieselbe Bedeutung, wie die bei anderen Ordnungen vorkommende innere Fächerbildung des Bulbus. Die Stosskraft des Herzens wird von einem mit Divertikeln besetzten Bulbus noch mehr absorbirt als von einem gewöhnlichen.

Eigenthümlich ist die primäre Ramification der Kiemenarterien bei *Gymnarchus*. Es gehen 6 Kiemenarterien aus dem vorderen Ende des Bulbus hervor[1]). Ein *Truncus branchialis communis* fehlt, wegen der so weit nach vorne gerückten Lage des Herzens. Die ersten beiden Kiemenarterien, der Lage nach die unteren, gehen zum vordersten Kiemenpaar. Die zwei folgenden gehen, nachdem sich jede in zwei Zweige gespalten, zum dritten und vierten Kiemenpaar. Die zwei letzten versorgen die zweite Kieme, und müssen sich desshalb mit den vorangehenden kreuzen.

In die Kategorie dieser Divertikel des *Bulbus arteriae branchialis* muss ich auch jene sonderbare Erweiterung stellen, welche ich bei *Aspius rapax* Heck. zwar nicht am Bulbus, aber am letzten Theilungsende der Kiemenarterie gefunden habe[2]). Die Erweiterung des Hauptstammes der Kiemenarterie, aus welcher die Schlagadern für das erste Kiemenpaar entspringen, ist birnförmig, mit dem dicken Ende nach vorne gekehrt. Nebst den beiden ersten Kiemenarterien geht noch ein anderes Gefäss von diesem Divertikel ab, welches sich an das grosse Zungenbeinhorn der rechten Seite anlegt, und nach kurzem Verlauf mit einer kolbigen Anschwellung endigt[3]). Da die Embryonen der Cyprinoiden keine Kiemendeckelkiemen besitzen, so kann dieses blind auslaufende Gefäss kein Überrest einer Opercular-Kiemenarterie sein, und kann nur unter die hier erwähnten Divertikelbildungen eingereiht werden.

II.

ÜBER DIE VERDAUUNGS-ORGANE.

Taf. III, V und VI.

Der Darmcanal aller *Mormyrus*-Arten und die accessorischen Organe desselben zeigen, mit Ausnahme des *M. anguillaris*, eine vollkommene Übereinstimmung. *Mormyrus anguillaris* ist ein Raubfisch; die übrigen *Mormyri* sind Pflanzenfresser. Ich habe in dem Magen von *M. anguillaris* einen kleinen *M. oxyrhynchus* halbverdaut gefunden, während die übrigen *Mormyrus*-Arten nur vegetabilische Substanzen in ihren Mägen enthielten. Der noch grün gefärbte Knollen des Mageninhaltes von *Mormyrus oxyrhynchus* erwies sich bei genauer Untersuchung, welche mein geehrter College Prof. Fenzl vorzunehmen die Güte hatte, als ein Convolut von feinen, durch den Verdauungsprocess ihrer Corticalsubstanz bereits beraubten, und auf das blosse centrale Gefässbündel reducirten Wurzelfasern einer im Wasser wachsenden *Cyperacee* oder *Graminee*, welche der Gattung und Art nach nicht näher zu bestimmen war. Umschlossen von diesen vegetabilischen Resten fanden sich allerdings auch animalische Bestandtheile, welche jedoch so spärlich vorkamen, dass sie nur zufällig mit den Vegetabilien in den Magen gelangt zu sein schienen. Sie bestanden aus Larven einer Fliegenart, die mit den einheimischen

---

[1]) Tab. IV, Fig. 3, lit. *d*.
[2]) Tab. IV, Fig. 1, lit. *b*.
[3]) Lit. *c* derselben Figur.

Arten der Gattung *Chironomus*, deren Larven durchaus im Wasser leben, grosse Verwandtschaft zeigten; ferner aus Larven einer Neuropteren-Art aus der Familie der Hemerobien, und vielleicht auch einer Species der Gattung *Osmylus* Latr. Die von J. Müller vorgenommene Trennung des *M. anguillaris* von den übrigen Arten dieses Geschlechtes als ein eigenes Genus mit dem Namen *Mormyrops*, erhält hiedurch eine weitere Rechtfertigung. *M. zambacensis* wäre der Kopfform, der Grösse, Form und Stellung der Flossen, der Gestalt des Diverticulum am Bulbus der Kiemenarterie, so wie des Zahnbaues wegen gleichfalls ein *Mormyrops*. Seine Eingeweide habe ich nicht untersucht.

Der Unterschied in den Verdauungs-Organen von *M. anguillaris* und den übrigen *Mormyris* betrifft vorzugsweise den Magen. Da es hinlänglich bekannt ist, wie sehr die Form des Magens bei Fischen im vollen und leeren Zustande sich ändert, so soll sich der jetzt zu gebende Vergleich nur auf Mägen in vollkommen ausgedehntem Zustande beziehen.

Auffallend ist die verschiedene Weite des Schlundes bei *M. anguillaris* und *M. oxyrhynchus* von fast gleicher Körpergrösse (22 und 24 Zoll). Bei ersterem hat der Schlund dicht vor der *Cardia* einen Querdurchmesser von 15 Linien [1]), bei letzterem von nur 5 Linien [2]). *Mormyrus dorsalis* und *elongatus*, von 14 Zoll Körperlänge, haben nur 3 Linien Querdurchmesser im Pharynx. Die Mündung des äusserst kurzen *Ductus pneumaticus* ist in beiden fast gleich gross (ungefähr $\frac{2}{3}$ Linien). Der Magen von *Mormyrus oxyrhynchus* bildet einen rundlichen Sack, dessen stark entwickelte Muskelhaut am vorderen Magenrande, zwischen *Cardia* und *Pylorus*, zwei unerhebliche Einschnürungen erzeugt, welche sich gegen den hinteren Magenrand zu einer einfachen Depression vereinigen [3]). Die *Portio cardiaca* ist der am meisten entwickelte Theil des Magens, und ragt, wie beim Menschen, als *Fundus coecus* über die Einmündungsstelle des *Oesophagus* nach links hinaus. Die sogenannte *Portio pylorica* ist nur ein drei Linien langes und kaum eben so viel breites Diverticulum des Magens, aus welchem der anfangs sehr enge Dünndarm hervorgeht. Jenseits der *Portio pylorica* verlängert sich der Magen noch zu einer halbkugeligen blinden Bucht (lit. *d*), welche dem auf ein Minimum reducirten Blindsack anderer Fischmägen entspricht. Der Querdurchmesser des Magens verhält sich zum grössten Längendurchmesser, welcher in der verlängerten Richtung des Schlundes liegt, wie $1\frac{3}{4} : 2\frac{1}{3}$ Zoll. Im leeren, zusammengezogenen Zustande sieht der Magen ganz anders aus [4]). Man glaubt den Muskelmagen von *Heterotis* oder *Thryssa* vor sich zu haben, welchem er genau gleicht. Er erscheint von den Seiten her zusammengedrückt, mit einem oberen und unteren Rande. In den oberen Rand mündet der *Oesophagus* ein.

In der Mitte beider Seitenflächen fällt eine rundliche, matt glänzende, wie fibrös aussehende Stelle auf (lit. *b*), welche von dickem Muskelfleisch umschlossen wird, dessen Bündel von einer Fläche des Magens, über die Ränder weg, zur anderen laufen. Die Dicke dieser Muskelschicht beträgt bei einem $1\frac{1}{2}$ Schuh langen Exemplare fast 3 Linien. Eine am oberen und unteren Rande befindliche Einschnürung theilt diesen Muskelmagen, welcher nur die *Portio cardiaca* darstellt, in zwei vor einander liegende Räume. In dem oberen Rande des hinteren befindet sich die *Cardia*. Aus dem unteren wölbt sich nach vorne zu die *Pars pylorica* vor (lit. *d*), welche, klein und rundlich und arm an Muskelfasern, sich in den anfangs nach vorne

---

[1]) Tab. VI, Fig. 1, lit. *a*.
[2]) Tab. V, Fig. 1, lit. *a*.
[3]) Tab. V, Fig. 1, lit. *b*.
[4]) Tab. V, Fig. 2.

gerichteten und dann sich erst umbeugenden Dünndarm übergeht. Es ist nicht möglich, durch Aufblasen diesem zusammengezogenen Magen die Gestalt des durch Futter ausgedehnten zu geben, und man könnte sehr leicht die so auffallend verschiedenen Formen für Mägen verschiedener Thiere nehmen, wenn man nicht wüsste, sie aus verschiedenen Individuen derselben Art genommen zu haben.

Bei *Mormyrus anguillaris* ist der Magen eine in der Richtung des Schlundes fortlaufende ovale Erweiterung desselben, von 3 Zoll Länge und 2 Zoll 2 Linien grösste Weite[1]). Diese ovale Erweiterung des Schlundes ist ebenfalls nur die *Portio cardiaca* des Magens. Die *Portio pylorica* erscheint als ein in der Mitte der unteren Fläche der *Portio cardiaca* abgehendes, fingerförmiges Anhängsel des Magens von 8 Linien Länge und 3 Linien Weite (lit. *c*), welches sich in einen schon am Ursprunge ziemlich weiten Dünndarm (lit. *d*) fortsetzt. — Eine *Valvula pylorica* ist nur im aufgeblasenen und getrockneten Magen als schwach gezeichneter Saum angedeutet. Im frischen Zustande scheint sie spurlos zu fehlen.

Alle *Mormyri* besitzen zwei *Appendices pyloricae*, an Länge und Gestalt jenen nicht unähnlich, welche bei *Heterotis* vorkommen. Bei *M. oxyrhynchus* sind sie keulenförmig, nicht gleich lang, indem der längere über 4 Zoll, der kürzere $3\frac{1}{2}$ Zoll misst. Das dicke Ende der Keule wird weniger durch eine Erweiterung der Höhle, als durch Massenzunahme der Muskelhaut veranlasst. — Bei *M. anguillaris* haben beide *Appendices* gleichfalls einen schmalen Hals, der sich aber bald zu einem gleichförmig weiten cylindrischen Rohre ausdehnt. Sie sind weiter und bedeutend kürzer als bei *M. oxyrhynchus*, — der längere misst $2\frac{1}{2}$, der kürzere nicht ganz 2 Zoll. Der Darmcanal von *M. anguillaris* ist um 2 Zoll kürzer als jener von *M. oxyrhynchus*, und übertrifft ihn an Weite.

Die übrigen Verdauungs-Organe bieten keine bemerkenswerthen Verschiedenheiten dar. Alle *Mormyri* besitzen wahre, noch innerhalb des *Limbus ani* mündende Peritonealcanäle, welche ich bei einer früheren Gelegenheit zuerst an *M. oxyrhynchus* erwähnte.

Der Magen von *Gymnarchus* stimmt mit jenem von *Mormyrus anguillaris* überein[2]). Er enthielt in zwei untersuchten Exemplaren halbverdaute Überreste eines Fisches, der nach den Knochen zu urtheilen eine Mormyren-Art war. Im leeren Zustande hatte seine Wand eine Dicke von 3 Linien, und seine Schleimhaut war in eine Menge stark vorspringender und gekräuselter Falten gelegt, welche beim Aufblasen (wobei der ovale Magen eine Länge von 6 Zoll und eine Weite von 4 Zoll erhält, bei einer Körperlänge des Fisches von 3 Schuh) sämmtlich verschwanden. Die *Portio pylorica* (lit. *c*) stellt einen stumpfen, von der Mitte der unteren Magenwand vorspringenden Hügel dar, aus dessen vorderer Wand der Dünndarm mit zwei gleich langen *Appendices pyloricae* (5 Zoll) abging (lit. *d*, *e*, *e*).

Bei dem durch die in eine feine Spitze auslaufende *Cauda* dem *Gymnarchus* ähnlichen *Carapus macrurus* ist die retortenförmige Gestalt des Magens, ohne Trennung einer *Pars cardiaca* und *pylorica*, sehr ausgeprägt, und die Zahl der verhältnissmässig viel kürzeren *Appendices pyloricae* beträgt gleichfalls 2[3]). Bei dem gleichfalls formverwandten *Sternarchus albifrons* ist der retortenförmige Magen weniger scharf gekrümmt, eine Trennung von *Pars cardiaca* und *pylorica* durch eine seichte Einschnürung nur angedeutet, und die Zahl der *Appen-*

---

[1]) Tab. VI, Fig. 1, lit. *b*.
[2]) Tab. III, lit. *a*.
[3]) Tab. VI, Fig. 2.

dices pyloricae beträgt 6, welche im Kreise um den Anfang des *Duodenum* sitzen, und nur eine kleine Stelle für die Insertion des Gallenganges frei lassen[1]).

Die Einmündung der Schwimmblase in die Rückenfläche des Schlundes ist bei *Gymnarchus* viel weiter als bei *M. anguillaris.* Sie stellt eine vollkommen kreisrunde Öffnung von 3 Linien Durchmesser dar[2]), ist mit einem erhabenen, fast knorpelharten Rand umsäumt, und durch ein dickes Bündel kreisförmiger Muskelfasern verschliessbar.

Die Gallenblase ist sehr gross (lit. *g, g*), wie bei *Heterotis* und allen *Mormyri*, elliptisch, 2 Zoll lang, 6 Linien weit. Der *Ductus cysticus* verbindet sich mit einem einfachen *Ductus hepaticus* zu einem sehr kurzen gemeinschaftlichen Gallengange, welcher knapp vor seiner Ausmündung zu einem kleinen ovalen Säckchen anschwillt (lit. *h*).

Die übrigen Verhältnisse des Darmcanales und seiner Nebenorgane stimmen, bis auf die asymmetrische Lage des Afters, welcher rechts von der Medianlinie der unteren Leibeswand gelegen ist, mit *M. anguillaris* vollkommen überein. Duvernoy hat sie abgebildet[3]).

Gymnarchus besitzt auch die Peritonealcanäle der *Mormyri.*

Die Geschlechtsorgane sind von jenen der *Mormyri*[4]) nicht verschieden. Ich glaube ein Weibchen vor mir zu haben, welches lange vor der Laichzeit gefangen wurde. Es war nur ein einziges, mehr rechts gelegenes, aus einem dichten *Stroma cellulosum* bestehendes *Ovarium* (?) vorhanden, und dieses so mit Fett umhüllt, dass es nur bei sehr sorgfältiger Behandlung aufgefunden werden konnte.

III.

ÜBER DIE SCHWIMMBLASE (LUNGE) VON GYMNARCHUS.

Taf. III.

Erdl[5]) erklärte die Schwimmblase des *Gymnarchus* unbedingt für eine Lunge: „Dieser Fisch besitzt, nebst dem wie gewöhnlich gebildeten Kiemenapparat, eine sehr schön entwickelte Lunge“. Erdl nannte auch ihren Ausführungsgang eine Luftröhre, und in einer kurzen Nachricht, welche er in die Bibliothèque universelle de Genève einrücken liess, und welche unverändert in die Annales des sciences naturelles, 1847, pag. 381 aufgenommen wurde, heisst es: „Ce poisson d'Egypte, peu connu jusqu'ici, possède un poumon bien développé, à côté d'un appareil branchial semblable à celui des autres poissons“. Weiter unten folgt: „La structure du poumon ressemble, d'une manière frappante, à celle du Lepidosiren“. Selbst die Schleimhautfalten, welche zu beiden Seiten der Einmündung des *Ductus pneumaticus* in dem Schlunde vorkommen, wurden mit einer *Glottis* verglichen: „Au point, où la trachée communique avec l'oesophage, on aperçoit, à droite et à gauche de l'ouverture, un long repli longitudinal, qui permet évidemment à l'animal d'ouvrir et de fermer volontairement la trachée. Les muscles,

---

1) Tab. VI, Fig. 3.
2) Tab. III, lit. *b*.
3) Lib. cit. Planche 5, Fig. 1.
4) Geschildert in meinen Beiträgen zur Morphologie der Urogenitalorgane der Fische, in den Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, 1. Bd.
5) Münchner gelehrte Anzeigen, 23. Bd., pag. 592.

qui font mouvoir ces replis, s'attachent à un long cartilage fixé sur l'appareil branchial, et qui, sous ce point de vue, peut être comparé aux rudiments de larynx du Lepidosiren.“ — Förg[1]) redet von der Schwimmblase gleichfalls immer nur als Lunge; Duvernoy[2]) dagegen spricht ihr diese Bedeutung auf sehr entschiedene Weise ab.

Ich kann vielleicht diese entgegengesetzten Ansichten auf folgende Weise vermitteln.

Die Schwimmblase des *Gymnarchus* erstreckt sich, dicht unter den Nieren liegend, durch die ganze Rumpfhöhle bis über die Harnblase hin. Sie wird von dem unter ihr liegenden Verdauungsapparate durch eine starke Aponeurose getrennt, welche an dem oberen Theile der Rippen beider Seiten ihre Befestigung hat, und an ihrem vordersten Ende durch den kurzen *Ductus pneumaticus* durchbohrt wird[3]). Sie gleicht in der That, wie Erdl bemerkte, der lungenähnlichen Schwimmblase des *Lepidosiren*. Jedoch sind ihre zelligen Wandungen dicker, als sie bei diesem gefunden werden. Über ihre Form und den zelligen Bau ihrer Wände haben Erdl, Förg, und Duvernoy ausführliche Angaben geliefert, welchen ich nur wenig hinzuzusetzen habe.

Erdl war so sehr von der Idee, eine wahre Lunge vor sich zu haben, eingenommen, dass er in der Medianlinie des Organs eine Verdünnung seiner zellenreichen Wand, und seitwärts von ihr eine stärkere Entwickelung des Zellensystems vor sich zu haben, und hierin eine Tendenz zum Zerfallen in paarige Hälften, wie es bei Lungen der Fall ist, anerkennen zu müssen glaubte. Förg hat diese Angabe schon berichtigt[4]), und Duvernoy an dem von ihm untersuchten Exemplare die Hinneigung zum Doppeltwerden des fraglichen Organes gleichfalls vermisst[5]). Auch ich sehe an der 8 Zoll langen Schwimmblase, die ich vor mir habe, keine Andeutung eines Zerfallens, und glaube, dass Erdl jene Furche der unteren Wand, in welcher die Hauptstämme der Blutgefässe der Schwimmblase verlaufen[6]), und welche sich bis in die Nähe des hinteren Endes der Schwimmblase verfolgen lässt, für die Trennungsfurche unvollkommen entwickelter paariger Seitenhälften einer Lunge gehalten hat.

Was die Höhle dieser Schwimmblase anbelangt, so ist sie für die Grösse des Organes sehr klein zu nennen. Ich habe eine aufgeblasene Schwimmblase getrocknet und senkrecht durchschnitten. Es ist erstaunlich, welches Volumen eine solche Schwimmblase annimmt. Im zusammengefallenen Zustande nur 1 Zoll breit, erhält sie in strotzender Ausdehnung in ihrem vorderen Abschnitte einen Umfang von $6\frac{3}{4}$ Zoll, im hinteren von 5 Zoll. Mit dieser beispiellosen Ausdehnbarkeit der Schwimmblase steht eine eigenthümliche, sonst bei keinem Fische beobachtete Richtungsabweichung der Rippen in nothwendigem Zusammenhang. Die vorderen Rippen, welche bei gewöhnlicher Krümmung diese Erweiterung der Schwimmblase nicht gestatten würden, sind nach aufwärts gebogen[7]), und beschränken dadurch die Erweiterung der Rumpfhöhle gar nicht. Die Aponeurose, welche die Schwimmblase von der Bauchhöhle trennt, besteht über und über aus elastischen Fasern, und wirkt desshalb ebensowenig einschränkend. An der

---

[1]) A. a. O. pag. 152 und 153..

[2]) A. a. O. pag. 157, seqq.

[3]) Dieses Umstandes wegen waren an drei Eingeweiden von *Gymnarchus*, welche der verstorbene österreichische Consul Herr Dr. Reitz in Chartum mir zuzusenden die Gefälligkeit hatte, die Schwimmblasen abgeschnitten.

[4]) Lib. cit. pag. 153.

[5]) Lib. cit. pag. 157.

[6]) Lit. *l* unserer Abbildung.

[7]) Tab. I.

Durchschnittsfläche der Schwimmblase sieht man, dass die centrale Höhle nur 7 Linien Querdurchmesser besitzt, und sich nicht bis in die halbe Länge des Organes hinein erstreckt. Alles Übrige ist Zelle auf Zelle gethürmt, so dass der Durchschnitt der zellenhältigen Wand dem Durchschnitte eines aufgeblasenen cavernösen Körpers gleicht. Die Zellen sind wie die Parietalzellen von Vogel- und Amphibienlungen, durch successive und immer feiner werdende Ausbuchtung grösserer Zellenräume entstanden. Es finden sich Gruppen kleinerer Zellen, die einer grösseren angehören, aus welcher sie sich herausstülpten. Sie besitzen desshalb vollständige, obwohl sehr zarte Begrenzungswände. Nur bei oberflächlicher Untersuchung im nicht aufgeblasenen Zustande könnte man glauben, ein cavernöses Gewebe vor sich zu haben.

Ein Quecksilbertropfen in eine solche Zellengruppe gegossen, kann nicht in eine benachbarte Gruppe durch Druck wandern gemacht werden. — Wo die centrale Höhle aufhört, ist das ganze übrige Parenchym der Schwimmblase eine solche Zellenanhäufung. Da auch die Lunge des *Lepidosiren* nach dem Typus einer Amphibienlunge gebaut ist, so ist die Ähnlichkeit der Schwimmblase des *Gymnarchus* mit ihr wirklich keine scheinbare.

In den Wandungen der grösseren und kleineren Zellen sind Muskelfasern eingetragen, und zwar in solcher Fülle, dass das zellige Parenchym der Schwimmblase, von der Höhle aus gesehen, eine rothbraune Färbung besitzt. Das Epithelium besteht aus grossen, eckigen Pflasterzellen.

Das vordere Ende der Schwimmblase verschmächtigt sich zusehends, und geht in einen sehr kurzen, aber weiten *Ductus pneumaticus* über, welcher die oben erwähnte Aponeurose durchbohrt und in die dorsale Wand des Schlundes mit der früher geschilderten weiten Öffnung einmündet. Die longitudinalen Schleimhautfalten, welche diese Öffnung rechts und links begrenzen, sind nichts Bleibendes, lassen sich durch leichten Zug ausglätten, und verschwinden beim Aufblasen. Muskeln, welche nach Erdl diese Falten bewegen sollen, existiren nicht, und sie haben auch nicht die entfernteste Verwandtschaft mit einem rudimentären *Larynx*.

Vergleicht man die zelligen Schwimmblasen von *Amia* und *Lepidosteus* mit jener von *Gymnarchus*, so sind die Wandungen der ersten beiden nicht so dick wie jene des letzteren. Die Ausbuchtung primärer Parietalzellen zu secundären wiederholt sich bei weitem nicht so oft wie bei *Gymnarchus*, bei welchem somit die Schleimhautoberfläche der Schwimmblase eine ungleich grössere ist.

Höchst überraschend für eine Schwimmblase ist der ungeheure Gefässreichthum derselben bei *Gymnarchus*. Man kann ohne Bedenken die Schwimmblase das gefässreichste Organ des Thieres nennen. Eine einfache Arterie von der Dicke eines Schreibfederkieles[1]) (im injicirten Zustande) liegt beiläufig in der Mitte der unteren Fläche der Schwimmblase, und wird von einer Vene begleitet (lit. *b*), welche sie an Volumen um das Doppelte übertrifft. Beide Gefässe, in Einer Scheide liegend, lassen sich bis in die Nähe des hinteren Endes der Schwimmblase verfolgen. Auf halbem Wege theilt sich die Vene in zwei grosse Zweige, welche von nun an die ungespaltene Arterie zwischen sich fassen. Die Arterie schickt zahlreiche Äste ab, welche allsogleich die Oberfläche verlassen und bis zur inneren Oberfläche des Organes vordringen, um mit ihren Zweigen anfangs in den Wandungen der grösseren Zellen, und mit ferneren Verästelungen in den Zwischenwänden der kleineren Zellen zu verlaufen.

---

[1]) Tab. III, lit. *a*.

Die Zweige der Venen verfolgen andere Bahnen als jene der Arterien, und tauchen an anderen Stellen aus der Tiefe empor, als wo die Arterienäste sich einsenkten.

Über die Beschaffenheit des Capillargefässsystems kann ich nichts angeben, da die Injection der Arterie nicht in die Vene überging, und letztere für sich injicirt werden musste. Aus der Menge der primären und secundären Verästelungen der beiden Hauptgefässstämme der Schwimmblase lässt sich jedoch vermuthen, dass das intermediäre Gefässsystem jenem einer Lunge wenn nicht gleichkommen, doch sehr nahe stehen muss. Die Schwimmblase des *Lepidosteus* ist dagegen nur mit sehr ärmlichen Gefässverästelungen ausgestattet,. und bei *Amia*, wo die Gefässe zahlreicher und umfänglicher werden, sind sie doch nur, wenn man die Grösse des Organs und seiner musculösen Hülle in Anschlag bringt, dem Ernährungsgeschäfte genügend. Bei *Gymnarchus* dagegen ist das Missverhältniss des Organvolumens zur Menge des in ihm circulirenden Blutes so augenfällig, dass Erdl's Behauptung, das Organ sei eine Lunge, nicht so ganz ungegründet erscheint. Ob diese Behauptung unbedingt zu gelten habe, darüber kann nur das Verhalten der Blutgefässe entscheiden. Nach allgemein angenommener Ansicht ist ein Organ ein respiratorisches, wenn es venöses Blut zugeführt erhält, und arterielles zurückgibt. Von der Vene der Schwimmblase wusste Erdl, dass sie sich in das Körpervenensystem entleert (wie die Venen gewöhnlicher Schwimmblasen). Woher die Arterie der Schwimmblase stammt, war Erdl (und Duvernoy) unbekannt.

Mir zeigte die Injection folgendes überraschende Verhältniss[1]).

Sämmtliches arterielles Blut der dritten und vierten Kieme beider Seiten strömt zur Schwimmblase. Nur die erste und zweite Kiemenvene (lit. *a*, *b*) vereinigen sich zur Aortenwurzel (lit. *e*). Die dritte und vierte (lit. *c*, *d*) Kiemenvene dagegen verbinden sich zu einem gemeinschaftlichen Stamm, welcher mit dem der anderen Seite die grosse Arterie der Schwimmblase erzeugt (lit. *f*). Diese liegt anfänglich links von der Aorta. Der gemeinschaftliche Stamm der rechtseitigen dritten und vierten Kiemenvene muss somit länger sein, als jener der linkseitigen, und sich mit der unteren Gegend der medianen Aortenwurzel in schiefer Richtung kreuzen, um zur links gelegenen Arterie der Schwimmblase zu gelangen. Während letztere zur Furche an der unteren Schwimmblasenwand hinzieht, geht sie mit der etwa um die Hälfte schwächeren *Arteria coeliaca* (lit. *g*) eine Anastomose ein (lit. *h*). Diese erscheint als ein nur zwei Linien langer Querast von $^3/_4$ Linien Dicke, welcher in die linke Seite des Anfangsstückes der *Coeliaca* einmündet. Die *Coeliaca* selbst entspringt aus der Aortenwurzel noch vor Abgang der *Arteriae subclaviae*, und nimmt zwischen der rechten Magenfläche und der Leber ihren ferneren, sich durch nichts Besonderes von anderen Fischen unterscheidenden Verlauf. Die *Coeliaca* wird nach Aufnahme jener Anastomose von der Schwimmblasen-Arterie nicht stärker, und letztere durch die Abgabe der Anastomose nicht schwächer. Die Bedeutung dieser Anastomose ist leicht zu errathen. Bei leerer, zusammengezogener, oder von den Rumpfwänden comprimirter Schwimmblase wird sie aller Wahrscheinlichkeit nach als Regulator der gleichförmigen Blutvertheilung wirken, und einen Theil des Blutes aus der Schwimmblasen-Arterie in die *Coeliaca* ableiten. Bei der Ausdehnung der Schwimmblase mit Luft kann sie in entgegengesetzter Weise die Zufuhr der Blutmenge zu dieser von der *Coeliaca* her steigern.

Die mächtige Vene der Schwimmblase geht, ohne mit irgend einer anderen Körpervene zu anastomosiren, in den linken *Ductus Cuvieri (Truncus venosus transversus)* über[2]).

---

[1]) Tab. IV, Fig. 4.

[2]) Tab. IV, Fig. 2, lit. *f*.

Nach diesem Gefässverhältniss wäre, den Müller'schen Ansichten über die Bedingungen einer Schwimmblase zufolge, die Schwimmblase des *Gymnarchus* keine Lunge, welche dieser Fisch, so lange er in seinem eigenen Elemente lebt und durch seine schön und reich entwickelten, lanzettblätterigen Kiemen respirirt, in der That nicht bedarf. Eine Füllung dieser Schwimmblase mit Luft würde bei der enormen Grösse derselben den Fisch auf der Oberfläche des Wassers halten, und eine theilweise unvollständige Füllung derselben, wie sie zur Unterstützung des Auf- und Niedersteigens eines der Schwanzflosse entbehrenden Fisches wohl erforderlich sein dürfte, ist für die respiratorische Function der Schwimmblase ohne Erfolg, weil das zugeführte Blut ohnedies schon arterieller Natur ist. Man sehe jedoch, wie es mit der Kiemenrespiration des Fisches bestellt sein muss, wenn er aufs Trockene geräth. Man wusste über die Lebensweise dieses so äusserst seltenen Fisches nichts Näheres. Höchst willkommen muss desshalb die kurze Note in Duvernoy's früher citirtem Aufsatze[1]) sein, wo es heisst, dass ein im Pariser Museum befindliches Exemplar eines *Gymnarchus* aus dem Senegal mit folgender Bemerkung des Reisenden Pérottet, von welchem es herstammt, versehen ist: „Mormyre du Sénégal, que l'on prend dans la vase des terrains inondés, quand l'eau du fleuve s'est retirée. Ils se trouvent dans des trous de douze à quatorze pieds de profondeur, sans eau." Es ist einleuchtend, dass, wenn das Wasser, welches den Fisch bei den regelmässig wiederkehrenden Überschwemmungen ans Land getragen, sich verloren hat, die Kiemenrespiration vollkommen unterbleibt, und das Thier, wenn es kein vicarirendes Athmungsorgan besässe, einem unvermeidlichen Untergange verfallen wäre. Die sistirte Kiemenathmung lässt nur venöses Blut in die Kiemenvenen gerathen; — dieses gelangt in die Arterie der nun als wahre Lunge functionirenden Schwimmblase, und kehrt durch die Vene als arterielles Blut zum Herzen zurück, wo es sich mit dem übrigen venösen Körperblute mischt und die Kiemen passirt, ohne verändert zu werden. Die Aorta wird desshalb gemischtes Blut führen, wie es auch bei den mit Aortenbögen versehenen Fischen der Fall ist *(Lepidosiren* und Verwandte: *Amphipnous*, *Monopterus*, *Ophiocephalus)*, und die Schwimmblasen-Arterie wird gleichfalls gemischtes Blut enthalten, wie es in der ganzen Amphibienwelt von der Lungenarterie anerkannt ist.

Da der Kiemendeckel des *Gymnarchus* sehr genau und luftdicht schliesst, und die Kiemenspalte nur eine vergleichungsweise geringe Ausdehnung hat, so ist die Kiemenhöhle vor der Gefahr des Austrocknens hinlänglich gesichert, das capillare Gefässsystem der Kiemenblättchen bleibt, wie im Wasser permeabel, und da die Abnahme des Wassers in den Sümpfen, in welchen der Fisch Zuflucht fand, nur allmählich geschieht, so wird auch die Kiemenrespiration nur allmählich eingehen, und die Lungenfunction der Schwimmblase allmählich anheben, — der gesammte Kreislauf und Ernährungsvorgang somit Zeit haben sich nach anderen Regeln für die Dauer des Luftlebens zu etabliren. Der Fisch kann, nachdem er seine Schwimmblase einmal mit Luft gefüllt, an dieser Provision lange zehren und sich mit Ruhe in sein Schicksal fügen, welches höchst wahrscheinlich wie bei *Lepidosiren*, während er im trockenen Schlamm eingeschlossen ist, in einem durch die trockene Jahreszeit andauernden Torpor besteht, bis die nächste Überschwemmung ihn seinem eigentlichen Elemente wiedergibt, um ihn vielleicht bald darauf neuerdings in eine ähnliche Lage zu bringen. Pérottet's Angabe über den *Gymnarchus* vom Senegal stimmt in dieser Hinsicht mit Owen's[2]) Mittheilung über

---

[1]) Pag. 155.

[2]) Lectures on the Comparativ Anatomy of Vertebrate Animals. Part. I, pag. 278.

die Lebensweise des *Lepidosiren* aus dem Gambia genau zusammen: „The *Lepidosiren* inhabits a part of the river Gambia, which in the rainy season owerflows extensiv tracts, that are again left dry in the dry season. The *Lepidosirens*, which do not follow the retreating waters, escape from the scorching rays of the African sun by burrowing in the mud, which is soon baked hard above them; but they maintain a communication with the air by a small aperture, and coiling themselves up in their cool chamber, clothe themselves by a layer of thick mucous secretion, and await in a torpid state, the return of the rains, and the overflowing of the mud-banks. The aduent of their proper element wakes them into activity: they than emerge from the softened mud, swim briskly about, feed voraciously, and propagate.“

Die Schwimmblase des *Gymnarchus* kann dem Gesagten zufolge als eine temporäre Lunge nicht füglich beanständet werden, indem nur durch ihre Vermittlung die Erhaltung eines Geschlechtes möglich wird, welches ohne ihre Dazwischenkunft nur einer höchst precairen Existenz sich erfreuen könnte.

IV.

ÜBER DIE GEMMINGER'SCHEN KNOCHEN DER MORMYRI.

Taf. VI. Fig. 4.

Gemminger hat in seiner Inaugural-Dissertation[1]) bei *Mormyrus oxyrhynchus* und *dorsalis* zwei an beiden Seiten des Schwanzes gelagerte, stabförmige, dem oberen und unteren Rande des elektrischen Organes folgende Knochen hervorgehoben, „welche von den Sehnen langgestreckter, längs den Spitzen der oberen und unteren *Procesus spinosi* verlaufender Muskeln scheidenförmig eingeschlossen werden, aber keineswegs verknöcherte Sehnen sind, da sie sich auch an den kleinsten Exemplaren von *Mormyrus oxyrhynchus* vorfinden. Sie sind von ungleicher Länge, oft aus zwei Stücken, durch ein Ligament verbunden, zusammengesetzt, und hindern dadurch, dass die scharfen Spitzen derselben von den umhüllenden Muskeln gedeckt sind, die Schwanzbewegung dieser Fische in keiner Weise.“

Bei *Mormyrus dorsalis* erwähnt Gemminger noch einen dritten rudimentären Knochen zwischen den beiden unteren gelegen, an welchem nach unten ein freies Knochenstückchen hing. Auf pag. 4 wird ausdrücklich bemerkt, dass das elektrische Organ zwischen den beiden stabförmigen Knochen ausgespannt ist.

Ich habe diese Knochen bei der Ausarbeitung der Skelete von 8 *Mormyrus*-Arten sehr sorgfältig untersucht, und kann über ihre anatomischen Eigenschaften, so wie über Beziehungen zum elektrischen Organ folgende nähere Aufschlüsse geben.

Bei einem 22 Zoll langen Exemplare von *Mormyrus oxyrhynchus* hatten die beiden unteren Knochen[2]) eine Länge von $3\frac{1}{2}$ Zoll, die beiden oberen[3]) waren um 3 Linien kürzer. Ihre grösste Dicke, welche von der Mitte bis in die Nähe der beiden Enden kaum merklich abnimmt, betrug nicht voll eine halbe Linie. Sie laufen an ihrem vorderen und hinteren Ende in scharfe Spitzen aus. Ein Zerfasern an den Enden, wie bei anderen Sehnenknochen, kommt

---

[1]) Elektrisches Organ von *Mormyrus* und Schwanzskelet von *Eryx*. München 1847, pag. 4 und 5.
[2]) Tab. VI, Fig. 4, *C*.
[3]) Ibid. *A*.

nicht vor. Die unteren liegen ihrer ganzen Länge nach genau an der unteren Schwanzkante, dicht unter der Haut, mit welcher ihr fibröser Überzug innig verwachsen ist. Sie berühren sich nur in ihrer Mitte, wo sie etwas aufgetrieben erscheinen, und daselbst so fest mit einander verlöthet sind (aber nicht verwachsen), dass man sie nur mit Mühe trennen kann. Diese feste Verbindungsstelle ruht auf dem Ende des *Processus spinosus inferior* des zwölften Schwanzwirbels (von rückwärts an gezählt), und ist auch mit diesem, doch weniger fest als mit der Haut, durch Fasergewebe verbunden. Von dieser Verlöthungsstelle divergiren die vorderen und hinteren Schenkel beider Knochen so weit, dass sie die Spitzen der unteren Wirbeldornen zwischen sich nehmen. Die beiden oberen Knochen liegen nur mit ihrem hinteren Ende dicht unter der Dorsalkante des Schwanzes, welche, da die Rückenflosse sich der Schwanzflosse bis auf einen Zoll nähert, viel kürzer erscheinen muss als die untere Schwanzkante, an welcher der Abstand von After- und Schwanzflosse $5^1/_2$ Zoll beträgt. An jener Stelle, an welcher die Rückenflosse endigt, sind beide Knochen in der Länge von 4 Linien mit einander zu einer mehr breiten als dicken Platte verwachsen[1]), welche mit einer von ihrer unteren Fläche median abstehenden, sehr schwachen, nur angedeuteten Crista auf der Spitze des eilften oberen Schwanzwirbeldornes (von rückwärts gezählt) aufliegt, von ihrer oberen Fläche eine kurze, starke, seitlich comprimirte Leiste hervortreibt, welche sich mit dem Endstücke des letzten Rückenflossenträgers[2]) sehr innig verbindet, und mit ihm das Grübchen bildet, in welchem der Gelenkskopf des letzten Rückenflossenstrahles spielt. Vorwärts dieser Stelle divergiren die beiden oberen stabförmigen Knochen, und laufen, beiderseits der Grenzlinie zwischen oberen Wirbeldornen und Trägern der Rückenflosse entsprechend, bis zum 18. *Processus spinosus superior* (von hinten gezählt) nach vorne. Man kann, dieser Beziehung zur Rückenflosse, und dieser medianen Verwachsungsstelle wegen, welche den stärksten Theil der Knochen bildet, die beiden oberen Knochenstäbe nur als sehr lange vordere und hintere Ausläufer der medianen Knochenplatte ansehen.

Was die Bedeutung dieser Knochen betrifft, so lässt sich wohl mit Bestimmtheit sagen, dass sie keine Fixirungsapparate der elektrischen Organe sind. Die elektrischen Organe stehen bei keiner der acht früher angeführten *Mormyrus*-Arten mit diesen Knochen in Zusammenhang. Die elektrischen Organe sind nur mit den Seitenflächen der platten Dornfortsätze der Schwanzwirbel, und mit den über sie wegstreifenden, strahlenförmig gegen den oberen und unteren Schwanzkiel sich verbreitenden, flachen Sehnen des oberen und unteren Seitenmuskels des Rumpfes verwachsen, und werden durch eine sehr dicke fibröse Scheidewand von den fraglichen Knochenstäbchen getrennt. Diese gehören vielmehr einem eigenen Muskel an, welcher über der dorsalen, und unter der ventralen Portion des grossen Seitenmuskels gelegen ist, seiner Lage nach genau der Grenze zwischen den Dornfortsätzen und Trägern der oberen und unteren unpaaren Flosse entspricht, und welcher, wenn er in seinem ganzen Verlaufe fleischig und gleich dick verbliebe, auf die elektrischen Organe, über deren obere und untere Ränder er wegziehen müsste, einen wie immer schädlichen Druck ausüben würde. Es wird desshalb dieser Muskel in der Länge der elektrischen Organe durch einen stabförmigen Knochen so unterbrochen, wie ein zweibäuchiger Muskel durch die seinem Fleische eingeschobene mittlere

---

[1]) Ibid. *B.*

[2]) Jeder Flossenträger besteht nämlich aus zwei, durch eine Symphyse mit einander verbundenen Stücken, — einem unteren langen und einem oberen sehr kurzen Ergänzungsstück, welches schräge nach hinten gerichtet ist, und mit dem entsprechenden Flossenstrahl articulirt, welcher somit nicht in der Verlängerung des unteren, grösseren Stückes des Flossenträgers liegt.

Sehne getheilt wird. Die Wirkung des Muskels wird dadurch nicht gestört, wohl aber durch Wegschaffen von Fleisch der nöthige Raum für das elektrische Organ gewonnen, welches nach der Angabe Rüppel's an lebenden *Mormyri* so turgescirt, dass das Schwanzende dadurch eine auffallende Dicke bekommt. Erstreckt sich die Rücken- oder Afterflosse bis in das Bereich dieser Knochenstäbe, so dienen sie zugleich der oberflächlichen Portion der kleinen einzelnen Seitenmuskeln dieser unpaaren Flossen zum Ursprung. Da die elektrischen Organe nicht bis zum Schwanzende der Wirbelsäule reichen, so brauchen auch diese Knochen sich nicht so weit nach hinten zu erstrecken. Sie hören desshalb einen Zoll vor der Basis der Schwanzflosse auf, und gestatten dem Muskel, welchen sie zu vertreten hatten, wieder seine fleischige Gestalt anzunehmen. Auf eine Fixirung der Rückenflosse haben sie, wie ich anfangs vermuthete, keinen Einfluss, auch wäre eine solche Fixirung bei der Weichheit der Flossen in dieser Familie eine nutzlose Sache. Die Biegsamkeit der Knochen beschränkt die Seitenbewegungen des Schwanzes nicht im geringsten, und damit sie bei diesen Biegungen nicht etwa wie Chorden sich von der concav gewordenen Schwanzseite aufheben, sind sie in eine sehr dicke fibröse, und mit den anliegenden Knochen verwachsene sehnige Scheide eingeschlossen, welche eine Fortsetzung der fibrösen Hülle des angeführten Längsmuskels ist, und welche den Knochen nie erlaubt, sich bei den lateralen Krümmungen der Wirbelsäule von ihrem Posten zu heben. Die Gemminger'schen Knochen vertreten somit die Stelle der Sehne eines zweibäuchigen accessorischen langen Stammmuskels, und werden durch die Gegenwart der elektrischen Organe erforderlich, ohne jedoch in nähere Beziehung zu diesen zu treten.

Bei *Mormyrus anguillaris*, bei welchem die Afterflosse bedeutend länger als bei dem vorausgegangenen erscheint, verhalten sich diese Knochen gerade verkehrt wie bei *M. oxyrhynchus*. Die beiden oberen stabförmigen Knochen gehen keine Verbindung mit der Rückenflosse ein, und bleiben getrennt, wie die unteren des *M. oxyrhynchus*. Dagegen verbinden sich die unteren beiläufig in ihrer Mitte zu einer unpaaren, dickeren Platte, welche mittelst eines nach aufwärts ragenden medianen Kieles sich an das breite Ende des zwölften (von hinten) unteren Schwanzwirbeldornes stemmt, und von ihrer unteren Fläche einen starken, sphärisch convexen Gelenkskopf entstehen lässt, mit welchem das untere Ansatzstück des letzten Afterflossenträgers und die spärlich ausgehöhlte Basis des letzten Schwanzflossenstrahls articulirt. Die beiden oberen Knochen sind an einem *M. anguillaris* von 24 Zoll Länge fast 5 Zoll lang, die unteren nur 3 Zoll.

Bei *Mormyrus dorsalis*, an welchem die Rückenflosse so kurz ist wie die Afterflosse bei *M. oxyrhynchus*, dagegen die Afterflosse so lang wird, dass sie die Basis der Schwanzflosse fast erreicht, verhalten sich die Knochen wie bei *M. anguillaris*. Es verwachsen die beiden unteren zu einer auf den unteren Dorn des zehntletzten Wirbels gestützten Platte, — während die oberen getrennt bleiben.

Bei *Mormyrus elongatus*, an welchem die Rückenflosse kurz, die Afterflosse um die Hälfte länger wird, verschmelzen die oberen und unteren in der Mitte ihrer Länge, um mit der Rücken- und Afterflosse auf dieselbe Weise, wie jeder der vorhergegangenen mit einer derselben, sich zu verbinden.

Bei *Mormyrus cyprinoides*, dessen Flossen jenen von *M. elongatus* gleichen, ist auch das Verhalten der Knochen jenem entsprechend. Sie sind übrigens bei dieser Species dünner als bei den übrigen.

Bei *Mormyrus Bane*, mit ähnlichem Flossenverhalten, sind jedoch nur die beiden unteren Knochen verwachsen und mit dem letzten Flossenstrahl in der erwähnten Gelenksverbindung. Die beiden oberen verwachsen zwar auch, aber nicht zu einer Platte, sondern zu einem kurzen, längsgefurchten Cylinderstück, welches mit dem Träger des letzten Rückenflossenstrahles keine Articulation eingeht.

Mormyrus Caschive Hasselquist verhält sich genau wie *M. oxyrhynchus*.

M. zambacensis Peters stimmt mit *M. dorsalis* überein.

Bei *Gymnarchus niloticus* fehlen die oberen und unteren Knochen spurlos.

Welchen besonderen Zweck die Gelenksverbindung des oberen oder unteren Knochenpaares mit dem letzten Flossenträger und Flossenstrahl zu realisiren hat, ist mir nicht klar.

V.

ZUNGENBEIN-KIEMENGERÜSTE VON GYMNARCHUS.

Vom Zungenbein-Kiemengerüste hat Erdl[1]) nur das erstere beschrieben. Die hier folgenden Angaben, welche von jenen Erdl's differiren, beziehen sich auf das Zungenbein-Kiemengerüste eines 4 Fuss langen Exemplares.

Das Zungenbein besteht nur aus drei Stücken, — einem Körper und zwei Hörnern, welche letztere an ihrem oberen (hinteren) Ende auf die gewöhnliche Weise mit dem Kiefersuspensorium in Verbindung stehen. Was Erdl das hintere Stück des grossen Hornes nannte, welches an seinem kleinen Exemplare durch Nath sich mit dem vorderen verbindet, ist an dem vor mir befindlichen durch vollkommene Synostose fast ohne Trennungsspur verwachsen (lit. *c*, *c*). Was Erdl als kleine Zungenbeinhörner anführt, unterliegt, wie weiter unten gezeigt wird, einer andern Deutung. Der Zungenbeinkörper besteht aus einem dreikantig pyramidalen, zahnlosen *Os entoglossum* (lit. *a*) und einem plattenförmigen, senkrecht stehenden, breiten Zungenbeinkiel, *Urohyal* nach Owen (lit. *b*), welche innig und untrennbar mit einander verschmelzen.

Erdl führt blos 4 Kiemenhautstrahlen an. Ich finde sieben auf der rechten, sechs auf der linken Seite. Diese Unsymmetrie beruht auf keinen Präparationsfehler, da auch *Mormyrus anguillaris* dasselbe Verhalten zeigt, und andere *Mormyri* gleichfalls eine auf beiden Seiten ungleiche Anzahl von Kiemenstrahlen besitzen. So z. B. *M. cyprinoides* rechts 6, links 7, — *M. dorsalis* ebenso, — *M. Caschive b* rechts 7, links 6, — während *M. oxyrhynchus* auf beiden Seiten 7, ebenso *M. zambacensis*, *M. Bane* und *M. elongatus* nur 5 Kiemenstrahlen hat.

Von den 4 Kiemenbogen des *Gymnarchus* besteht jeder nur aus einem oberen (lit. *d*, *d*, *d*, *d*) und unteren Segment (lit. *e*, *e*, *e*, *e*). Man sieht es jedoch dem oberen Segment des zweiten und dritten Bogens an, dass es durch Verschmelzung zweier früher getrennten Stücke entstand, indem eine Symphysenspur an der dorsalen Fläche der rechtseitigen oberen Segmente sich erhielt[3]). Beide Segmente der vier Kiemenbogen sind sehr kurz, aber breit, und an ihrer

---

[1]) Lib. cit. pag. 228 und 229.

[2]) Tab. I, Fig. 2.

[3]) Bei *Mormyrus anguillaris* bleiben diese oberen Gelenkstücke des zweiten und dritten Kiemenbogens getrennt; der erste und vierte entbehren ihrer. Auch bei *Mormyrus oxyrhynchus* besitzen die drei vorderen Kiemenbogen obere, getrennt bleibende Gelenkstücke.

convexen Seite besonders tief gefurcht. An ihrer concaven Seite sind sie mit doppelten Reihen kurzer, konischer Höckerchen besetzt, welche in Abständen von $1^1/_2$—2 Linien auf einander folgen.

Ossa pharyngea superiora fehlen. Die *inferiora* sind breite, flache, muldenförmig gebogene Knochenschalen (lit. *f*). Untere mediane Verbindungsstücke der Kiemenbogen *(Copulae)* fehlen gleichfalls, und es hängen die Bögen der rechten und linken Seite nur durch eine derbe fibröse Verbindungsmembran zusammen.

Zu diesen höchst einfach construirten Kiemengerüst tritt aber noch ein ganz besonders entwickeltes Knochenpaar hinzu, welches Erdl für die kleinen Zungenbeinhörner gehalten zu haben scheint. Abgesehen davon, dass Knochen, welche dem kleinen Zungenbeinhorne des Menschen und der Säugethiere analog wären, bei den Fischen, als vom Zungenbeinkörper ausgehend, nicht vorkommen, und, wenn man schon diesen Namen gebrauchen will, er dem obersten Gliede des grossen Hornes (gewöhnlich *Os styloideum* genannt) beigelegt werden müsste, so gehören die jetzt zu betrachtenden Knochen *stricte* zum Kiemen- nicht aber zum Zungenbeinapparat, wie die vergleichende Betrachtung derselben bei den *Mormyri* lehrt. Bei *M. anguillaris* vertritt der bezahnte Zungenbeinkiel die Stelle einer medianen unpaaren *Copula*, welche sich zwischen die unteren Endstücke des ersten und zweiten Kiemenbogens hineinschiebt. Das kurze, flache, rundliche untere Gelenkstück des ersten Kiemenbogens legt sich seitwärts an den Zungenbeinkiel an[1]). Das untere Gelenkstück des zweiten Kiemenbogens steigt aber rechts und links vom hinteren Rande dieses Kiels nach abwärts, und zieht sich zu einem walzenförmigen, nach hinten und unten concav gebogenen, rippenähnlichen Knochenstäbchen aus, an welchem ein ansehnlicher Theil des *Musculus omohyoideus* seine Insertion nimmt. Beide Knochensäulen divergiren nach hinten, und sind ungefähr einen halben Zoll lang. Bei *M. oxyrhynchus* werden sie länger und stärker. Ausgezeichnet durch Krümmung und Stärke sehe ich sie bei *Mormyrus Caschive*. Bei *M. dorsalis* erscheinen sie am kürzesten, und am dünnsten bei *M. elongatus*. *M. zambacensis* zeigt sie ungleich lang, das linke etwas kürzer als das rechte.

Bei *Gymnarchus* erreichen sie die Länge von dritthalb Zoll, zeichnen sich durch ihre Dicke vor jenen der *Mormyri* aus, und stossen, weil der Zungenbeinkiel nicht so weit nach hinten reicht, von beiden Seiten mit ihren dickeren Enden zusammen. Besieht man diese mediane, durch Symphyse bewerkstelligte Verbindungsstelle beider Knochen von oben, so bemerkt man in ihrer Mitte einen längs-ovalen Knochenkern (lit. *h*), welcher in der Verlängerung des Zungenbeinkiels liegt, an dessen hinteren Rand er anstösst. Es bedarf keines Beweises, dass dieser Knochenkern ein Rudiment einer *Copula* ist, welche in besser entwickeltem Grade bei allen *Mormyri* zu finden ist. Das untere Gelenkstück des dritten Kiemenbogens der *Mormyri* berührt zwar die Seitenränder dieser rudimentären *Copula*, und verlängert sich wie das zweite nach abwärts, jedoch nicht um in einen *Processus muscularis* auszuwachsen, sondern mit demselben Knochen der anderen Seite zu verwachsen, und ein dreieckiges Thor zu bilden, durch welches der Stamm der *Arteria branchialis* tritt. Der vierte Kiemenbogen der *Mormyri* besitzt, so wie der dritte und vierte von *Gymnarchus*, kein unteres Segment, welches einem unteren Gelenkstücke eines viergliederigen (gewöhnlichen) Kiemenbogens zu vergleichen wäre, ebensowenig als eine *Copula*, indem die Verbindung der beiderseitigen Kiemenbogen blos durch eine fibröse Membran zu Stande kommt.

---

[1]) Bei *Mormyrus dorsalis* und *elongatus* fehlt es.

VI.

EINIGE OSTEOLOGISCHE EIGENTHÜMLICHKEITEN VON MORMYRUS UND GYMNARCHUS.

Die Zahl der Wirbel wird von Erdl auf 150 angegeben. Er lässt sie am flossenfreien Theile des Schwanzes so fein werden, „wie die Schwanzwirbel an den feinsten Eidechsenschwänzen, so dass man sie nur mit der grössten Anstrengung zählen kann.“ — Dem ist jedoch nicht so. Bis zum Ende der Rückenflosse lassen sich die Wirbel, da ihre Eigenschaften sich ziemlich gleich bleiben, leicht zählen. Ihre Zahl beträgt bei dem grossen Exemplare, welches ich vor mir habe 117, bei dem kleinen 114. Vom Ende der Rückenflosse an bis zur Schwanzspitze verlieren die Wirbel ihre oberen und unteren Dornfortsätze, insoferne nur die dicken Basalstücke derselben (welche an sämmtlichen vorausgehenden Wirbeln nicht mit den Wirbelkörpern verwachsen, sondern nur durch Symphyse angelöthet waren) übrig bleiben. Zugleich geht der eigentliche Körper der hintersten Schwanzwirbelkette so ein, dass die Basalstücke der oberen und unteren Dornfortsätze fast bis zur Berührung sich nähern, und da die Stelle der verschwundenen Wirbelkörper durch eine knorpelige *Chorda dorsalis* eingenommen wird wie bei den echten Ganoiden, so sitzen die breiten Basaltheile der oberen und unteren Dornfortsätze auf dieser nakten *Chorda* so auf, wie man es z. B. bei den Pycnodonten findet.

Je weiter gegen die äusserste Schwanzspitze hin, desto unregelmässiger werden die Verhältnisse dieser oberen und unteren Elemente. Sie liegen nicht mehr unter einander, sondern schieben sich zwischen einander ein[1]), wodurch ein zickzackförmig gebogener Streif der *Chorda* unbedeckt bleiben muss, und gehen endlich zu unregelmässigen Knochenblättchen ein, welche wie Schuppen auf der schon fadenförmig gewordenen *Chorda* aufliegen, bis zuletzt das Endstück des Schwanzes nur mehr aus einem feinen Chordafädchen besteht, welches vier Linien an Länge misst. Das Wachsthum in die Länge wird desshalb bei *Gymnarchus* nie aufhören können. — Die Zahl der Flossenträger stimmt mit jener der Wirbel nicht überein. Sie beträgt 207 auf 117 obere Dornen, und bei dem kleineren Exemplare 187 auf 114 Dornen. Die Zahl der Bauchwirbel beträgt 45 bei dem grösseren, 46 bei dem kleineren, und scheint also überhaupt zu variiren. — Alle übrigen Angaben Erdl's über Rippen und Flossen kann ich vollkommen bestätigen.

Die Wirbel des *Gymnarchus* bieten eigentlich weniger Ähnlichkeiten mit jenen der *Mormyri*, als mit einigen Gattungen der Siluroiden und Clupeiden dar. Und zwar sind es jene Siluroiden, deren Schwanzwirbelsäule in eine feine Spitze auslauft, oder deren Rücken- und Afterflosse mit der Schwanzflosse verschmilzt, welche in der Form ihrer Wirbelkörper sich dem *Gymnarchus* nähern, während das Getrenntbleiben der oberen und unteren Dornfortsätze von *Gymnarchus*-ähnlichen, kurzen, rundlichen Wirbelbögen, einigen Clupeiden[2]) zukommt.

Mormyrus zambacensis hat 62 Wirbel, *M. anguillaris* 59, *M. oxyrhynchus* 54, *M. dorsalis* 55, *M. Caschive* 49, *M. elongatus* 48, *M. cyprinoides* 47, *M. Bane* 42.

---

[1]) Tab. I, Fig. 1.

[2]) Wird auch in höherem oder niedrigerem Grade bei Salmoniden, Cyprinoiden, Characinen, Gadoiden, u. m. a. beobachtet.

Dennoch bieten die *Mormyri* auch in osteologischer Hinsicht einige Annäherung an *Gymnarchus* dadurch dar, dass bei *M. anguillaris* die drei letzten Wirbelkörper, welche zusammen 5 untere Bogen tragen, mit letzteren nicht verwachsen, sondern sie durch eine auch bei sehr alten Exemplaren vorhandene Symphyse aufnehmen. Ebenso der letzte Schwanzwirbel den oberen Bogen. Bei *M. oxyrhynchus* sind die unteren Bogen der zwei letzten Wirbel selbstständig, und nur in den Wirbelkörper eingekeilt, während am oberen Bogen selbst eine Trennung zwischen Basaltheil desselben und eigentlichen Dornfortsatz existirt. Bei jüngeren Individuen kommt das Getrenntsein oberer und unterer Bogen gewiss noch an mehreren Wirbeln vor, wie die noch an alten Exemplaren unverkennbaren Trennungsspuren bezeugen. Bei *M. dorsalis* beschränkt sich die Selbstständigkeit blos auf die unteren Bogen der zwei letzten Wirbel, und ist bei *Mormyrus elongatus*, *cyprinoides* und *Bane*, von welchen ich kleine Exemplare vor mir habe, gar nicht zu beobachten. *Mormyrus Caschive* zeigt ebenfalls weder an den oberen noch an den unteren Dornfortsätzen eine Trennung vom Wirbelkörper. *Mormyrus zambacensis* dagegen lässt sie an den oberen Dornfortsätzen der vier letzten Wirbel sehr deutlich erkennen.

Erwähnung verdient noch, dass bei *M. anguillaris* der 13., 15. und 16. Wirbel (von hinten gezählt) gabelförmig gespaltene obere Dornfortsätze, der 11. und 12. eben solche untere Dornfortsätze trägt, und bei *M. dorsalis* der 12. Wirbel (von hinten) länger als seine Vor- und Hintermänner ist, und 2 obere so wie 2 untere, hinter einander stehende Dornfortsätze besitzt. Dass es sich hier um eine mit Synostose endigende Wirbelverkümmerung handelt, ist mir sehr wahrscheinlich, da Ähnliches auch bei anderen Familien an verschiedenen Stellen der Wirbelsäule vorkommt.

Bei allen *Mormyri* (mit Ausnahme des *M. anguillaris* und *zambacensis*) schliessen ferner die unteren Bogenschenkel schon in grösserer oder geringerer Entfernung vor dem hinteren Ende der Bauchhöhle zu vollständigen unteren Bogen zusammen, und verlängern sich allmählich zu wahren unteren Dornen, welche bis zur Afterflosse hin wahre Rippen tragen. Dieses geschieht bei *M. oxyrhynchus* am 14. Wirbel, und reicht bis zum 24., welcher der erste Schwanzwirbel ist, da er an seinem unteren Dorn den 1. und 2. Träger der Afterflosse aufnimmt. Bei *M. Caschive* schliessen schon die unteren Bogenschenkel des 13. Wirbels zusammen, und bilden einen spitzigen Bogen, welcher ein Rippenpaar trägt. Dieses wiederholt sich bis zum 19. Der 20. Wirbel, welcher der letzte Bauchwirbel ist, hat zwar einen unteren Bogen, trägt aber kein Rippenpaar. Bei *M. dorsalis* beginnt das Zusammenschliessen der unteren Bogen am 17. Wirbel, und reicht nur bis zum 20. Bei *M. elongatus* reicht es vom 14. bis zum 21. Wirbel. Bei *M. Bane* vom 10. bis zum 15. Bei *M. cyprinoides* findet sich dieses Verhältniss blos am 17. Wirbel. Bei *M. anguillaris* und *zambacensis* kommt das bogenförmige Verwachsen der unteren Schenkel nur am 24. Wirbel vor, welcher der letzte Bauchwirbel ist. Alle vorhergehenden Wirbel tragen an ihren Seiten eingelenkte Rippen, aber die verwachsenen unteren Bogenschenkel des 24. Wirbels tragen keine Rippen, eben so wenig als die verwachsenen Bogenschenkel sämmtlicher Schwanzwirbel und des 47. Wirbels des *Gymnarchus*, welcher noch Bauchwirbel ist.

Alle vor der Rückenflosse der *Mormyri* liegenden Wirbel haben auf ihren Dornfortsätzen lange Flossenträger aufsitzen, welche natürlich ohne Verwendung bleiben, und sich von wirklichen Flossenträgern, welche an ihren oberen Enden stark seitlich comprimirt erscheinen, durch ihre Feinheit, einige auch durch ihre S-förmige Krümmung unterscheiden; sie mögen falsche oder abortive Flossenträger heissen. Die hinter der Rückenflosse folgenden Wirbel

besitzen keine falschen Flossenträger mehr, eben so wenig als die hinter der Afterflosse gelegenen.

Die Basaltheile der oberen Bogenstücke des *Gymnarchus* schicken auf beiden Seiten vordere längere und hintere kürzere Verlängerungen ab, welche mit den ihnen entgegengerichteten des nächst vorderen und hinteren Wirbels zusammenstossen, und die Gelenkfortsätze der Wirbel repräsentiren. Bei allen *Mormyri* gehen die Gelenkfortsätze nicht vom oberen Bogenschenkel, sondern von der oberen Fläche des Wirbelkörpers selbst aus, und erreichen die ihnen entgegenwachsenden Fortsätze der anstossenden Wirbel nicht, sondern endigen als spitzige, blos auf einander zugeneigte Zacken. Am hinteren Ende des Schwanzes werden sie jedoch bei *Gymnarchus* und allen *Mormyri* so breit und zugleich so lang, dass sie nun vollends einander nicht blos erreichen, sondern auch mit einander verwachsen, und dadurch über und unter den Wirbelkörpern einen vollständig von Knochen umschlossenen Canal für das Rückenmark und für die *Arteria caudalis* bilden.

Bei *Gymnarchus* bleiben an den 5 vordersten Stammwirbeln die beiden Seitenschenkel des oberen Bogens in ihrer ganzen Länge unvereinigt, und das Loch zum Durchgang des Rückenmarks ist eine nach oben klaffende Spalte, welche nur durch eine fibröse Zwischenmembran verschlossen wird. Die beiden unvereinigten Hälften des oberen Bogens stehen auch nicht symmetrisch, da der linke Schenkel hinter dem rechten emporsteigt. Bei den *Mormyri* besitzen auch die vordersten Wirbel geschlossene obere Bogen.

Die Rippen des *Gymnarchus* articuliren nicht mit den Seitenflächen der Wirbelkörper, sondern mit kurzen dicken Sockeln, welche in den unteren Theil der Seitenfläche jedes rippentragenden Wirbels eingelassen sind und wie Keile feststecken. Am vorletzten Bauchwirbel verschmilzt die Rippe mit diesem Sockel, und die unteren Bogen der folgenden Wirbel bestehen aus einfachen, ungetheilten Seitenschenkeln, welche wie jene früher erwähnten Sockeln in der unteren Fläche der Schwanzwirbel festsitzen. Kein *Mormyrus* besitzt diese rippentragenden Knochen;— die Rippen articuliren unmittelbar mit den Wirbeln.

Die vorderen 18 Rippenpaare des *Gymnarchus* sind, ganz abweichend von der allgemeinen Regel, nicht nach unten gekrümmt, sondern nach oben aufgebogen, und zugleich kürzer als die folgenden, welche, wie sämmtliche Rippen der *Mormyri*, nach unten sich krümmen. Dass diese auffallende Einrichtung mit der enormen Ausdehnbarkeit der Schwimmblase in nothwendigen Zusammenhang steht, wurde früher schon bemerkt.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

TAFEL I.

Fig. 1. Skelet von *Gymnarchus niloticus* in natürlicher Grösse. Die Einzelheiten sind ohne besondere Bezeichnung verständlich. Ich habe diese Abbildung beigegeben, da in der Abhandlung von Erdl über *Gymnarchus* nur einzelne Wirbel dieses Fisches isolirt abgebildet sind, und die Darstellung des Kopfes nur eine flüchtig gearbeitete Skizze ist.

Fig. 2. Kiemengerüste und Zungenbein von einem grösseren Exemplare von *Gymnarchus.*

a, *Os entoglossum.*

b, Zungenbeinkiel.

c, *c*, Zungenbeinhörner.

d, *d*, *d*, *d*, untere Gelenkstücke der vier Kiemenbogen.

e, *e*, *e*, *e*, obere Gelenkstücke derselben.

f, *Os pharyngeum inferius.*

g, *g*, der Knochen, welchen Erdl für das kleine Zungenbein hielt, ich aber als anomales unteres Gelenkstück des zweiten Kiemenbogens betrachte.

h, der mediane Knochenkern in der Symphyse der mit *g* bezeichnete Knochen.

TAFEL II.

Kopf von *Gymnarchus niloticus*, genau ausgeführt, von einem sehr grossen Exemplare. — Jene Wenigen, welche Aufsätze vergleichend-anatomischen Inhaltes durchsehen, benöthigen keiner Erklärung der Einzelheiten, welche übrigens bei Erdl nachgesehen werden kann. (Abhandlungen der königl. baierischen Akademie der Wissenschaften, 5. Bd., 1. Abth., pag. 249.) Mich bestimmte nur die grosse Seltenheit und anatomische Schönheit des Objectes, dasselbe im Bilde wiederzugeben. Der Deckel des Gehörorganes ist abgehoben.

TAFEL III.

Die Abbildung stellt das Verdauungsorgan und die Schwimmblase von *Gymnarchus* dar.

a, *a*, Magen im leeren Zustande.

b, Sonde im *Ductus pneumaticus.*

c, rundliche *Pars pylorica* des Magens.

d, enges Anfangsstück des Dünndarmes.

e, *e*, die zwei langen keulenförmigen *Appendices pyloricae.*

f, Leber.

g, *g*, Gallenblase.

h, die an der Vereinigungsstelle des *Ductus cysticus* und *hepaticus* gebildete elliptische Erweiterung.

i, *Ligamentum hepato-gastricum.*

k, Milz, am hintern Magenende befestigt.

l, *l*, Lungen-ähnliche Schwimmblase, theilweise geöffnet, um die feinzellige, an eine Schlangenlunge erinnernde Beschaffenheit ihrer Wand zu zeigen.

m, *Vena pulmonalis.*

n, *Arteria pulmonalis.* Beide Gefässe verlaufen in der Mittellinie der unteren Schwimmblasenfläche.

TAFEL IV.

Fig. 1. Kiemengerüste von *Aspius rapax*, ohne weitere Erklärung verständlich.

a, *Truncus communis arteriarum branchialium*, mit seiner Hauptverästelung.

b, Anschwellung an der Abgangsstelle des ersten Kiemenarterienpaares.

c, das aus dieser Anschwellung hervorgehende gestielte *Diverticulum.*

Fig. 2. Herz von *Gymnarchus* bei unterer Ansicht und natürlicher Grösse.

a, Ventrikel.

b, *b*, Vorkammer, welche im blutgefüllten Zustande den Ventrikel seitwärts und hinten überragt — gleichsam einschliesst.

c, *c*, Vereinigungsstellen der Drossel- und Schlüsselbeinvenen.

d, *d*, *Venae vertebrales.*

Der durch die Vereinigung der Drossel- und Schlüsselbeinvene gebildete Stamm *(Ductus Cuvieri)* nimmt die einfache *Vena pulmonalis* auf.

g, *g*, Die vier *Diverticula* des *Bulbus.*

Fig. 3. Seitenansicht des Herzens von *Gymnarchus*.
a, Ventrikel.
b, Vorkammer.
c, *c*, die vier *Diverticula* des *Bulbus*.
d, das Bündel der aus dem *Bulbus* hervorgehenden sechs *Arteriae branchiales*, welche etwas verworfen erscheinen. Die einfachen Stämme gehören dem ersten und zweiten Kiemenpaare an, die gabelförmig gespaltenen dem dritten und vierten Kiemenpaare.

Fig. 4. Kiemenvenen von *Gymnarchus*.
a, Vene des ersten Kiemenbogens.
b, Vene des zweiten Kiemenbogens.
Beide bilden die Aortenwurzel bei *e*.
c, *d*, Vene der dritten und vierten Kieme, welche auf beiden Seiten gabelförmig sich verbinden, und den dicken Stamm der *Arteria pulmonalis f* bilden.
g, *Arteria coeliaca*, welche durch eine kurze Anastomose *h* mit der *Arteria pulmonalis* verbunden erscheint.

TAFEL V.

Fig. 1. Magen- und Darmcanal von *Mormyrus oxyrhynchus* im vollen Zustande und von natürlicher Grösse.
a, enger *Oesophagus* mit der Einmündung des *Ductus pneumaticus*.
b, Magen.
c, kleine *Pars pylorica*.
d, unansehnlicher *Fundus coecus ventriculi*.
e, *e*, Darm mit engem Anfang.
f, *f*, ungleich lange *Appendices pyloricae*.

Fig. 2. Magen desselben Thieres im zusammengezogenen Zustande, von der Seite gesehen.
a, *Oesophagus*.
b, Sehnenfleck, von welchem die die Magenränder umgreifenden Muskelbündel ausgehen, um auf der entgegengesetzten Fläche des Magens an einem gleichen Sehnenfleck zu enden.
c, Dünndarmanfang.
d, Andeutung der *Pars pylorica*.

Fig. 3. Linke Seitenansicht des Herzens von *Mormyrus oxyrhynchus*, zweimal vergrössert.
a, Ventrikel.
b, Vorkammer, zusammengefallen.
c, *Bulbus* des *Truncus branchialis communis*.
d, *Diverticulum* von der unteren Wand des *Bulbus* ausgehend.

Fig. 4. dieselbe Seitenansicht des Herzens von *Mormyrus anguillaris*.
a, *Bulbus*, mit einem stumpfen *Diverticulum b* (zweimal vergrössert).

Fig 5. Eine gleiche Ansicht des Herzens von *Mormyrus elongatus*.
Das *Diverticulum a* des *Bulbus* kegelförmig zugespitzt.

TAFEL VI.

Fig. 1. Magen von *Mormyrus anguillaris*, gefüllt, und in natürlicher Grösse.
a, weiter *Oesophagus* mit feiner Mündung des *Ductus pneumaticus* bei *b*.
b, rundlicher Magen.
c, *Pars pylorica*.
d, Dünndarmanfang.
e, *e*, kurze, und ungleich lange *Appendices pyloricae*.

Fig. 2. Zweimal vergrösserter Magen von *Carapus macrurus* mit zwei *Appendices pyloricae*.

Fig. 3. Ebenso vergrösserter Magen von *Sternarchus albifrons* mit sechs *Appendices pyloricae*.

Fig. 4. Die Gemminger'schen Knochen von *Mormyrus oxyrhynchus*.
A, das Knochenpaar am hinteren Ende der Rückenflosse, von der Seite gesehen, in natürlicher Grösse.
b, vordere Schenkel.
c, hintere kürzere Schenkel.
d, vertical stehendes Knochenplättchen, an der Verschmelzungsstelle beider Knochen, welches sich mit der Crista seiner unteren Fläche *e* an die breite Spitze des oberen Dornfortsatzes des 11. Wirbels (von rückwärts gezählt) anlegt, — mit seinem oberen Rande aber theilweise (bei *f*) mit dem oberen Ende des letzten Flossenträgers, theilweise (bei *g*) mit dem kugeligen Gelenkskopf des letzten Flossenstrahles articulirt.
B. Verschmelzungsstelle beider Knochen von oben gesehen, mit dem nach oben ragenden senkrechten Knochenplättchen.
C. Das Knochenpaar hinter der Afterflosse, ohne Verschmelzungsstelle.

Fig. 1.

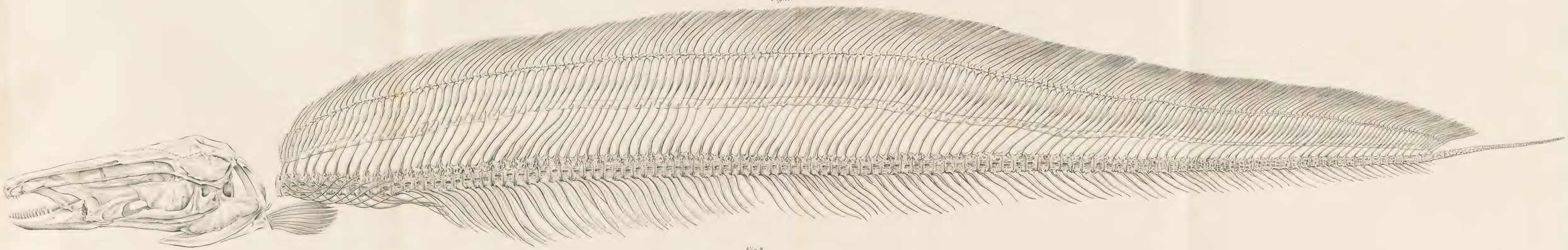
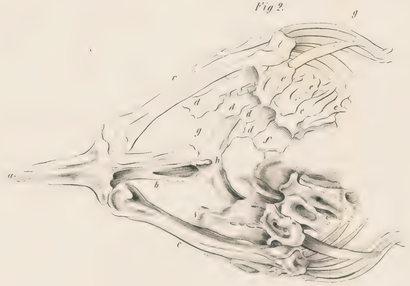
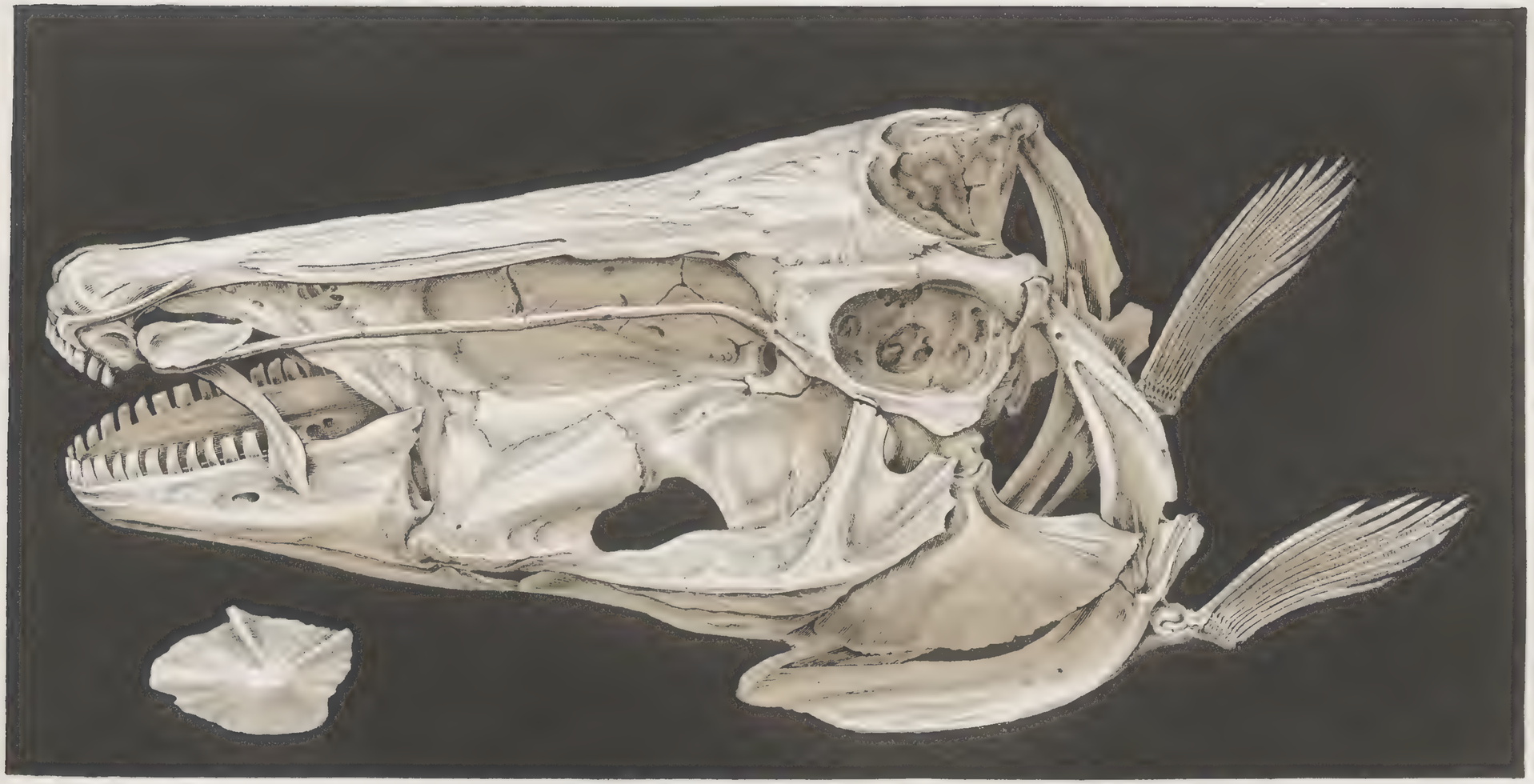


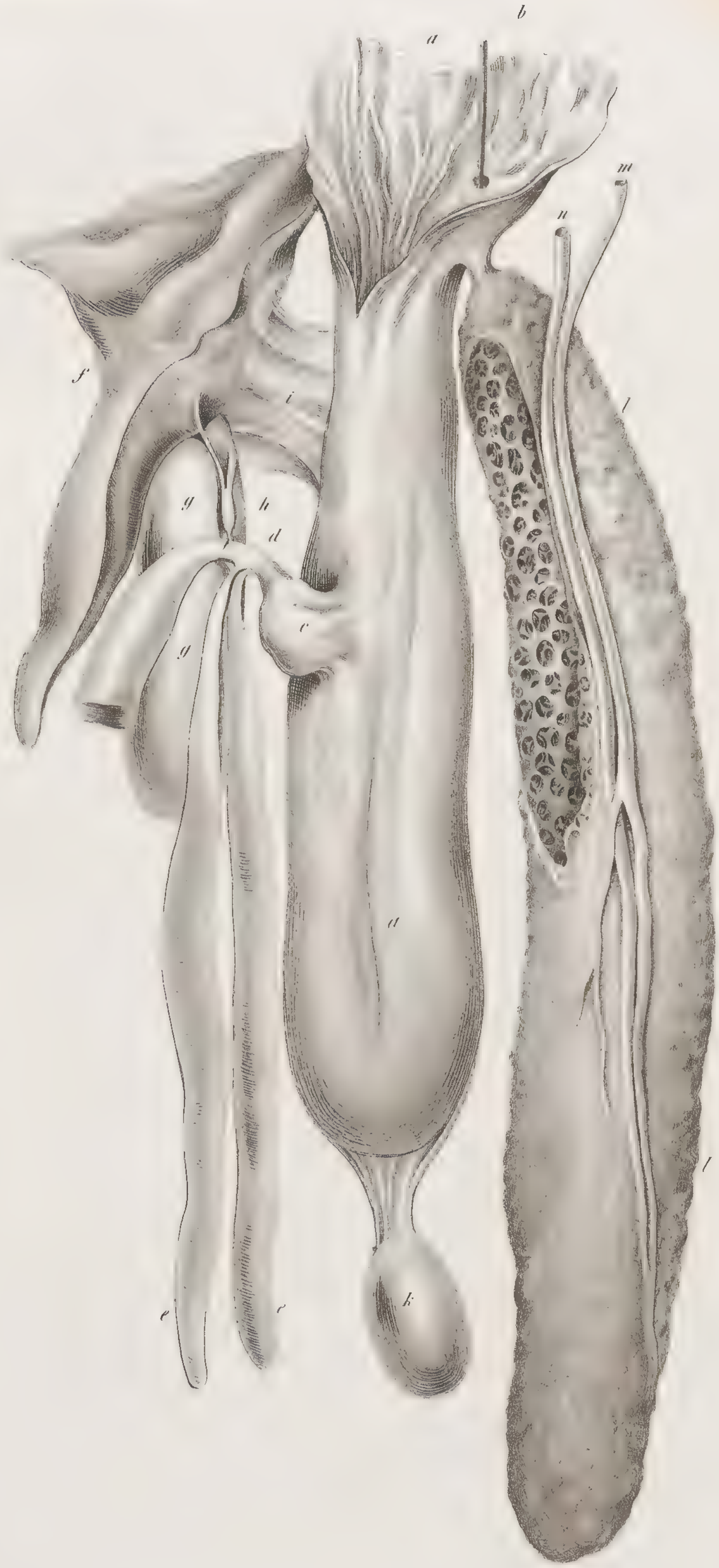
Fig. 2.



Gymnarchus niloticus Cuv.



Gymnarchus nil. Cuv.



rsdruckerei

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

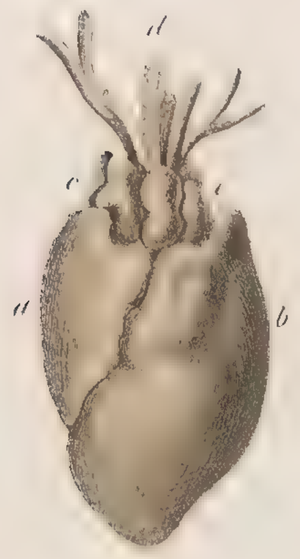


Fig. 4.

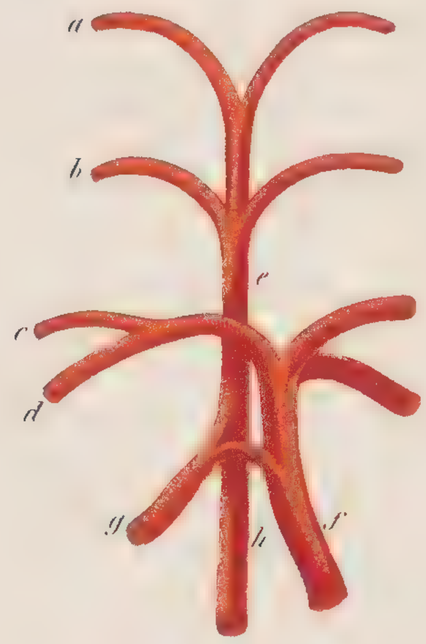


Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

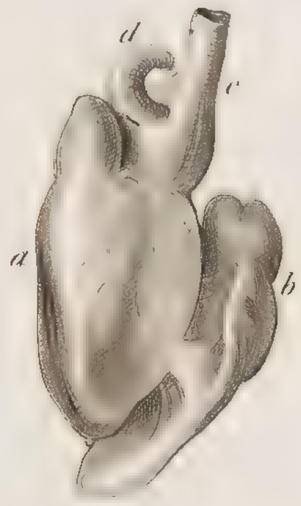


Fig. 4.

Fig. 5.

K. K. Hof- u. Staatsdruckerei

Fig. 2.

Fig. 1.

Fig. 3

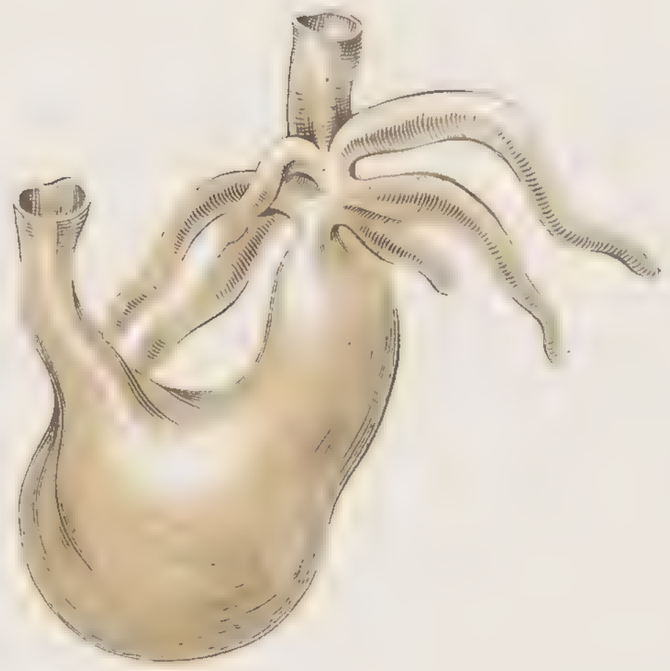
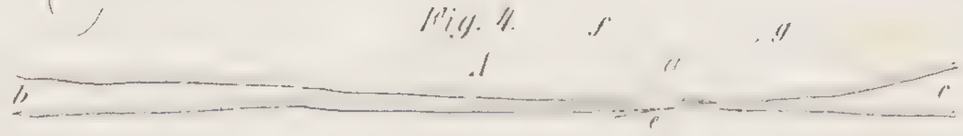


Fig. 4.



ZWANZIG ARTEN VON CEPHALOCOTYLEEN.

Von

DR. KARL MORITZ DIESING,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Mit 6 Tafeln.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 4. OCTOBER 1855.

Die Kopfsaugnapfer *(Cephalocotylea)* haben durch die noch immer schwebenden Fragen, ob die geschlechtslosen Formen dieser Ordnung einem abnormen Zustande angehören und dann aus dem Systeme zu streichen wären[1]), oder einen normalen Zustand bilden, und als Larven betrachtet, im Systeme dann zwar verbleiben, aber eine untergeordnete Stellung einnehmen würden[2]), endlich ob alle aus dem Zustande der Geschlechtslosigkeit in jenen der Geschlechtlichkeit übergehen müssen, haben die Aufmerksamkeit der Naturforscher in hohem Grade in Anspruch genommen. Die Entscheidung dieser Fragen hat zu vielen Untersuchungen Veranlassung gegeben und wir verdanken hierüber viele Beobachtungen namentlich Van Beneden[3]), welcher an der Küste von Ostende in den Jahren 1848, und 1849 vorzüglich viele Meeresfische untersuchte, und bei dieser Gelegenheit ausser seinem Hauptzwecke, dem Versuch zur Lösung obiger Fragen, auch den speciellen Theil der Helminthologie noch durch Auffindung neuer Arten sowie durch Berichtigungen über noch nicht hinlänglich bekannte Species wesentlich bereichert hat.

Die seit dem Jahre 1850 zur Öffentlichkeit gelangten neuen Arten dieser Ordnung wurden von mir bereits im Jahre 1854 in einer Abhandlung[4]), welche vorzüglich eine noch schärfere Gruppirung dieser Thiere und die Darstellung der Morphologie ihrer Sauggruben beabsichtigte, aufgeführt und es werden daher gegenwärtig nur die seitdem dazu gekommenen neuen Arten hier bei den betreffenden Gattungen in einer Randbemerkung aufgezählt werden.

---

[1]) Bei der Gattung *Caulerpa*, welche an 25 Arten zählt, und welche durch ihr oft massenhaftes Auftreten den Seeschildkröten als Futter dient, ist die Art ihrer Vermehrung bis zum Erscheinen von C. Agardh's Species Algarum im Jahre 1822 und meines Wissens bis in die gegenwärtige Zeit fraglich geblieben (vergl. C. Agardh a. a. O. I, 433 und Harvey Manual of the British Marine Algae 1849, 189) aber es ist desshalb noch keinem Algologen beigefallen, die Gattung aus dem Systeme zu streichen, um dadurch die Unwissenheit in der Beantwortung dieser Frage zu bemänteln.

[2]) Bei den Cercarieen, welchen Geschlechtsorgane fehlen, findet die Vermehrung durch Keimkörner Statt, welche sich allmählich in die neue Brut umwandeln. (Vergl. meine Revision der Cercarieen im XV. Bande der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften, Seite 377 u. d. f.)

[3]) In Mem. Acad. Belgique XXV.

[4]) In Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. Bd. XIII, 556 u. s. f.

Eine von Brullé gemachte Beobachtung, welche gleichzeitig mit meiner oben angeführten Abhandlung erschien und daher darin nicht mehr benützt werden konnte, kann ich hier, ihrer Wichtigkeit wegen, nicht mit Stillschweigen übergehen. Brullé[1]) hatte Gelegenheit, vom August bis October des Jahres 1854 vielfache Beobachtungen am Canal von Bourgogne über die im Alben *(Cyprinus Alburnus)* zu jener Zeit ausserordentlich häufig und zwar oft in einem Fisch bis zu 6 Individuen vorkommenden Riemenwürmer (*Ligula monogramma* Crepl.) zu machen.

Nach seiner Mittheilung bemerkt man sogleich längs der Mittelfurche quergestellte Beutel, deren Öffnungen ziemlich unregelmässig abwechseln. Sie bilden Blindsäcke von 2—3 Millim. Tiefe, ohne sich zu verästeln. Nur an den beiden Körperenden sind sie nicht sichtbar. Da Brullé keine Spur von Eiern darin fand, und daher von Ovarien nicht die Rede sein kann, so bezeichnete er diese Organe mit dem Namen Zeugungstaschen *(poches generatrices).* Im weiteren Verlauf seiner Untersuchungen sah er zuerst einmal aus der Mittellinie eines Exemplares 2 oder 3 lebende Junge geboren werden, die nur einige Millimetres lang waren und dem Mutterthiere glichen, nur dass der vordere Theil ihres Körpers breiter und dicker war als der entgegengesetzte. Von Mitte September an fand er jedoch alle Ligulen in Begleitung einer grösseren oder kleineren Zahl Junger in verschiedenen Altersstufen.

Nach Brullé würde daher die Ligula zweierlei Fortpflanzungsarten zeigen, eine ungeschlechtliche durch Sprösslinge in ihrem ursprünglichen Aufenthalte: der Bauchhöhle der Fische; und eine andere geschlechtliche durch Eier nach vorhergegangener Entwickelung von Geschlechtsorganen in jenen Individuen, welche aus Fischen mit der Nahrung in Vögel übertragen worden sind.

Diese Untersuchungen sind von um so höherem Interesse, da eine Vermehrung durch Sprösslinge in dieser Ordnung der Binnenwürmer bis jetzt nur bei den Gattungen der Blasenwürmer bekannt war, hier aber zuerst auch an einem geschlechtslosen Bandwurme nachgewiesen wurde.

An diese Beobachtungen scheint sich unmittelbar eine andere nicht minder wichtige von Oskar Schmidt[2]) über die geschlechtslose Fortpflanzung der *Taenia dispar* im Grasfrosch *(Rana temporaria)* anzuschliessen, welche derselbe in den Monaten August und September in der Umgegend von Magdeburg anzustellen Gelegenheit hatte.

Nach ihm bleibt *Taenia dispar* auch in der *Proglottis*-Form geschlechtslos und entwickelt die mit den 6 Häckchen bewaffneten Embryonen nicht aus Eiern, sondern aus blossen, einer Befruchtung durch Samen nicht bedürfenden Keimen. Die Embryonen der Proglottiden bauen sich nicht aus Zellen auf, sondern entstehen durch eine blosse Verdichtung einer Portion des Inhaltes einer einzigen Keimzelle[3]).

Endlich hat G. R. Wagener während seines Aufenthaltes vom Jahre 1850—1851 in Pisa und Nizza an 174 Arten und 800 Individuen verschiedener Thierclassen, meistens jedoch Fische untersucht, und die Ergebnisse in seiner Abhandlung: die Entwickelung der Cestoden nach eigenen Beobachtungen mit 22 Steindrucktafeln[4]) niedergelegt.

---

[1]) Observations sur les Ligules in Compt. rend. XXXIX (1854), 773—775 et in Institut Nr. 1086.

[2]) In Zeitschr. für die gesammten Naturwissensch., 1855, 1—13, Taf. I u. II.

[3]) Um Missverständnissen zu begegnen, wurde Oskar Schmidt's Mittheilung hier fast wörtlich wiedergegeben, und ich muss mich meinerseits gegen den Ausdruck Embryo bei einer ungeschlechtlichen Zeugung verwahren.

[4]) Im XXIV. Bande (Supplement-Bande) der Verhandlungen der k. Leop. Carol. Akademie, 1854.

ORDO CEPHALOCOTYLEA.[1]

SECTIO I. PARAMECOCOTYLEA.

SUBORDO I. APROCTA.

DIBOTHRIUM RUDOLPHI.[2]

Corpus transverse plicatum v. articulatum taeniaeforme. *Collum* depressum v. teretiusculum, aut nullum. *Caput* diversiforme, bothriis duobus oppositis marginalibus aut lateralibus. *Os* terminale. *Aperturae* genitalium in articulis posticis unilaterales, aut in utroque latere oppositae, discretae. *Penes* filiformes retractiles. — Rarius in mammalium et avium, saepissime in piscium intestinis, nec non, ast rarissime, in molluscis cephalopodis obvia.

1. ***Dibothrium decipiens.***

Tab. I. Fig. 1—7.

Caput ovato-oblongum, bothriis elongatis angustis lateralibus, limbo postice aperto. *Collum* longum tenue. *Articuli* supremi parallelepipedi, medii longissimi, posteriores subquadrati, ultimo rotundato. Longit. cap. $1^1/_2'''$, latit. $^1/_2'''$; longit. tot. ad 5′, latit. med. ad 4‴, post. 2‴.

Bothriocephalus Felis Creplin Obs. 67. Fig. 9 *(caput cum collo)*. — Gurlt: Pathol. Anatom. I. 378. — Dujardin: Hist. nat. des Helminth. 612.

Bothriocephalus maculatus Leuckart: in Wiegmann's Arch. 1848. 28. Taf. II. 4 *(mala)*.

Dibothrium decipiens Diesing: Syst. Helm. I. 588.

Habitaculum: Felis Catus dom. Martio, Gryphiae (Creplin). — F. Onça: Februario et Majo, Vindobonae (Diesing). — F. Leopardus: vere, Goettingae (Leuckart). — F. concolor: Februario, Aprili, Junio et Novembri. — F. mellivora: Februario, Aprili et Septembri. — F. Onça: Junio, Octobri et Decembri. — F. Pardalis: Martio, Aprili et Majo. — F. tigrina: Majo, Julio, Septembri et Decembri. — F. macroura: Junio; in Brasilia (Natterer) in intestinis.

Adulta *Dibothrio lato* forma et colore simillima.

Diese dem Katzengeschlechte eigenthümliche Art wurde in Europa zuerst im Februar 1822 und dann im Mai 1823 in männlichen Jaguaren, welche in der kaiserlichen Menagerie zu Schönbrunn eingegangen waren, von mir aufgefunden, aber dieser Fund nicht veröffentlicht. Am 12. März 1823 fand Creplin zu Greifswalde

---

[1]) Über den Charakter dieser Ordnung vergleiche meine Abhandlung in den Sitzungsber. d. kais. Akad. XIII. 570.

[2]) Die seit der Veröffentlichung der oben erwähnten im Jahre 1854 in den Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. erschienenen Abhandlung über die Cephalocotyleen neu hinzugekommenen Arten sind:

1. *Dibothrium (Bothriocephalus) antarcticum*, *Phocae speciei antarcticae* Baird: Cat. Entoz. Brit. Mus. 90 et in Ann. nat. hist. 2. ser. XV (1855). 76.
2. *Dibothrium Centrolophi pompilii* Wagener in Nov. Act. Nat. Cur. XXIV. 69. tab. VII. 78.

zwei junge Exemplare, vermuthlich derselben Art, in der gewöhnlichen Hauskatze, welche er im Jahre 1825 in seinen Observationibus als *Bothriocephalus Felis* beschrieb. Endlich sammelte Leuckart zu Göttingen im Frühling des Jahres 1847 aus dem Dünndarme eines Leoparden einige wahrscheinlich hierher gehörige Exemplare, über welche er 1848 im Archiv für Naturgeschichte unter dem Namen *Bothriocephalus maculatus* eine Mittheilung machte.

In grosser Menge und in allen Zuständen der Entwickelung wurde dieser Bandwurm aber von Natterer in mehreren Arten brasilianischer Katzen angetroffen und zwar:

Im Jaguar *(F. Onça)* in einem Männchen zu Caiçara am 26. December 1825, 50 Stücke;
in einem jungen Weibchen zu Matogrosso am 13. Juni 1827, 43 Stücke;
in einem Weibchen zu Nas Pitao am 5. October 1827, viele Exemplare.

Im Cuguar *(F. concolor)* in einem Männchen zu Caiçara am 19. November 1825, 14 Stücke;
in einem Männchen zu Caiçara am 6. Februar 1826, 49 Stücke;
in einem Männchen zu Caiçara am 4. April 1826, 14 Stücke;
in einem Männchen zu Registo do Jauru am 29. Juni 1827, viele Exemplare;
in einem Weibchen zu Forte do Rio branco am 3. Mai 1832, 26 Stücke.

Im Jaguarondi *(F. mellivora)* in einem Männchen zu Ypanema am 21. September 1821, mehrere Exemplare;
in einem Weibchen zu Ypanema am 23. September 1821, mehrere Stücke;
in einem Weibchen zu Caiçara am 21. April 1826, 29 Stücke;
in einem ganz jungen Männchen zu Matogrosso am 22. Februar 1829, 3 Stücke.

Im Ocelot *(F. Pardalis)* in Männchen zu Caiçara am 23. März 1826, am 17. Mai 1826 und am 14. April 1828, jedesmal mehrere Exemplare.

In der langschwänzigen Tigerkatze *(F. macroura* Nr. 43*)* in einem Männchen zu Ypanema am 28. Juni 1819, mehrere Exemplare.

Im Margay *(F. tigrina* Nr. 30 u. 44*)* in Männchen zu Ypanema am 21. Mai 1819 und am 17. September 1821, mehrere Exemplare, am 18. December 1821, 1 Stück, am 10. Juli 1822, 6 Stück, sämmtlich aus den Dünndärmen.

Die Ähnlichkeit dieser Species mit *Dibothrium latum* aus dem Menschen ist ausserordentlich gross und nur nach sorgfältiger Untersuchung konnte die Stellung der beiden Sauggruben als vollkommen unterscheidendes Merkmal festgestellt werden, welche bei *D. latum* an den Seitenrändern, bei der gegenwärtigen Art aber an den Breitseiten des Kopfes liegen.

2. ***Dibothrium serratum.***

Tab. I. Fig. 8—13.

Caput lineare, apice rotundatum, bothriis longis angustis lateralibus. *Collum* breve filiforme. *Articuli* supremi brevissimi, subsequentes triplo latiores quam longi, cuneati, angulis posticis prominentibus, ultimo rotundato. Long. cap. 1‴, lat. ¼‴; longit. corp. 1½′, longit. art. ad 1‴, latit. max. 3‴.

Bothriocephalus latus Siebold? nec Bremser: in Wiegmann's Arch. 1838. II. 305.
Dibothrium serratum Dies.: Syst. Helm. I. 588.

Habitaculum: Canis Azarae: in intestinis tenuibus, Octobri et Novembri; in Brasilia (Natterer). — C. familiaris pomeranus: fragmenta deposita accepit Siebold.

Zu Barra do Rio Jauru am 8. October 1825, 22, und zu Caiçara am 17. November 1825 noch einige Individuen im Dünndarme weiblicher Exemplare des *Lobinho do Campo (Canis Azarae* Nr. 45*)* gefunden. Ob der von Siebold in Wiegmann's Arch. 1838. II. 305 angeführte, zu Braunsberg in Ostpreussen einem kleinen weissen Spitzhunde abgegangene, für *Bothriocephalus latus* gehaltene Wurm hierher gehöre, muss bei der Unvollständigkeit der Mittheilung unentschieden bleiben.

3. ***Dibothrium hians.***

Tab. II. Fig. 1—20.

Caput ovale, bothriis ovalibus hiantibus lateralibus. *Collum* nullum. *Articuli* superiores brevissimi, subsequentes parallelepipedi. Longit. cap. 2‴, lat. $1^1/_2$‴; longit. tot. 1—$1^1/_2$′, lat. retr. $3^1/_2$—4‴.

Bothriocephalus Phocae foetidae Creplin? Obs. 68. — Dujardin: Hist. nat. des Helminth. 613.
Bothriocephalus tetrapterus Siebold? in ej. Lehrb. der vergl. Anatom. I. Abth. 120. Anm. 2.
Dibothrium hians Dies.: Syst. Helm. I. 588.

Habitaculum: Phoca Monachus, Septembri, Vindobonae, copiose (Diesing). — Ph. hispida (fragmentum absque capite), Gryphiae (Schilling). — Ph. barbata, Februario, in Islandia (Thienemann): in ventriculo et intestinis tenuibus.

Dieser Bandwurm, welcher im Darmcanale von Seehunden lebt, wurde einmal von mir im September des Jahres 1821 aus einer männlichen Mönchsrobbe *(Ph. Monachus)*, welche in einer wandernden Menagerie eingegangen war, in Menge und zwar grösstentheils aus dem Magen um ein Stück Kork gewunden zugleich mit *Ascaris osculata* gesammelt. Friedrich August Thienemann fand dieselbe Art auf seiner in den Jahren 1820 und 1821 unternommenen Reise nach Island im Kamp-Selr *(Ph. barbata)* zu wiederholten Malen, welche Ausbeute im Jahre 1846 der kaiserlichen Sammlung überlassen worden ist. Wahrscheinlich gehört auch der von Creplin in seinem Observationibus 1825 als *Bothriocephalus Phocae foetidae* erwähnte kopflose Wurm hierher.

4. ***Dibothrium Folium.***

Tab. II. Fig. 21—24.

Caput latissimum, obcompressum, subtriangulare, obsolete quinquelobum, medio sulco longitudinali, bothriis linearibus, marginibus undulatis, in capite marginalibus, spectato corpore lateralibus. *Collum* nullum. *Articuli* supremi brevissimi angusti, subsequentes subquadrati. Longit. cap. $1^1/_4$‴, latit. 1‴; longit. corp. ad $1^1/_2$″, latit. ultra 1‴.

Dibothrium Folium Dies.: Syst. Helm. I. 589.

Habitaculum: Herpestes leucurus: in intestinis; in regno Sennaar (Kotschy).

Von dieser ausgezeichneten Art wurden nur sehr wenige Exemplare von Theodor Kotschy im November 1837 im Sennaar aus dem weissschwänzigen Ichneumon oder Nims gesammelt.

TETRABOTHRIUM[1]) Rudolphi char. aucto.

Corpus elongatum articulatum depressum vel teretiusculum. *Caput* corpore continuum vel collo discretum, diversiforme, bothriis quatuor oppositis, lateralibus vel marginalibus, facie aut basi sua capiti adnatis. *Os* terminale. *Aperturae genitales* marginales v. laterales v. utrisque locis simul. *Penes* filiformes retractiles. — In mammalium, avium et piscium marinorum intestinis.

---

[1]) Neu hinzugekommene Arten: 1. *Tetrabothrium (Phyllobothrium) gracile Torpedinis marmoratae* Wedl: in Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wissensch. XVI. 373. Taf. I[a]. 3 A—C. 2. *Tetrabothrium Carchariae Rondeletii* Wagener in Nov. Act. Nat. Cur. XXV. 84. Tab. XXI. 266—268. Tab. XXII. 269—273.

1. *Tetrabothrium (Eutetrabothrium) heteroclinum.*

Tab. II. Fig. 25—37.

Caput clavatum, bothriis lateralibus oblongis prominulis, limbo tumidulis, antrorsum convergentibus, pagina sua capiti adnatis. *Collum* breve. *Articuli* depressi, supremi parallelepipedi brevissimi, medii longissimi, ultimi breviores subquadrati. *Aperturae* genitalium masculae laterales, penibus filiformibus, femineae marginales, acetabulo exiguo orbiculari submarginali pone aperturam vaginalem in latere aperturis masculis opposito. Longit. 2—9½″; latit. 2‴.

Tetrabothrium heteroclinum Dies.: Syst. Helm. I. 600.
Tetrabothrium (Eutetrabothrium) heteroclinum Idem: in Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. XIII. 580.

Habitaculum: Procellaria capensis: in intestinis; in Brasilia (Natterer).

Von Natterer am Bord der Brigantine Henriquez, Höhe der Insel S. Sebastião aus dem capischen Sturmvogel gesammelt. Diese Art, welche sich vor allen übrigen dieser Gattung durch einen kleinen Saugnapf, welcher auf der, den männlichen Geschlechtsöffnungen entgegengesetzten Fläche der hinteren Körperglieder gegen den Seitenrand zu liegt, auszeichnet, dürfte in der Folge eine besondere Untergattung bilden, die man mit dem Namen *Amphoterocotyle* bezeichnen könnte.

Die eigenthümliche Lage der Geschlechtsorgane, von welchen die männlichen in der Mittellinie, die weiblichen aber am Seitenrande des Körpers liegen, hat die Wahl des Arten-Namens veranlasst.

2. *Tetrabothrium (Eutetrabothrium) emarginatum.*

Tab. III. Fig. 1—8.

Caput subglobosum, bothriis lateralibus ovalibus auriculaeformibus antice et postice fornicatis, pagina sua capiti adnatis. *Collum* nullum. *Articuli* depressi brevissimi imbricati, marginibus posticis medio emarginatis. *Aperturae* genitalium masculae marginales, femineae…. (laterales?). *Penes* longissimi filiformes basi incrassati. Longit. 2″; latit. ¾‴.

Tetrabothrium emarginatum Dies.: Syst. Helm. I. 600.
Tetrabothrium (Eutetrabothrium) emarginatum Idem: in Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. XIII. 580.

Habitaculum: Phractocephalus hemiliopterus: in intestinis Junio, in Brasilia (Natterer).

Zu Matogrosso am 13. Juni 1828 im Darmcanale des Pirarara aufgefunden.

SOLENOPHORUS Creplin char. reform.[1])

Corpus utplurimum brevissime articulatum, taeniaeforme. *Collum* breve v. nullum. *Caput* incrassatum, bothriis duobus oppositis marginalibus vel lateralibus, singulo marginibus suis lateralibus intime concretis, antice, interdum et simul postice pervio. *Os* terminale. *Aperturae* genitalium in articulis posticis laterales. — In intestinis amphibiorum tropicorum praeprimis orbis veteris.

---

[1]) Neu hinzugekommene Art ist: *Solenophorus obovatus*, eine von Professor Molin in Padua gesammelte und der kais. Sammlung als Geschenk mitgetheilte Art, deren Bekanntmachung sich der Entdecker vorbehalten hat. Als Fundort gibt derselbe *Boa Constrictor* an; da jedoch alle bisher aus Schlangen bekannt gewordenen Arten von *Solenophorus* nur Thieren der alten Welt angehören, und die zahlreichen von Natterer untersuchten Exemplare der amerikanischen *Boa Constrictor* keine derartige Ausbeute gaben, so dürfte wahrscheinlich eine Verwechslung in der Bestimmung der von Molin untersuchten Riesenschlange vorgegangen sein.

Solenophorus ovatus.

Tab. III. Fig. 9—13.

Caput bothriis lateralibus, ovalibus. *Collum* nullum. *Articuli* supremi brevissimi, subsequentes imbricato-perfoliati. Longit. capit. $1^1/_2'''$; latit. $2'''$; longit. corp. $6''$—$1'$; latit. ad $5'''$.

Solenophorus ovatus Dies.: Syst. Helm. I. 596. — Idem: in Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. XIII. 588.

Habitaculum: Constrictor hieroglyphicus: in intestinis; in regno Sennaar (Kotschy).

Im Jahre 1837 von Theodor Kotschy im Sennaar aus dem Darme der Assala-Schlange in vielen Exemplaren gesammelt.

ANTHOCEPHALUS Rudolphi.

Corpus depressum taeniaeforme continuum, antice collo tubuloso, postice receptaculo magno basilari terminatum. *Caput* bothriis duobus oblique oppositis. *Proboscides* terebratoriae quatuor terminales, oppositae, uncinatae. *Os* inter proboscides terminale. — Piscium marinorum regionum calidiorum et tropicarum incolae; excepto tractu intestinali, organa varia infestantia.

Anthocephalus giganteus.

Tab. III. Fig. 14—27.

Receptaculum conicum maximum. *Collum* corpore longius et crassius. *Bothria* obcordata. *Proboscides* capite longiores. Longit. total. ad $3''$; probosc. cum capite $2'''$; crassit. probosc. $^1/_8'''$; longit. coll. 10—$13'''$, crassit. $1^1/_4'''$; longit. corp. 3—$4'''$, latit. $1'''$; longit. recept. 10—$12'''$, crassit. 4—$6'''$.

Vasa longitudinalia duo e corpore exorta, utrumque ad colli basin bifida, cruribus cum illo parallelis superne anastomosantibus. Receptaculum maximum, pro parte granuloso-parenchymatosum. Proboscides filiformes armatae; singulae retractore longo, filiformi, inermi, laxe spirali, luteo instructae; retractores una extremitate in proboscidis apice terminati, altera in pedicellum cylindraceum, versus colli tubulosi basin affixum, incrassati, singuli tubulo membranaceo transparente inclusi.

Anthocephalus giganteus Dies.: Syst. Helm. I. 562.

Habitaculum: Chorinemus saliens: iu cavo frontali, Martio; in Brasilia (Natterer).

Von Natterer im Monate März 1835 zu Praia do Cajutuba im Kopfe des *Scombes Haren (Ch. saliens)* unter der Stirnhaut in wenigen Exemplaren aufgefunden. Diese lagen nahe an einander, ohne in eine Kapsel eingehüllt zu sein.

PTEROBOTHRIUM Diesing.

Corpus elongatum continuum, depressum vel teretiusculum. *Receptaculum* collum a corpore discernens. *Collum* longum tubulosum cum capite in receptaculum retractile. *Caput* tetragonum, bothriis quatuor terminalibus cruciatim dispositis, ovalibus, convexiusculis, basi membrana junctis. *Proboscides* terebratoriae quatuor, singulae longitudinaliter bothria medio percurrentes,

apice excurrentes, longissimae, spiraliter armatae. *Os* terminale ad basim bothriorum. In superficie viscerum piscium marinorum, ad hepar, vesicam natatoriam; saepe folliculo solitarie inclusa.

1. ***Pterobothrium crassicolle.***

Tab. IV. Fig. 1—12.

Corpus longissimum subcylindricum. *Receptaculum* ellipticum. *Collum* tubulosum basi incrassatum. *Proboscides* uncinis discretis munitae. Longit. tot. ad $4^1/_2''$; probosc. $1^1/_2'''$; recept. $2'''$; corp. $2''$ et $8'''$.

Pterobothrium crassicolle Dies.: Syst. Helm. I. 564.

Habitaculum: Pimelodus n. sp. Nr. 84 (erronee: *Erythrinus unitaeniatus*): extus ad intestina intra folliculum, Januario, in Brasilia (Natterer).

Zu Parà am 15. Jänner 1835 in Kapseln aussen auf den Häuten des Darmcanales eines weiblichen *Gorijuba* (Nr. 84) und darauf zu Praia de Cajutuba in mehreren Exemplaren desselben Fisches am selben Organe gefunden.

2. ***Pterobothrium interruptum.***

Tab. IV. Fig. 13—15.

Corpus ovato-lanceolatum depressum, a receptaculo processu brevi filiformi discretum. *Receptaculum* subquadratum. *Collum* longum basi incrassatum. *Proboscides* uncinis discretis armatae. Longit. tot. $^1/_3$—$^1/_2''$; probosc. $^3/_4'''$; coll. $1'''$; recept. $^1/_2'''$; corporis vix $3'''$.

Anthocephalus interruptus Rudolphi: Synops. 178 et 543. — Dujardin: Hist. nat. des Helminth. 548.
Pterobothrium interruptum Dies.: Syst. Helm. I. 565. — Idem: in Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. XIII. 590.
Tetrarhynchus strumosus Siebold: in Zeitschr. für wissensch. Zool. II. 238 *(partim)*.

Habitaculum: Trichiurus lepturus: ad hepatis et intestinorum superficiem, intra folliculum, Octobri; in Brasilia (Olfers).

Die Abbildung dieser Art ist nach einem der in dem königlichen Museum zu Berlin aufbewahrten, von Legationsrath von Olfers gesammelten Originalexemplare, welches vom geheimen Medicinalrathe Lichtenstein gefälligst zur Benützung hieher mitgetheilt worden ist, angefertigt.

RHYNCHOBOTHRIUM Rudolphi.[1])

Corpus depressum taeniaeforme articulatum. *Collum* tubulosum. *Caput* collo continuum bothriis duobus oppositis parallelis aut apice convergentibus, lateralibus vel marginalibus. *Proboscides* terebratoriae quatuor terminales filiformes armatae retractiles capite longiores. *Os* terminale. Organa genitalia externa in articulis posterioribus prominula. — In Piscium marinorum tractu intestinali, rarius in organis aliis obvia.

Rhynchobothrium Caryophyllum.

Tab. IV. Fig. 16—20.

Caput bothriis suborbicularibus lateralibus antice convergentibus limbo elevato. *Collum* cyathiforme. *Corpus* subaequale lineare. *Articuli* supremi breves, medii subquadrati, ultimi

---

[1]) Neu hinzugekommene Art: *Rhynchobothrium tenue Myliobatis Aquilae* Wedl: in Sitzungsb. der kais. Akad. d. Wissensch. XVI. 377. Taf. I[a]. 10 *A—D.*

triplo longiores quam lati. *Aperturae* genitalium .... Longit. capit. et colli 2‴; corp. ultra 3″, latit. 1‴.

Rhynchobothrium Caryophyllum Dies.: Syst. Helm. I. 572.

Habitaculum: Prionodon leucas: in ventriculo — Scoliodon Lalandii: in intestinis, Februario; in Brasilia (Natterer).

Diese ausgezeichnete Art ist von Natterer nur zweimal und zwar einmal am Rio Muria den 16. Februar 1835 aus dem Darmcanale eines Weibchens des *Caçao (Scoliodon Lalandii)* in etwa 30 und das andere Mal zu Pará, kurz vor seiner Flucht, aus dem Magen eines männlichen *Prionodon leucas* in 7 Exemplaren gesammelt worden.

SUBORDO II. PROCTUCHA.

PENTASTOMUM Rudolphi.[1])

Corpus elongatum depressum v. teretiusculum, laeve v. transverse annulato-plicatum, annulis integris v. fimbriatis. *Caput* corpore continuum, ore antico, inter bothria utrinque duo angusta rimaeformia uniserialia, hamulum simplicem vel compositum retractilem vaginantia, sito. *Penis* filiformis simplex infra os. *Apertura* feminea in apice caudali. — In mammalium, amphibiorum et piscium, praeprimis Americae tropicae, organis variis, excepto tractu intestinali, folliculo inclusa v. libera.

1. *Pentastomum recurvatum.*

Tab. V. Fig. 1—5.

Corpus lanceolatum retrorsum attenuatum recurvatum, apice caudali emarginatum, ventre planiusculum, dorso convexiusculum, annulato-plicatum, marginibus crenatum. *Caput* truncatum. *Os* ellipticum inter bothria arcuatim disposita, hamulos simplices vaginantia, situm. Long. feminae 8‴—$1^1/_2$″, latit. antr. ad $1^3/_4$‴— ultra 3‴, retrors. vix $^1/_2$‴—1‴.

Pentastomum recurvatum Dies.: Syst. Helm. I. 610.

Habitaculum: Felis Onça: in sinu frontali et trachea, Septembri; in Brasilia (Natterer).

Diese Art, welche dem *P. taenioides* sehr nahe steht, und von diesem zunächst durch das stets nach der Rückenseite aufgebogene Schwanzende sich unterscheidet, wurde am 25. September 1829 zu Cochoeira do Robo do Ribeirão in einem männlichen Jaguar und zwar 6 Exemplare in den Nasenhöhlen und 4 solche am Anfange der Luftröhre gefunden.

2. *Pentastomum pusillum.*

Tab. V. Fig. 6—8.

Corpus oblongum retrorsum attenuatum, ventre planiusculo subelliptico, dorso convexiusculo, supra et subtus versus margines manifeste transverse plicatum, marginibus crenulatum. *Caput* truncatum. *Os* orbiculare inter costas duas oblique verticales retrorsum convergentes et bothria arcuatim disposita, hamulis simplicibus instructa, situm. Longit. ad $1^1/_2$‴, latit ad $^3/_4$‴.

---

[1]) An neuen Arten sind hinzugekommen: 1. *Pentastomum megacephalum Crocodili palustris* Baird.: Cat. Entoz. Brit. Mus. 39. Tab. II. 1 et in Ann. nat. hist. 2. ser. XV (1855). 73. und 2. *P. annulatum Najae Haje* Baird. Cat. 113 et Ann. l. c. 73.

Pentastomum pusillum Dies.: Icon. Helminth. Mus. Caes. ineditae.

Habitaculum primitivum ignotum; in intestina *Acarae Coscudo* cum esca translatum; in Brasilia (Natterer).

Von dieser, *P. subtriquetrum* zunächststehenden Art wurden von Natterer nur einmal am 31. August 1828 zu Matogrosso im Darmcanale eines Weibchens der grünen Acara *(Cichla* Nr. 108*)* drei Individuen gefunden, welche aus ihrem unbekannten ursprünglichen Wohnorte mit dem Frasse dorthin gekommen sein mögen.

SECTIO II. CYCLOCOTYLEA.

SUBORDO: APROCTA.

TAENIA Linné. [1])

Corpus plano-depressum taeniaeforme, rarissime teretiusculum, transverse plicatum v. articulatum. *Caput* corpore continuum v. collo discretum, subglobosum v. tetragonum, acetabulis quatuor oppositis. *Os* terminale, limbo interdum prominulo calloso, inerme v. armatum, aut in haustellum (rostellum *Auctor.*) inerme v. echinis deciduis armatum protractile. *Aperturae* genitalium marginales, rarissime laterales. — In animalium vertebratorum, praeprimis mammalium et avium tractu intestinali, rarissime in vesica fellea endoparasita.

****Arhynchotaeniae.*** Haustellum nullum. Os inerme.

1. ***Taenia fimbriata.***

Tab. V. Fig. 9—15.

Caput obtuse tetragonum magnum, acetabulis hemisphaericis angularibus. *Collum* nullum. *Corpus* antrorsum lanceolatum, articulis cuneatis brevissimis, superiorum margine postico

---

[1]) Neu hinzugekommene Arten sind:

1. *Taenia Strigis Acadicae* Leidy: in Pr. A. N. S. IX. 443 et in Proceed. Acad. Philad. VIII (1856). 46.
2. *Taenia calva Lagopodis scotici* Baird: Cat. Entoz. Brit. Mus. 83 et in Ann. nat. hist. 2. ser. XV (1855). 75.
3. *Taenia pyriformis Gallinulae Crecis* Wedl: in Sitzungsber. der kais. Akad. der Wissensch. XVIII (1855). 7. Tab. I. 4.
4. *Taenia Globulus Scolopacis Gallinulae* Wedl: ibid. 9. Tab. I. 8—9.
5. *Taenia Urceus Ibidis Falcinelli* Wedl: ibid. 13. Tab. II. 15—18.
6. *Taenia cheilancristrota brevirostris Ardeae stellaris* Wedl: ibid. 11. Tab. I. 12—13.
7. *Taenia cheilancristrota longirostris Ardeae purpureae* Wedl: ibid. 17. Tab. II. 27—30.
8. *Taenia Papilla Ardeae purpureae* Wedl: ibid. 21. Tab. III. 37—39.
9. *Taenia campylancristrota Ardeae cinereae* Wedl: ibid. 12. Tab. II. 14.
10. *Taenia macropeos Ardeae Nycticoracis* Wedl: ibid. 22. Tab. III. 40—41.
11. *Taenia omalancristrota Plataleae leucorrodiae* Wedl: ibid. 8. Tab. I. 5—7.
12. *Taenia filirostris Plataleae leucorrodiae* Wedl: ibid. 15. Tab. II. 23—26.
13. *Taenia micrancristrota Cygni atrati* Wedl: ibid. 6. Tab. I. 1—3.
14. *Taenia acanthorhyncha Podicipedis nigricollis* Wedl: ibid. 14. Tab. II. 19—22.
15. *Taenia Zederi Aptenodytis speciei antarcticae* Baird: l. s. c. 85 et 75.
16. *Taenia Bremseri Crocodili palustris* Baird: ibid. 73. Tab. II. 5 et 74.
17. *Taenia Goezii* . . . . Baird: ibid. 78 et 75.
18. *Taenia falciformis* . . . . Baird: ibid. 116 et 76.
19. *Taenia laticephala* . . . . Leidy: in Pr. A. N. S. IX. 443 et Proceed. Acad. Philad. VIII (1856). 46.
20. *Taenia pestifera* . . . . Leidy: ibid. ibid.
21. *Taenia lactea* . . . . Leidy: ibid. 444 et 46.
22. *Taenia gibbosa* . . . . Leidy: ibid. ibid.

integerrimo, subsequentium crenato, ultimorum utrinque fimbriato, fimbriis linearibus apice rotundatis. *Aperturae* genitalium . . . . Longit. 6‴—6″, latit. 1—3‴.

Articuli maturi soluti 1‴ longi, 2‴ lati, fimbriis lanceolatis.

Thysanosoma actinioides Dies.: in Med. Jahrb. d. österr. Staat., Neue Folge VII. 105—111. Taf. III (Fig. inverse delin.). — Ej. Syst. Helm. I. 501 (in nota).

Taenia fimbriata Dies.: Syst. Helm. I. 501.

Habitaculum: Cervus paludosus (dichotomus Illig.) in intestino coeco et recto, articuli ultimi maturi, solitarie, Octobri — C. rufus, Februario et Decembri — C. simplicicornis, Julio — C. Nambi, Septembri, in intestinis tenuibus; in Brasilia (Natterer).

Von dieser ausgezeichneten Art wurden von Natterer zuerst nur sieben einzelne Glieder im Blind- und Mastdarme eines Weibchens vom *Guazu-été (C. paludosus)* zu Registo do Rio Araguay am 16. October 1823 gesammelt und als neues Genus eingeschickt. Vollständige Exemplare und grössere Fragmente aber fand derselbe Forscher erst später und zwar zuerst im *Guazupita (C. rufus)* zu Cuyaba am 28. Februar 1824, 2 mit Kopf und 3 Fragmente ohne Kopf; am 18. Juli 1825 zu Nas Frechas im *Cuguaçu apara (C. simplicicornis)* 1 langes Exemplar, und endlich am 16. September 1825 zu Villa Maria aus einem *Namby (C. Nambi)* eine lange Tänie und mehrere Fragmente. Alle diese Exemplare stammten aus dem Dünndarme männlicher Thiere.

Die oben erwähnten einzelnen reifen Glieder dieser Art wurden von mir im Jahre 1834 irrthümlich als neue Gattung unter dem Namen *Thysanosoma actiniodes* beschrieben. Dieser Irrthum war damals um so verzeihlicher, als man bis dahin keine Kettenwürmer mit gefransten Hinterrändern kannte, und ich in dieser Ansicht noch mehr durch eine briefliche Mittheilung unseres gewandten und erfahrenen Sammlers Natterer aus Cidade de Cuyaba vom 19. December 1824 bestärkt wurde, welche wörtlich lautet: „Aus dem Blinddarme des *Cervus dichotomus* erhielt ich kleine sehr sonderbare Würmer, die ein neues Genus bilden müssen, selbe sehen etwas einer von der Seite zusammengedrückten Herbstblume ohne Stengel ähnlich, sie waren schon ohne Leben.“ Diese Beschreibung war von einer kleinen Federzeichnung begleitet. Erst durch die Kenntniss des später entdeckten vollkommenen Thieres ist die wahre Natur dieser einzelnen Glieder und ihre Beziehung zum Leibe der Tänie klar geworden.

2. *Taenia megastoma.*

Tab. V. Fig. 16—20.

Caput obtuse tetragonum, oris limbo amplo calloso, acetabulis hemisphaericis angularibus. *Collum* longum angustum. *Articuli* quadruplo latiores quam longi, plani, ultimi tam longi quam lati, depressiusculi. *Aperturae* genitalium marginales alternae. Long. ad 2′, latit. $2^1/_2$‴; art. ult. 1‴.

Taenia megastoma Dies.: Syst. Helm. I. 503.

Habitaculum: Cebus Caraya, Majo, Julio et Augusto — C. arachnoides, Februario et Augusto — C. cirrifer, Septembri et Decembri — C. Apella, Septembri — C. Belzebul, Julio — C. (Callithrix) caligatus, Januario — C. personatus, Decembri — Jacchus melanurus, Novembri — J. bicolor, Majo et Septembri: in intestinis tenuibus; in Brasilia (Natterer).

Diesen Kettenwurm, welcher in den Dünndärmen vieler brasilianischer Affen lebt, fand Natterer in folgenden Arten dieser Familie:

Saha, Nr. 34 *(Cebus personatus)*, ein Männchen und ein Weibchen, zu Mattodentro am 25. December 1818;
Waia possa, Nr. 171 *(C. caligatus)*, ein Weibchen, zu St. Barbara am 7. Jänner 1830, 1 Stück;
Macaco-ciria, Nr. 1 *(C. cirrifer)*, ein Weibchen, zu Villa Maria am 3. September 1825, Fragment, und ein Männchen zu Matogrosso am 11. December 1828, zwei ganze Kettenwürmer und vier Fragmente;
Simia Nr. 101 *(C. Apella)*, ein Männchen, zu Ypanema am 12. September 1821, zwei Fragmente;

Buriquin, Nr. 37 *(C. arachnoides)*, zwei Männchen, zu Ypanema am 1. August 1819, mehrere Exempl., und zu Ypanema am 14. Februar 1820;

Guariba, Nr. 104 *(C. Caraya)*, vier Männchen, zu Villa Maria am 11. und 14. August 1825, mehrere Exempl., und ein Männchen, zu Borba am 6. Mai 1830, mehrere Exempl.;

Guariba preto (C. Belzebul), ein Männchen, zu Borba am 27. Juli 1830, vier Exempl., ein Fragment;

Schwarzköpfiger Saguhi, Nr. 134 *(Jacchus bicolor)*, ein Männchen und ein Weibchen, zu Barra do Rio negro am 27. September 1830 und am 6. Mai 1833, mehrere Exempl.;

Leukeurin, Nr. 103 *(Jacchus melanurus)*, Männchen, zu Matogrosso am 10. November 1826, zwei Exempl.

3. ***Taenia tetragonocephala.***

Tab. VI. Fig. 1—5.

Caput tetragonum subquadratum, ore exiguo, acetabulis hemisphaericis angularibus. *Collum* nullum. *Articuli* depressi, supremi, angusti rugaeformes, subsequentes duplo latiores quam longi, demum latitudine decrescentes, subquadrati, angulis posticis parum exstantibus. *Aperturae* genitalium . . . . Longit. $2^1/_2'''$—$1^1/_2'$ et ultra; latit. adult. antrors. $^1/_2'''$, medio $4^1/_2'''$, retrors. $1^3/_4'''$.

Taenia tetragonocephala Bremser: in collect. Mus. Caes.

Habitaculum: Myrmecophaga bivittata, Junio et Augusto — M. jubata, Februario, Martio, Aprili et Octobri, in intestinis tenuibus; in Brasilia (Natterer).

Im zweibindigen Ameisenfresser *(M. bivittata)* fand Natterer diesen Kettenwurm zuerst am 18. Juni 1819 zu Ypanema in einem Männchen und am 11. August 1825 zu Villa Maria mehrere Exemplare mit und ohne Kopf in einem Thiere desselben Geschlechts; im Yurumi *(M. jubata)* am 28. März 1821 zu Murungaba in einem Männchen, zu Rio das Pedras am 18. April 1823, 8 Stück aus dem Dünndarme, zu Cuyaba am 9. Febr. 1824, 5 Iudividuen mit Kopf am Anfang des Dünndarmes und endlich zu Barra do Rio Jauru am 8. October 1825, 9 Stücke. Die drei letzten Funde stammten aus weiblichen Thieren.

4. ***Taenia decrescens.***

Tab. VI. Fig. 6—9.

Caput ellipsoideum apice deplanatum, ore exiguo, acetabulis lateralibus limbo subelliptico. *Collum* nullum. *Articuli* depressi, supremi angusti rugaeformes, subsequentes plus duplo latiores quam longi, retrorsum parum dilatati, demum latitudine decrescentes, subquadrati. *Aperturae* genitalium masculae marginales alternae, penibus filiformibus protractis, femineae . . . . Longit. ultra 1'; latit. antrors. $^1/_2'''$, medio $4^3/_4'''$, retrors. $2'''$.

Taenia decrescens Dies.: in collect. Mus. Caes.

Habitaculum: Dicotyles albirostris, Julio — D. torquatus, Augusto: in intestinis tenuibus; in Brasilia (Natterer).

Natterer fand zuerst Fragmente dieses Kettenwurmes in einem Weibchen des *Tagnicati (D. albirostris)* am 16. Juli 1825 zu Nas Frechas, und darauf zu Matogrosso am 22. August 1827 in einem Männchen des *Taytetu (D. torquatus)* vier lange Tänien, darunter zwei mit Köpfen und viele Fragmente aus dem Dünndarme.

Der Aufenthaltsort dieses Kettenwurmes in den brasilianischen Nabelschweinen ist um so merkwürdiger, als in den einer so nahe verwandten Gattung angehörigen europäischen Schweinen sowohl im wilden als im gezähmten Zustande weder unter den am k. k. Hof-Naturalien-Cabinete untersuchten 52 zahmen und 19 wilden Individuen, noch meines Wissens an einem anderen Orte von irgend einem Naturforscher ein solcher Kettenwurm aufgefunden worden ist. Dagegen ist der Umstand nicht weniger interessant, dass, während bei dem europäischen Schweine Blasenwürmer zu den so gewöhnlichen Erscheinungen gehören, diese in den Dicotyles-Arten von Natterer niemals aufgefunden worden sind. Werfen wir einen vergleichenden Blick auf das

Vorkommen von Binnenwürmern in diesen beiden so nahe stehenden Gattungen, so zeigt sich, dass *Echinorhynchus Gigas*, *Ascaris lumbricoides*, *Spiroptera strongylina*, *Trichocephalus crenatus* und *Sclerostomum dentatum* beiden gemein sind, während *Amphistomum giganteum*, die hier beschriebene neue *Taenia*, und je eine neue Art der Gattungen *Filaria*, *Trichosomum* und *Ascaris* den beiden Species von *Dicotyles* eigenthümlich angehören.

5. ***Taenia globiceps.***

Tab. VI. Fig. 10—14.

Caput globosum, oris limbo calloso, acetabulis lateralibus subcircularibus. *Collum* nullum. *Articuli* depressi, supremi rugaeformes, subsequentes brevissimi, plus duplo latiores quam longi, ultimi parum latiores quam longi. *Aperturae* genitalium masculae marginales secundae, penibus filiformibus, femineae . . . . Longit. 9‴—1½″, latit. ad 2‴.

Taenia globiceps Dies.: in collect. Mus. Caes.

Habitaculum: Tapirus americanus, Aprili et Augusto, in intestinis tenuibus; in Brasilia (Natterer).

Zu Ytararé am 10. August 1820 in einem Männchen und zu Barra do Rio Jaguaricatu am 8. April 1821 in einem Männchen und einem Weibchen des amerikanischen Tapirs, beide Male im Dünndarme, in vielen Exemplaren gesammelt.

6. ***Taenia macrophalla.***

Tab. VI. Fig. 15—21.

Caput rotundatum apice deplanatum, acetabulis lateralibus maximis. *Collum* nullum. *Articuli* supremi subquadrati, subsequi oblonge-quadrati, ultimo longissimo rotundato. *Aperturae* genitalium marginales. *Penes* alterni longissimi filiformes. Longit. 1—3‴, latit. ½‴.

Taenia macrophalla Dies.: Syst. Helm. I. 514.

Habitaculum: Cichla Monoculus, Julio et Octobri, in intestinis; in Brasilia (Natterer).

In zwei Weibchen der *Jacunda (C. Monoculus)* wurde diese, durch die Länge ihrer männlichen Zeugungsglieder auffallende Art zu Matogrosso am 22. October 1826 und am 30. Juli 1827 von Natterer gesammelt.

**** *Rhynchotaeniae.*** Os in haustelli protractilis apice, armatum.

7. ***Taenia Scolopendra.***

Tab. VI. Fig. 22—27.

Caput urceiforme, acetabulis lateralibus basilaribus, limbo subelliptico. *Haustellum* pyriforme, uncinorum corona simplici armatum. *Collum* nullum. *Articuli* brevissimi, angulis valde proctractis, mediorum retroversis subulatis apice truncatis. *Aperturae* genitalium . . . . Longit. ad 8‴, latit. cum angulis productis ad 2‴.

Taenia Scolopendra Dies.: Syst. Helm. I. 550.

Habitaculum: Podiceps dominicensis, Septembri et Octobri, in intestinis; in Brasilia (Natterer).

Diese durch die Form der Glieder so eigenthümliche Art bewohnt den Dàrmcanal der *Picca Barra (P. dominicensis)* und wurde daselbst zu Ypanema am 11. und 14. September 1821 in 10 Individuen beiderlei Geschlechts in vielen, und zu Caiçara am 16. October 1825 in einem Weibchen in 9 Exemplaren angetroffen.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

TAFEL I.

Fig. 1—7. *Dibothrium decipiens Felis Onçae.* 1. Natürliche Grösse; 2. Vorderende mit den Sauggruben, an zwölfmal vergrössert; 3—6. Glieder aus verschiedenen Theilen des Leibes, in verschiedenen Entwickelungsstufen; 6. zeigt deutlich den hervortretenden Penis; 7. zwei Glieder, deren eines doppelte männliche und weibliche Geschlechtstheile trägt. Sämmtlich bei viermaliger Vergrösserung.

Fig. 8—13. *Dibothrium serratum Canis Azarae.* 8. Natürliche Grösse; 9 und 10. Ansicht des Kopfendes in verschiedenen Lagen, an achtmal vergrössert; 11—13. Glieder nach ihrer fortschreitenden Entwickelung, viermal vergrössert.

TAFEL II.

Fig. 1—20. *Dibothrium hians Phocae Monachi.* 1. Natürliche Grösse; 2. gegabeltes Schwanzende, unvergrössert; 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19. Kopf mit den Sauggruben in verschiedenen Lagen und Formen, in natürlicher Grösse; 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20. dieselben Ansichten, Fig. 4 und 6 viermal, Fig. 8 dreimal, Fig. 10, 12, 14, 16, 18, 20 achtmal vergrössert.

Fig. 21—24. *Dibothrium Folium Herpestis leucuri.* 21. Thier in natürlicher Grösse; 22. blattartig verbreiterter Kopf; 23. Vorderende von oben gesehen. Die schmalen Sauggruben liegen an beiden Rändern des fast dreieckigen, zusammengedrückten Kopfes, entsprechen aber durch die Art der Anheftung des Kopfes an den Leib der breiten Seite des letztern; 24. einige Leibesglieder. Fig. 22—24 achtmal vergrössert.

Fig. 25—37. *Tetrabothrium heteroclinum Procellariae capensis.* 25 und 26. Natürliche Grösse; 27, 28, 29. Ansichten des Kopfes mit den Sauggruben, von der Breitseite des Leibes, von der Randseite und von vorne aus gesehen; 30—37. Leibesglieder auf verschiedenen Entwickelungsstufen. Die reiferen derselben zeigen auf einer ihrer Seiten den hervorgestreckten Penis, und auf der entgegengesetzten unweit der am Rande gelegenen weiblichen Geschlechtsöffnung den nur dieser Art eigenthümlichen kleinen Saugnapf. Fig. 27—37 achtmal vergrössert.

TAFEL III.

Fig. 1—8. *Tetrabothrium emarginatum Phractocephali hemiliopteri.* 1. Natürliche Grösse; 2, 3, 4. Ansichten des Kopfes in verschiedenen Stellungen mit den Sauggruben in ihren Formveränderungen; 5—8. verschieden entwickelte Glieder, sämmtlich in der Mitte ausgerandet. Das letzte zeigt den langen hervorgestreckten Penis. Sämmtlich zwölfmal vergrössert.

Fig. 9 — 13. *Solenophorus ovatus Pythonis hieroglyphici.* 9. Natürliche Grösse; 10. Vorderende von der Breitseite des Leibes gesehen. Die Ränder der Sauggrube sind ihrer ganzen Länge nach innig verwachsen, so dass das Saugorgan einen eiförmigen Körper bildet und nur vorne eine kleine Öffnung zeigt; 11. Vorderende, von einer Randseite aus gesehen, in welcher Stellung beide Saugorgane ersichtlich werden; 12. die beiden Saugorgane, von vorne dargestellt; 13. hintere Leibesglieder mit in der Mitte liegenden undeutlichen Geschlechtsöffnungen. Sämmtlich an sechsmal vergrössert.

Fig. 14—27. *Anthocephalus giganteus Chorinemi salientis.* 14. Der kegelförmige Behälter des *Anthocephalus giganteus*, vorne ausgehöhlt, und Leib, Hals und Kopf bergend, in natürlicher Grösse; 15. ein ähnlicher Behälter, aus dem jedoch Kopf, Hals und Leib in einen Knoten verschlungen hervorragen; 16. ein so verschlungener Wurm, von vorne, und 17. ohne Behälter, von der Seite gesehen, 15—17 zweimal vergrössert; 18—19. das Thier ganz ausgestreckt in natürlichr Grösse; 20, 21. Kopf mit den vier Bohrrüsseln und den beiden verkehrt herzförmigen Sauggruben, in zwei verschiedenen Lagen dargestellt, an achtmal vergrössert; 22. Vorderende eines Bohrrüssels; 23. Hinterende desselben mit dem Anfange des Streckorganes, beide Figuren an 32mal vergrössert; 24. vorderer kleiner, 25 und 26. hintere grössere und stärker gebogene Rüsselhaken, an 130mal vergrössert; 27. Kopf, Hals und Anfang des Leibes, um die innere Organisation zu zeigen, an 16mal vergrössert. Davon Kopf und Hals der Länge nach aufgeschnitten. Jeder der Bohrrüssel ist von einem fadenförmigen gelben Bewegungsorgane (Aus- und Einzieher) durchzogen, welches nach dem Austritte aus dem Rüssel den Hals in schlaffen Spiralwindungen durchläuft und sich gegen den Grund desselben in einen dort festsitzenden cylindrischen Stiel verdickt. Das ganze Organ ist bis zum Kopfende von einer durchscheinenden häutigen Röhre umgeben. An jedem Seitenrande des Leibes läuft ein Längscanal, welcher nach dem Eintritt in den Hals sich

in zwei parallele, etwas geschlängelte Äste theilt, welche stellenweise durch Quercanäle verbunden sind und gegen das Kopfende zu wieder in einander einzumünden scheinen. Gründlicher in den inneren Bau einzugehen, war bei dieser in dem Jahre 1841 gemachten Untersuchung, an Exemplaren, welche schon seit Jahren in Weingeist aufbewahrt wurden, nicht thunlich.

TAFEL IV.

Fig. 1—12. *Pterobothrium crassicolle Pimelodi Nr. 84 Gorijuba.* 1. Natürliche Grösse, Kopf und Hals sind in den Behälter zurückgezogen; 2. Behälter und Vorderende des Leibes, um die Verbindung beider zu zeigen, an sechsmal vergrössert; 3. ein vertical durchschnittener Behälter, mit dem in denselben zurückgezogenen Hals; dieser ist am unteren Ende aufgeschlitzt, um die cylindrischen Stiele am Grunde des Rüsselbewegungsorganes zu zeigen; 4. Kopf und Hals in der zusammengekrümmten Lage, in welcher sie sich im eingezogenen Zustande innerhalb des Behälters zu befinden pflegen, aus diesem herausgenommen, beide Figuren an zwölfmal vergrössert; 5. Behälter, in welchen einerseits Kopf und Hals, andererseits der Leib eingezogen sind, in natürlicher Grösse; 6. derselbe an sechsmal vergrössert; 7. das vollkommen ausgestreckte Thier in natürlicher Grösse; 8. Kopf mit den ausgestreckten Bohrrüsseln, Hals und vorderer Theil des Behälters. Am Grunde des Halses sieht man die cylindrischen Stiele, die sich an ihrer Spitze in die schraubenförmig gewundenen Bewegungsorgane der Bohrrüssel verschmächtiget fortsetzen. 9. Kopf mit den vier Sauggruben und den dieselben durchlaufenden Bohrrüsseln, von vorne; 10. Kopf von der Seite, wobei nur 2 Sauggruben sichtbar sind, und 11. Kopf ebenfalls, aber schief von der Seite in einer Stellung, welche alle vier Sauggruben mit den entsprechenden Rüsseln zeigt Fig. 8—11 an zwölfmal vergrössert; 12. Stück eines Bohrrüssels mit der Bewaffnung von einzeln stehenden Haken, über 70mal vergrössert.

Fig. 13—15. *Pterobothrium interruptum Trichiuri lepturi.* 13. Natürliche Grösse; 14. dasselbe Thier zehnmal vergrössert; 15. Kopf mit den an dem Vorderende desselben aufsitzenden, in der Mitte von den Bohrrüsseln durchzogenen Sauggruben. Die Bewaffnung der Rüssel besteht aus einzelnen Haken. Diese Figur ist über 40mal vergrössert.

Fig. 16—20. *Rhynchobothrium Caryophyllum Scoliodontis Lalandii.* 16. Natürliche Grösse; 17. der mit dem Kopf in eines verwachsene köcherförmige Hals sammt dem Anfang des Leibes, von der Randseite des Leibes gesehen; 18. die beiden nach vorne zusammenlaufenden, beinahe kreisförmigen Sauggruben mit den vier Bohrrüsseln, von vorne gesehen; Fig. 17 und 18 achtmal vergrössert; 19. Kopf und Hals sammt dem Leibesanfang mit zwei der Bohrrüssel, ihren Bewegungsorganen und deren häutigen Scheiden von der Randseite, davon der Hals der Länge nach durchschnitten; an 16mal vergrössert; 20. ein Bohrrüssel, an 30mal vergrössert, um die Anordnung der Haken zu zeigen.

TAFEL V.

Fig. 1—5. *Pentastomum recurvatum Felis Onçae.* 1. Natürliche Grösse; 2. das Thier von der Bauch- und 3. von der Rückenseite, letzteres absichtlich gerade ausgestreckt, um die ganze Rückenseite zu zeigen. Beide Figuren viermal vergrössert. 4. Kopf von der Bauchseite aus; zwischen den die einfachen Haken bergenden, in eine Bogenlinie gestellten Sauggruben liegt der elliptische Mund; 5. ausgerandetes Schwanzende. Fig. 4 acht-, Fig. 5 24mal vergrössert.

Fig. 6—8 *Pentastomum pusillum Acarae Coscudo.* 6. Natürliche Grösse; 7. Thier von der flachen, gegen die gekerbten Ränder zu quergefalteten Bauchseite aus gesehen. An dem vorne abgestutzten Kopf sieht man den kreisförmigen Mund zwischen zwei schiefgestellten, nach hinten zusammenlaufenden Leisten und die in einen Bogen gestellten schmalen Sauggruben, deren jede einen einfachen Haken enthält. 8. Dasselbe Thier von der gewölbten, gegen die gekerbten Ränder zu quergefalteten Rückenseite. Beide Figuren zwanzigmal vergrössert.

Fig. 9—15. *Taenia fimbriata Cervi simplicicornis.* 9. Natürliche Grösse; 10. Kopf von der Breitseite des Leibes mit den zwei in dieser Lage sichtbaren Saugnäpfen; 11. Kopf von vorne gesehen mit allen vier Saugnäpfen; 12—15. Glieder des Leibes, bei welchen man den Beginn und die fortschreitende Zunahme der Fransen des Hinterrandes verfolgen kann. Bei 12 ist dieser Rand noch ganz, bei 13 und 14 sieht man die Einkerbung desselben immer deutlicher werden, und bei 15 endlich sind die Randfransen vollkommen entwickelt. Alle Figuren viermal vergrössert.

Fig. 16—20. *Taenia megastoma Cebi Belzebul.* 16. Natürliche Grösse; 17. Kopf sammt dem langen schmalen Halse. An ersterem sieht man zwei der Saugnäpfe und den am Vorderende gelegenen Mund; 18. Kopf von vorne gesehen mit den vier an den Winkeln gelegenen Saugnäpfen und dem in Mitte derselben hervorragenden grossen napfförmigen Mund; 19. zwei vordere Leibesglieder; 20. drei hintere Glieder mit den am Rande befindlichen abwechselnden Geschlechtsöffnungen. Sämmtlich an zwölfmal vergrössert.

TAFEL VI.

Fig. 1—5. *Taenia tetragonocephala Myrmecophagae jubatae.* 1. Ein grosses Exemplar in natürlicher Grösse; 2. Kopf von der Breitseite des Leibes gesehen, mit den zwei in dieser Lage sichtbaren Saugnäpfen; 3. Kopf von vorne gesehen mit den vier Saugnäpfen. Der Mund erscheint nur als eine kleine Vertiefung in der Mitte. Beide Figuren zwölfmal vergrössert; 4. ein ganz junges Exemplar in natürlicher Grösse; 5. dasselbe viermal vergrössert. Seine Leibesglieder sind noch ziemlich gleichförmig.

Fig. 6—9. *Taenia decrescens Dicotyles torquati.* 6. Natürliche Grösse; 7. Kopf von der Breitseite des Leibes gesehen, mit der Mundöffnung und zwei der elliptischen Saugnäpfe, zwölfmal vergrössert; 8. ein einzelnes Glied, ungefähr aus der Mitte des Leibes, noch ohne äussere Geschlechtsorgane; 9. zwei hintere Glieder mit den abwechselnd gestellten männlichen Zeugungsgliedern. Beide Figuren sechsmal vergrössert.

Fig. 10—14. *Taenia globiceps Tapiri americani.* 10, 11. Zwei Individuen in natürlicher Grösse; 12. Kopf von der Breitseite des Leibes gesehen mit der von einem wulstigen Rande umgebenen Mundöffnung und zwei Saugnäpfen, achtmal vergrössert; 13. zwei geschlechtlich entwickelte Glieder eines andern Individuums mit den an eine Randseite gestellten männlichen Zeugungsgliedern und den in der Mitte durchscheinenden gelblichen Eierstöcken; 14. ein Hinterglied, an dem kein Penis, sondern nur der Eierstock zu sehen ist. 13 und 14 viermal vergrössert.

Fig. 15—21. *Taenia macrophalla Cichlae Monoculi.* 15. Ein junges, noch ungeschlechtliches Individuum in natürlicher Grösse; 16. dasselbe sechzehnmal vergrössert; 17. ein älteres geschlechtlich entwickeltes Exemplar mit den an den Seitenrändern hervortretenden, sehr langen männlichen Zeugungsgliedern, unvergrössert; 18. dasselbe sechzehnmal vergrössert; 19. ein noch grösseres Individuum mit zurückgezogenen Zeugungsgliedern, in natürlicher Grösse; 20. dasselbe sechzehnmal vergrössert. Man bemerkt die kleinen Erhöhungen, durch welche die Zeugungsglieder im ausgestreckten Zustande hervortreten, ferner sieht man in der hinteren Hälfte des Leibes zwei Längsgefässe durchscheinen, welche sich am Schwanzende vereinen; 21. ein einzelnes Glied mit hervortretendem Penis, 32mal vergrössert.

Fig. 22—27. *Taenia Scolopendra Podicipedis dominicensis.* 22. Natürliche Grösse; 23. Kopf mit eingezogenem Saugrüssel, von dem nur das Vorderende mit der Hakenkrone sichtbar ist; 24. sehr verlängerter Kopf mit mehr hervorgestrecktem Saugrüssel; 25. Kopf mit völlig ausgestrecktem birnförmigen Saugrüssel. Am Grunde des Kopfes sieht man auf jeder dieser Darstellungen nur die zwei auf dieser Seite sichtbaren Saugnäpfe mit elliptischem Rande. Diese verschiedenen Individuen entnommenen Figuren sind von der Breitseite des Leibes gesehen und sechzehnmal vergrössert; 26. mittlere Glieder des Leibes mit den langen, nach hinten gerichteten pfriemenförmigen, an der Spitze abgestutzten Randfortsätzen; 27. Hinterende mit den Fortsätzen. Beide achtmal vergrösserte Figuren sind nach Fragmenten anderer Individuen gemacht.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

4
14
18
2.
25
27
24
26
29
35.
36
37

Lith.u.ged.r.d.k.k. Hof- u. Staatsdruckerei.

ERSTE ERGEBNISSE

DER

MAGNETISCHEN BEOBACHTUNGEN IN WIEN.

VON

KARL KREIL,

WIRKLICHEM MITGLIEDE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 12. JUNI 1856.

Die Beobachtungen an der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus begannen im Sommer des Jahres 1852, und es wurde mit der Bestimmung der magnetischen Elemente im Garten des Theresianums der Anfang gemacht. Diese Bestimmung wurde alle Monate, vom Juni angefangen, zu festen Tagen, nämlich am 21. und 22. vorgenommen, vom Jahre 1854 an aber am 15. und 16., um die Mittel derselben den Monatmitteln der Variationsbeobachtungen der Zeit nach mehr zu nähern. In den ersten drei Monaten wurden die Beobachtungen im Freien auf einem soliden Steinpfeiler angestellt, um welchen man im September eine eisenfreie Hütte aufführte, so dass von da an die Beobachtungen stets in dieser gemacht wurden.

Die absoluten Bestimmungen haben den doppelten Zweck, die seculäre Änderung der magnetischen Elemente zu zeigen, und die Fehler anzugeben, denen die Ablesungen an den Variations-Apparaten unterworfen sind, zu welchem Behufe man stets solche Ablesungen zugleich mit jenen Bestimmungen veranstaltet.

Es wurde Sorge getragen, die Beobachtungen stets unter möglichst gleichen Umständen auszuführen, da sonst der erste Zweck, nämlich die Auffindung der seculären Änderung, schwer zu erreichen wäre. Denn wenn, um nur von Einer Fehlerquelle zu sprechen, die sogenannten Personalgleichungen schon bei Arbeiten der praktischen Astronomie und Meteorologie, wo doch die Beobachtungsmittel entweder höchst vollendet oder sehr einfach sind, blos durch die Verschiedenheit der sinnlichen Auffassung eines Zeit- oder Raumpunktes eine so bedeutende und nachtheilige Rolle spielen, so ist dies bei den magnetischen Beobachtungen, welche nur uneigentlich so genannt werden können, und mehr in das Gebiet der Versuche gehören, in einem um so höheren Grade der Fall, als neben der Empfänglichkeit und schnellen Auffassungsgabe der Sinne auch noch die Behendigkeit und Geschicklichkeit in der Ausführung zahlloser kleiner Handgriffe und die Beachtung einer Menge von Vortheilen erfordert wird,

durch welche im Verein mit einer unermüdlichen Beharrlichkeit die Ergebnisse erst den erwünschten Grad von Verlässlichkeit gewinnen.

Aus diesem Grunde wurden diese Bestimmungen durchgehends von mir ausgeführt, nur während meiner Abwesenheit in den Monaten vom Juni bis October 1854, im September und October 1855 führte sie Herr Adjunct Fritsch, im August 1855 Herr Assistent Lukas aus, von denen auch andere Inclinations-Nadeln angewendet wurden, deren Ergebnisse als mit den übrigen nicht strenge vergleichbar, auch nicht aufgeführt sind. Überdies wurden von mir stets dieselben Tageszeiten bei den Beobachtungen eingehalten, und immer eine gleiche Anzahl von Bestimmungen gemacht, nämlich vier Messungen der Declination, von denen zwei zwischen 8^h 30′ und 9^h Morgens, zwei zwischen 1^h und 1^h 30′ Nachmittags, eben so viele Messungen der horizontalen Intensität, für welche das Mittel der hiezu verwendeten Zeit stets sehr nahe auf 1^h 15′ Nachmittags fällt, endlich drei Inclinations-Messungen zwischen 9^h 30′ und 10^h 30′ Morgens. Dass aus demselben Grunde auch jede absichtliche Änderung an den Apparaten unterblieb, braucht wohl nicht erst erwähnt zu werden.

Diese Apparate sind übrigens dieselben, welche bei der Bereisung des österreichischen Kaiserstaates verwendet wurden, nämlich ein magnetischer Reisetheodolit von Lamont (dort unter der Bezeichnung Lamont II aufgeführt) und das Inclinatorium von Repsold, von dessen vier Nadeln die vierte desswegen unberücksichtigt blieb, weil sie öfters Mechanikern als Muster in die Hand gegeben wurde, um darnach ähnliche anzufertigen. Es wird daher nicht nöthig sein, bei der Beschreibung dieser Apparate länger zu verweilen; in Beziehung auf ihre Leistungsfähigkeit aber könnte bei dem vielfachen Gebrauche, sowohl auf Reisen als auch in in ihrer jetzigen Verwendung, der Zweifel entstehen, ob sie nicht wegen unvermeidlicher Abnützung minder verlässliche Resultate geben; und obschon die Beobachtungszahlen selbst jedem geübten Auge hierüber ein gegründetes Urtheil erlauben, so erscheint es doch zweckmässig, auch noch andere Anhaltspunkte vorzubringen, aus denen man auf den Grad der Verlässlichkeit der Beobachtungen schliessen kann. Dies ist besonders bei der Intensität und der Inclination der Fall, da verschiedene Magnete und Nadeln gewöhnlich auch verschiedene Ergebnisse liefern, weniger bei der Declination, wo die tägliche Änderung, welcher die zu verschiedenen Tageszeiten angestellten Bestimmungen entsprechen müssen, selbst eine strenge Controlle bietet. Es braucht übrigens kaum bemerkt zu werden, dass die aus dieser Untersuchung hervorgehenden Zahlen, welche sich auf die Abweichungen der einzelnen Bestimmungen von ihrem Mittel stützen, nicht als die eigentlichen Beobachtungsfehler anzusehen sind, da hiebei alle jene Einflüsse ausser Acht gelassen werden, denen der Apparat in allen seinen Bestandtheilen von aussen her unterworfen ist.

Was die Intensitäts-Messungen betrifft, so ist schon aus den früheren Untersuchungen bekannt, dass die beiden Magnete, mit denen der Theodolit von Lamont ausgestattet ist, nicht dieselbe Grösse geben für den Werth der horizontalen Intensität, sondern fast immer in demselben Sinne von einander abweichen.[1]) Dieser Unterschied hat sich auch hier gezeigt, wo die Beobachtungen genau nach der von Lamont gegebenen Anleitung (in dessen „Handbuch des Erdmagnetismus“) ausgeführt worden sind, und er hätte leicht durch eine kleine Änderung der gegebenen Constanten weggebracht werden können. Da aber die Bestimmungen stets mit beiden Magneten gemacht wurden, so ist er wenigstens für die oben angegebenen Zwecke von keiner

[1]) Ortsbestimmungen im österr. Kaiserstaate, I. Bd., pag. 16, II. Bd., pag. 6, III. Bd. pag. 6.

Bedeutung, und kann dazu dienen, die Güte der Beobachtungen zu prüfen. Denn da er, so lange an den Apparaten keine Änderung vorgenommen wird, constant sein soll, und seine Verschiedenheit nur Folge der Beobachtungsfehler ist, so gibt er für diese einen Massstab ab. In der folgenden Tafel sind die Werthe desselben für die einzelnen Monate zusammengestellt, wobei zu merken ist, dass jede Zahl aus vier Bestimmungen, je zwei mit jedem Magneten, hervorgegangen ist. Das negative Zeichen bedeutet, dass Magnet I einen kleineren Werth der Intensität angibt als Magnet II. Sie sind, um die vielen Nullen zu vermeiden, in zehntausend Theilen der horizontalen Intensität ausgedrückt.

Tafel I.

Unterschiede zwischen den Intensitäts-Magneten.

Monate	1852 I—II	1853 I—II	1854 I—II	1855 I—II
Jänner	—	— 46	+ 3	— 13
Februar	—	— 8	— 15	— 27
März	—	— 35	— 26	— 16
April	—	— 31	— 39	— 16
Mai	—	— 32	— 15	— 19
Juni	— 28	— 25	+ 17	+ 4
Juli	— 18	— 38	— 48	— 22
August	— 7	— 29	— 41	— 27
September	— 49	— 28	— 43	— 20
October	— 35	— 23	— 12	— 11
November	— 34	— 24	— 8	+ 12
December	— 35	— 59	— 26	+ 9

Die mit wenigen Ausnahmen fortwährend negativen Zeichen dieser Zahlen beweisen, dass der Unterschied in der Angabe beider Magnete nicht Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden könne; auch darf man ihn nicht auf Rechnung der Temperatur-Correction setzen, denn die Sommermonate geben das Mittel . . . . . — 25
die Wintermonate hingegen . . . . . — 21, also einen kaum merklichen Unterschied.

Das Gesammtmittel ist — 22·9.

Zieht man dieses von den einzelnen Werthen ab, und behandelt die Unterschiede als Beobachtungsfehler, so wird

die Summe der Quadrate derselben . . . . . = 7812
„ „ der mittleren Fehler . . . . . = 13·6
„ „ der wahrscheinlichen Fehler . . . . . = 9·2.

Wichtiger als bei der horizontalen Intensität ist diese Untersuchung bei der Inclination, weil hier die Annehmbarkeit des Resultates in viel höherem Grade von dem unveränderten Zustande des Apparates abhängt. Die drei Nadeln, mit denen dieses Element bestimmt wurde, geben eine verschiedene Neigung an, welche nach Nadel I am grössten, nach Nadel III am kleinsten ist. Als Endergebniss wurde immer das Mittel aus allen drei Nadeln genommen, und die Zahlen der folgenden Tafel enthalten wieder die Abweichung dieses Mittels von den Angaben der einzelnen Nadeln, mit denen der Werth der Neigung auf die im 7. Jahrgange der Prager

Beobachtungen S. III angegebene Weise gefunden wurde. Das Zeichen — zeigt eine im Vergleiche mit dem Mittel zu grosse Neigung an. Die drei ersten Monate wurden weggelassen, weil der Umstand, dass damals die Beobachtungen noch in freier Luft ausgeführt werden mussten, ihrer Genauigkeit sehr hinderlich gewesen zu sein scheint. Auch die Monate Juni bis October 1854 und August bis October 1855 fehlen, wo während meiner Abwesenheit mit anderen Nadeln beobachtet wurde.

Tafel II.

Abweichungen der Angaben der einzelnen Nadeln vom Mittel.

Monat	1852			1853			1854			1855		
	Nadel			Nadel			Nadel			Nadel		
	I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.	I.	II.	III.
Jänner . . .				—5'98	—3'98	+ 9'95	—4'94	—5'06	+10'00	—3'71	—3'02	+6'72
Februar . . .				—7·54	+0·27	+ 7·27	—7·65	—1·71	+ 9·35	—5·22	—0·98	+6·21
März				—3·61	—5·86	+ 9·46	+2·75	—4·81	+ 2·06	—1·86	—4·10	+5·96
April				—5·65	—1·59	+ 7·23	—0·58	—4·08	+ 4·67	—0·98	—2·67	+3·64
Mai				—4·21	—3·08	+ 7·29	—2·19	—0·63	+ 2·81	—2·91	—6·23	+9·15
Juni				—7·13	+1·56	+ 5·56	—	—	—	—2·91	—4·04	+6·96
Juli				—6·61	—1·23	+ 7·83	—	—	—	+2·21	—8·48	+6·27
August . . .				—7·46	+0·80	+ 6·67	—	—	—	—	—	
September .	—10'73	—0'67	+11'40	—3·94	—3·38	+ 7·31	—	—	—	—	—	
October . . .	—11·17	—0·23	+11·40	—9·54	—0·04	+ 9·58	—	—	—	—	—	—
November . .	— 8·21	—2·52	+10·73	—4·88	—5·19	+10·06	+0·50	—4·31	+ 3·81	—5·12	—3·12	+8·25
December . .	— 6·04	—2·66	+ 8·70	—0·56	—5·00	+ 5·56	—2·07	—2·31	+ 4·37	—1·98	—4·17	+6·14

Diese Zahlen behalten innerhalb der Grenzen, welche Beobachtungsfehlern zugeschrieben werden können, ihre Zeichen und Grösse bei, und beweisen dadurch, dass eine bleibende Änderung im Zustande der Nadeln nicht vorgegangen sei. Die für die einzelnen Nadeln genommenen Mittelwerthe sind für Nadel I . . . . . — 4'37
„ „ II . . . . . — 2·89
„ „ III . . . . . + 7·09.

Zieht man diese von den einzelnen Zahlen ab, und behandelt die Reste als Beobachtungsfehler, so hat man die Summe der Fehlerquadrate:

für Nadel I = 355'8, für Nadel II = 161'0, für Nadel III = 185'5,

die mittleren Fehler einer Beobachtung:

für Nadel I = 3'50, für Nadel II = 2'36, für Nadel III = 2'53;

die wahrscheinlichen Fehler:

für Nadel I = 2'36, für Nadel II = 1'59, für Nadel III = 1'71.

In den folgenden Tafeln sind die Werthe enthalten, welche aus den Beobachtungen gefunden worden sind. Nach Aufstellung der Variations-Apparate für Declination und horizontale Intensität wurden an diesen, gleichzeitig mit den absoluten Bestimmungen, Ablesungen ausgeführt, durch welche die gefundenen Werthe auf irgend eine der für die Variations-Beobachtungen festgesetzten Stunden zurückgeführt, und dadurch auch der kleine Einfluss, welcher wegen der verschiedenen Zeit der absoluten Bestimmungen noch zurückblieb, aufgehoben wurde. Für die Declination wählte man die Stunden 6^h Morgens und 2^h Nachmittags, weil sie Wendestunden sind, so dass die in den Morgenstunden (zwischen $8^h\ 30'$ und 9^h) ausgeführten

Bestimmungen auf 6^h, die in den Mittagsstunden (zwischen 1^h und $1^h\ 30'$) ausgeführten auf 2^h reducirt wurden; für die horizontale Intensität 2^h Nachmittags, da die Zeit der absoluten Bestimmung nahe mit dieser Stunde zusammenfiel. Man findet daher in den folgenden Tafeln für Declination und horizontale Intensität einen doppelten Werth dieser Elemente angegeben, wovon der eine unter der Überschrift „Beob." gegebene unmittelbar aus den Beobachtungen hervorgeht, der andere aber, welcher mit „Reduc." überschrieben wurde, das Mittel der auf die fixen Stunden zurückgeführten Werthe ist. Jede Zahl ist bei der Declination und Intensität das Mittel aus vier, bei der Inclination aus drei Bestimmungen.

Tafel III.

Declination.

Monat	1852		1853		1854		1855		1856	
	Beob.	Reduc.	Beob.	Reduc.	Beob.	Reduc.	Beob.	Reduc.	Beob.	Reduc.
Jänner ...	—	—	13° 12'0	13° 14'4	13° 4'5	13° 4'1	12° 55'0	12° 55'2	12° 47'2	12° 47'4
Februar ..	—	—	13 15·3	13 15·9	13 0·9	13 0·9	12 53·4	12 54·5	12 46·0	12 46·3
März	—	—	13 13·2	13 13·7	13 4·9	13 5·2	12 53·4	12 53·6	12 45·5	12 45·9
April	—	—	13 12·5	13 13·1	13 3·7	13 3·8	12 55·3	12 55·3	12 46·7	12 46·2
Mai	—	—	13 11·1	13 9·7	13 1·1	13 2·2	12 54·5	12 54·6	12 47·2	12 48·2
Juni	13° 20'3	—	13 10·6	13 9·0	13 0·5	13 0·8	12 49·7	12 49·5	—	—
Juli	13 19·1	—	13 8·0	13 7·4	13 0·6	13 1·8	12 48·9	12 47·5	—	
August ...	13 18·7	—	13 8·6	13 8·6	12 58·4	13 1·1	12 55.1	12 53·3	—	—
September	13 19·0	13° 19'5	13 6·8	13 7·3	12 58·6	12 56·1	12 59·0	12 55·9	—	—
October ..	13 17·6	13 17·6	13 5·5	13 6·8	12 56·3	12 59·9	12 49·2	12 51·0		
November	13 13·5	13 14·5	13 5·7	13 5·4	12 55·9	12 55·7	12 48·7	12 49·1	—	—
December	13 13·8	13 13·7	13 3·8	13 3·4	12 53·8	12 53·7	12 47·8	12 46.7		
Jahr	—	—	13 9·42	13 9·56	12 59·93	13 0·44	12 52·50	12 52·18	—	—

Gesammt-Mittel = 13° 2'05.

Tafel IV.

Horizontale Intensität.

Monat	1852		1853		1854		1855		1856	
	Beob.	Reduc.	Beob.	Reduc.	Beob.	Reduc.	Beob.	Reduc.	Beob.	Reduc.
Jänner	—	—	1·9979	1·9981	1·9997	1·9998	2·0074	2·0072	2·0063	2·0065
Februar	—	—	1·9946	1·9949	1·9964	1·9966	2·0043	2·0047	2·0065	2·0067
März.....	—	—	1·9999	1·9996	1·9987	1·9974	2·0051	2·0051	2·0051	2·0054
April	—	—	1·9994	2·0000	1·9989	1·9986	2·0027	2·0030	2·0072	2·0073
Mai.....	—	—	2·0037	2·0036	1·9992	1·9998	2·0065	2·0066	2·0071	2·0066
Juni	1·9950	—	2·0017	2·0018	2·0019	2·0024	2·0047	2·0053	—	—
Juli	1·9962	—	2·0015	2·0016	2·0014	2·0015	2·0050	2·0053	—	—
August.....	1·9984	—	1·9999	2·0013	1·9999	1·9992	2·0050	2·0053	—	—
September.....	1·9915	1·9953	2·0006	2·0011	2·0000	2·0007	2·0053	2·0052	—	—
October	1·9915	1·9936	1·9990	—	2·0012	2·0016	2·0041	2·0052	—	—
November	1·9992	2·0003	1·9984	1·9989	2·0044	2·0044	2·0061	2·0061	—	—
December	1·9968	1·9968	1·9985	1·9987	2·0069	2·0069	2·0086	2·0087	—	—
Jahr	—	—	1·99962	1·99990	2·00074	2·00076	2·00540	2·00564	—	—

Gesammt-Mittel = 2·00174.

In dieser Tafel fehlt die reducirte Intensität vom October 1853, weil zu dieser Zeit der Variations-Apparat in dem neuerbauten Observationszimmer aufgestellt, und bei dieser Gelegenheit mancher Untersuchung und Abänderung unterworfen wurde. In dem Jahresmittel wurde dafür die beobachtete Intensität genommen. Von den Beobachtungen des Juli 1852 wurden nur die Werthe vom 22. aufgenommen, da die vom 21. nicht genug verlässlich zu sein schienen, woran wahrscheinlich die Aufstellung in freier Luft Schuld war.

Tafel V.

Inclination.

Monat	1852	1853	1854	1855	1856
Jänner	—	64° 16'6	64° 21'2	64° 16'6	64° 8'7
Februar	—	64 17·6	64 14·8	64 16·4	64 11·5
März	—	64 15·1	64 17·7	64 14·6	64 11·1
April	—	64 16·8	64 20·2	64 14·5	64 12·0
Mai	—	64 16·5	64 16·4	64 15·7	64 11·4
Juni	64° 24'2	64 18·1	—	64 14·2	—
Juli	64 26·1	64 17·6	—	64 14·5	—
August.....	64 16·1	64 19·4	—	—	—
September	64 20·2	64 17·9	—	—	—
October	64 20·6	64 15·5	—	—	—
November	64 16·5	64 18·5	64 14·3	64 12·0	—
December	64 17·1	64 18·9	64 15·3	64 11·6	—

Gesammt-Mittel = 64° 16'35.

In den Monaten Juni, Juli und August des Jahres 1852 that vielleicht der schon erwähnte Umstand, dass die Hütte noch nicht hergestellt war, also die Beobachtungen im Freien ausgeführt werden mussten, der Genauigkeit derselben einigen Eintrag.

Benützt man die aus den Beobachtungen hervorgegangenen Zahlen der letzten beiden Tafeln zur Berechnung der Gesammtkraft, so erhält man dafür folgende Werthe.

Tafel VI.

Gesammtkraft.

Monat	1852	1853	1854	1855	1856
Jänner	—	4·6033	4·6204	4·6213	4·6011
Februar	—	4·5984	4·5949	4·6214	4·6092
März	—	4·6036	4·6081	4·6171	4·6052
April	—	4·6074	4·6155	4·6139	4·6120
Mai	—	4·6162	4·6056	4·6247	4·6087
Juni	4·6177	4·6161	—	4·6179	—
Juli	4·6199	4·6142	—	4·6136	—
August	4·6030	4·6156	—	—	—
September	4·5984	4·6130	—	—	—
October	4·5996	4·6029	—	—	—
November	4·6011	4·6069	4·6117	4·6092	—
December	4·6023	4·6109	4·6205	4·6139	—

Gesammt-Mittel = 4·61048.

Um nun die in den Tafeln III bis VI gegebenen Zahlen für den früher ausgesprochenen Zweck zu benützen, unterziehe man zuerst die Tafel III einer genaueren Betrachtung, und man wird sogleich erkennen, dass die Abnahme der Declination auch in jedem einzelnen Jahre sehr augenfällig ist, wenn gleich manche Monate erhebliche Unregelmässigkeiten zeigen, wie dies bei Ergebnissen, welche nur aus zwei Beobachtungstagen und vier Bestimmungen abgeleitet sind, in den meisten Fällen leicht erklärt werden kann. Wirklich treten viele grössere Unregelmässigkeiten zu Zeiten ein, wo die störenden Kräfte in erhöhter Weise thätig sind, wie im Februar, im September und October 1854. Nur die Anomalie vom Juni bis October 1855 ist sowohl wegen ihrer Dauer als wegen der Art ihres Verlaufes besonders auffallend, denn sie drückte die Declination im Juli zu einem Minimum herab, und erhöhte sie zwei Monate darauf zu einem Maximum, von welchem sie dann desto rascher herabsinkt. Dieser Verlauf zu einer Jahreszeit, wo die Störungen gewöhnlich seltener eintreten, nämlich in den Sommermonaten Juni, Juli und August, kann wenigstens nicht angenommen werden, ohne auch noch von anderer Seite her eine Bestätigung zu erlangen. Derlei Störungen sind in der Regel schnell vorübergehend, und äussern sich nicht in einem Elemente allein, sondern gleichzeitig auch in der horizontalen Intensität und Inclination. Nun zeigen aber die Tafeln IV und V gerade in diesen Monaten eine Übereinstimmung der Zahlen unter sich, wie sie in früheren gleich langen Perioden nicht vorkömmt, sie deuten also durchaus auf keine grösseren und andauernden Störungen hin.

Um noch sicherer zu gehen, kann man auch die Ablesungen an den Variations-Apparaten zu Rathe ziehen, welche gleichzeitig mit den absoluten Bestimmungen ausgeführt worden sind. Vereinigt man die am 15. und 16. eines jeden Monates, um 18^h und 2^h gemachten Ablesungen in ein Mittel, so findet man in Scalentheilen

für Mai	206·11,
„ Juni	199·54,
„ Juli	200·82,
„ August	198·02,
„ September	196·00.
„ October	191·63.

Hier zeigt sich zwischen den Monaten Mai und Juni dieselbe rasche Abnahme, wie bei den absoluten Bestimmungen, und sie wird, wenn man sie mit dem Werthe eines Scalentheiles (0!763) in Bogenminuten verwandelt,

$$= 5!01$$

also fast genau so gross als die der Tafel III. Das Wachsen der Declination in den Monaten August und September wird aber von den Ablesungen am Variations-Apparate nicht bestätigt, daher es am gerathensten sein wird, die Zahlen dieser zwei Monate in der Tafel III nicht zu berücksichtigen.

Die seculäre Änderung der Declination wird man am genauesten zu erkennen im Stande sein, wenn man aus Tafel III die Unterschiede der reducirten Zahlen sucht, welche in zwei auf einander folgenden Jahren zu den gleichnamigen Monaten gehören. In den drei ersten Monaten, wo noch keine reducirten Zahlen vorhanden sind, wurden die beobachteten genommen. Die folgende Tafel enthält diese Unterschiede:

Tafel VII.

Jährliche Änderung der Declination.

Monat	1852—53	1853—54	1854—55	1855—56
Jänner	—	10'3	8'9	7'8
Februar	—	15·0	6·4	8·2
März	—	8·5	11·6	7·7
April	—	9·3	8·5	9·1
Mai	—	7·5	7·6	6·4
Juni	9'7	8·2	11·3	—
Juli	11·1	5·6	14·3	—
August	10·1	7·5	—	—
September	12·2	11·2	—	—
October	10·8	6·9	8·9	—
November	9·1	9·7	6·6	—
December	10·3	9·7	7·0	—
Mittel	10·5	9·1	9·1	7·8

Das Mittel aller Zahlen dieser Tafel ist . . . . . = 9'15,

welche Grösse als die jährliche Abnahme der Declination in der vierjährigen Periode von 1852·5 bis 1856·5 angesehen werden kann.

Dass diese Abnahme nicht constant, sondern wahrscheinlich noch im Wachsen begriffen ist, beweist die Vergleichung derselben mit jener, welche die Beobachtungen früherer Perioden ergeben. So findet man aus den Prager Beobachtungen vom Jahre 1840·0 bis 1850·0, oder

für 1845·0 die Jahresabnahme = 6'82 [1]),

welche mit der jetzigen, für 1854·5 giltigen verglichen, binnen

9·5 Jahren eine Änderung von 2'33,

demnach den jährlichen Wachsthum der Säcular-Änderung

gleich . . . 0'245 gibt.

Nimmt man ferner aus Tafel III das Mittel sämmtlicher darin enthaltener reducirter Beobachtungszahlen, mit Ausschluss jener von August und September 1855, wozu man für die ersten drei Monate, in denen noch keine reducirten Beobachtungen vorliegen, die unreducirten benützen kann, so wird dieses Mittel

gleich. . . . . 13° 2'0,

welche Zahl gleichfalls als die für die Mitte dieser Periode oder für 1854·5 giltige Declination in Wien anzusehen ist.

Hierdurch ist man mit den nöthigen Daten versehen, um die Gleichung für die Säcular-Änderung der Declination aufstellen zu können. Sie wird nämlich

$$D = 13^\circ\ 2'0 - 9'15\ t - 0'122\ t^2,$$

wo t die Anzahl der Jahre vor oder nach der Epoche 1854·5 anzeigt.

Da man wohl annehmen darf, dass die seculäre Änderung der Declination, kleinere Unregelmässigkeiten abgerechnet, auf einem ziemlich ausgedehnten Umkreise in gleichem Grade vor sich geht [2]), so wird man die einem anderen nicht sehr entfernten Beobachtungsorte

---

[1]) Sitzungsberichte, Bd. XII, S. 852.

[2]) S. Denkschriften, Bd. I, S. 296.

zugehörige Formel nahe genug finden, wenn man statt der Constante 13° 2'0 die gleichzeitige Declination des Beobachtungsortes setzt. So z. B. ist in Kremsmünster nach den im Jahre 1855 mitgetheilten Beobachtungen die Declination um 1° 8'55 grösser als in Wien, daher die Formel für Kremsmünster

$$D = 14° \; 10'55 - 9'15 \, t - 0'122 \, t^2.$$

Sucht man hieraus, um die Formel durch Erfahrung zu prüfen, die Declination, welche vor 30 Jahren, also im Jahre 1824·5 in Kremsmünster Statt hatte, so findet man sie

$$D = 14° \; 10'55 + 274'5 - 109'8 = 16° \; 55'3,$$

die Beobachtung gibt dafür[1]) . . . . . 17 4·1,

nahe genug übereinstimmend.

Die grösste Declination oder den Stillstand der Nadel gibt die Formel für Wien zur Zeit $t = -37{\cdot}5$, also im Jahre 1817 an.

Nach Hansteen's „Untersuchungen über den Magnetismus der Erde", Anhang, S. 3 und 15 war die Nadel

in Kopenhagen zwischen 1807 und 1813,
in Paris zwischen 1799 und 1814

stillestehend. Die Beobachtungen in Kremsmünster (Reslhuber S. 13) zeigen vom März 1813 bis Mai 1817 noch keine merkliche Abnahme.

Die Grösse der Declination zur Zeit des Stillstandes wäre nach der Formel in Wien

15° 53'5

gewesen; in Kremsmünster aber

17° 2'0,

wofür jedoch die Beobachtung an letzterem Orte

18° 4'

gibt.

Von diesem Unterschiede zwischen der Rechnung und Beobachtung zur Zeit der grössten Declination wird man allerdings einen Theil der Formel zuzuschreiben haben; es scheint jedoch, dass auch die Beobachtung einen Theil auf sich nehmen müsse, wie dies bei den unvollkommenen Apparaten der damaligen Zeit nicht zu wundern ist. Wirklich geben die Beobachtungen von Kremsmünster für die ersten zehn Jahre nach dem Stillstande, nämlich von 1815 bis 1825 eine Declinations-Abnahme von einem Grade, also eine durchschnittliche jährliche Änderung von 6 Minuten an, was ohne Zweifel viel zu gross ist, da sie nach den sechsjährigen Beobachtungen in Göttingen von 1834 bis 1840, also fast 20 Jahre später, nur 4'3 jährlich betrug[2]). Man muss daher eine sehr grosse Unregelmässigkeit im Gange der Säcular-Änderung, oder einen zu hohen Werth der Declination in Kremsmünster zur Zeit des Stillstandes annehmen.

Der nächste Durchgang des magnetischen Meridians durch den astronomischen, oder die Declination = 0 würde nach dieser Formel in Wien nach 51 Jahren, also um das Jahr 1906 eintreten.

Bei der Annahme, dass die Säcular-Änderung der Declination in einem ziemlich ausgedehnten Gebiete gleichmässig vor sich gehe, kann man demnach mittelst dieser Formel die Decli-

---

[1]) Reslhuber: Über das magnetische Observatorium in Kremsmünster, S. 15 der Separat-Abdrücke.
[2]) Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins von Gauss und Weber, 1839, pag. 108.

nation zu einer beliebigen nicht übermässig entfernten Epoche für jeden Ort finden, an welchem sie einmal bestimmt worden ist. Bei Gelegenheit der wissenschaftlichen Bereisung der österreichischen Monarchie und einiger angrenzenden Länder wurden viele solche Bestimmungen gemacht, welche man in den Sitzungsberichten Bd. XXI, 1. Hft., S. 161 u. 162 zusammengestellt findet.

Wenn man die Zahlen der Tafel III genauer betrachtet, so sieht man, dass die Abnahme der Declination keineswegs regelmässig und gleichförmig, sondern zu manchen Zeiten des Jahres rascher, zu anderen langsamer vor sich geht. Während z. B. in den Wintermonaten die Abnahme nur gering und durch viele Rückgänge unterbrochen ist, und namentlich vom December zum Jänner in allen vier Jahren stets eine Zunahme eintrat, bemerkt man in den Frühlingsmonaten vom April bis Mai und vom Mai bis Juni, so wie im Herbst vom October bis November und vom November bis December meistens eine rasche Abnahme. Vereinigt man die aus der Tafel genommenen Differenzen, welche denselben Monaten verschiedener Jahre zugehören, in ein Mittel, so findet man

vom	Jänner	bis	Februar	im	Mittel	aus	4	Jahren	die	Abnahme = 0·88
„	Februar	„	März	„	„	„	4	„	„	Zunahme = 0·22
„	März	„	April	„	„	„	4	„	„	Abnahme = 0·00
„	April	„	Mai	„	„	„	4	„	„	Abnahme = 1·30
„	Mai	„	Juni	„	„	„	3	„	„	Abnahme = 2·40
„	Juni	„	Juli	„	„	„	4	„	„	Abnahme = 0·95
„	Juli	„	August	„	„	„	3	„	„	Zunahme = 0·03
„	August	„	Septbr.	„	„	„	3	„	„	Abnahme = 2·00
„	September	„	October	„	„	„	3	„	„	Zunahme = 0·50
„	October	„	Nov.	„	„	„	4	„	„	Abnahme = 2·15
„	November	„	Dec.	„	„	„	4	„	„	Abnahme = 1·80
„	December	„	Jänner	„	„	„	4	„	„	Zunahme = 0·90.

Es ist wohl keinem Zweifel unterworfen, dass sich diese Zahlenreihe aus Beobachtungen, welche durch eine grössere Anzahl von Jahren fortgeführt sind, viel regelmässiger gestalten wird; namentlich dürften sich die von mancherlei Anomalien hervorgebrachten Zunahmen vom Juli bis August und vom September bis October noch in Abnahme verwandeln. Nichts desto weniger lässt sich auch aus den vorliegenden der Gang, dem die Säcular-Änderung im Verlaufe eines Jahres unterworfen ist, deutlich abnehmen. Bildet man nämlich aus den Zahlen, welche derselben Jahreszeit angehören, die Summe, so findet man

während des Winters, vom December bis März eine Zunahme von . . . 0·24
„ „ Frühlings, vom März bis Juni eine Abnahme von . . . . . 3·70
„ „ Sommers, vom Juni bis September eine Abnahme von . . 2·92
„ „ Herbstes, vom September bis December eine Abnahme von 3·45.

Es scheint also kaum zu zweifeln zu sein, dass die seculäre Änderung der Declination nicht das ganze Jahr hindurch gleichmässig vor sich gehe, sondern dass sie im Winter kaum merklich, vielleicht rückgängig wird; im Frühlinge und Herbste scheint sie am raschesten vorzuschreiten.

Diese Wahrnehmung wird auch von anderer Seite her bestätigt. Es geben nämlich die sechsjährigen Declinations-Beobachtungen von Göttingen, von 1834 bis 1840, welche in den

„Resultaten des magnetischen Vereines von 1836 und 1839“ aufgeführt sind, wenn man sie auf dieselbe Weise behandelt , für die Secular-Änderung der Declination

im Winter	die Abnahme	von	0!4
im Frühlinge	„	„	„	1·6
im Sommer	„	„	„	0·4
im Herbste	„	„	„	1·8

also, wie die Wiener Beobachtungen, die Änderung in den Jahreszeiten der Nachtgleichen am grössten. Die im Vergleich mit den unseren viel kleineren Zahlen rühren von dem geringeren Werthe der Jahresänderung her, welche damals nur 4′ betrug, während sie jetzt auf 9′ angewachsen ist.

Die Münchner Beobachtungen vom November 1840 bis November 1845 (Lamont: „Resultate der magnet. Beob. in München während der dreijähr. Periode 1840—41—42“ und „Resultate des magnetischen Observatoriums in München während der dreijährigen Periode 1843—44—45“) geben

im Winter	die Abnahme	von	1!20
im Frühlinge	„	„	„	1·88
im Sommer	„	„	„	2·02
im Herbste	„	„	„	1·82.

Auch hier ist demnach die Abnahme im Winter am kleinsten, jedoch zeigt sie nicht im Frühlinge und Herbste, sondern im Sommer ihren raschesten Gang, obgleich das Maximum auch hier auf die Frühlings- und Herbstmonate fällt, nämlich

vom März zum April mit	0!76
und vom August zum September mit .	0·92.

Demnach scheint sich wenigstens so viel als Thatsache herauszustellen, dass die seculäre Änderung im Winter geringer wird als zu den übrigen Jahreszeiten, was auch dem geringeren Betrage der täglichen Schwankung zur Winterszeit ganz entsprechend ist. Um zu entscheiden, ob das Minimum des Winters das einzige sei, oder ob ein zweites geringeres auch im Sommer eintrete, müssen die Beobachtungen noch durch mehr Jahre fortgesetzt werden, um so mehr, da hiezu nur solche Beobachtungen, die keiner Gefahr eines localen Einflusses unterliegen, verwendet, also Variations-Beobachtungen von Orten, wo die Apparate nicht in vollkommen eisenfreien Räumen aufgestellt sind, für diesen Zweck nicht berücksichtigt werden können.

Was die tägliche Änderung der Declination in Wien betrifft, so kann sie nur aus den Ablesungen an dem im Wohnhause aufgestellten Variations-Apparate abgenommen werden, indem es nicht thunlich war, eine mehrjährige Reihe täglich zu festgesetzten Stunden angestellter Bestimmungen im Observatorium des Theresianumgartens durchzuführen. Da aber die Eisenmassen nur aus den nächsten Umgebungen der Variations-Apparate weggebracht werden konnten, in grösserer Entfernung aber in bedeutender Menge vorhanden sind, so ist zuerst zu sehen, ob hiedurch die tägliche Änderung beirrt werde oder nicht.

Die gleichzeitig an diesen Apparaten und im Garten-Observatorium vorgenommenen Messungen haben im Mittel aus 36 Paaren von Ablesungen gezeigt, dass in den Jahren 1854

und 1855, also im neuen Aufstellungs-Locale der Variations-Instrumente diese eine Änderung von 6·80 Minuten angeben, wenn sie im Garten 7·00 Minuten beträgt. Dieser Unterschied, der aber noch durch eine grössere Reihe von Bestimmungen festgestellt werden muss, hat also auf den täglichen Gang der Declination nur einen ganz geringen Einfluss, und wird nur dort von Belang, wo es sich handelt, die Abhängigkeit der Grösse desselben von der geographischen Lage verschiedener Beobachtungsorte zu untersuchen.

Da demnach die tägliche Änderung aus den Ablesungen an dem Variations-Apparate mit Verlässlichkeit abgenommen werden kann, so wurden die Monatmittel derselben, nachdem man sie durch correspondirende Bestimmungen im Garten-Observatorium in absolute Declination verwandelt hatte, in folgender Tafel zusammengestellt.

Tafel VIII.

Monatmittel der Declination aus den Variations-Beobachtungen.

		14^h	18^h	22^h	2^h	6^h	10^h	Mittel
1852	September ..	13° 18'38	13° 17'71	13° 20'19	13 25'03	13° 18'57	13° 16'32	13° 19'37
	October	13 14·37	13 14·55	13 15·16	13 21·42	13 14·43	13 13·80	13 15·62
	November ..	13 12·61	13 13·43	13 13·40	13 17·43	13 12·99	13 10·38	13 13·37
	December ..	13 12·83	13 14·10	13 14·25	13 16·69	13 13·44	13 10·48	13 13·63
1853	Jänner	13 12·12	13 12·86	13 12·01	13 15·95	13 12·51	13 10·66	13 12·68
	Februar	13 10·21	13 11·52	13 12·22	13 15·93	13 12·86	13 10·04	13 12·13
	März	13 11·24	13 11·15	13 11·80	13 18·21	13 12·57	13 10·15	13 12·52
	April	13 9·70	13 8·07	13 9·27	13 18·06	13 11·08	13 9·02	13 10·87
	Mai	13 7·01	13 5·11	13 8·47	13 15·63	13 8·79	13 7·52	13 8·76
	Juni	13 5·15	13 2·82	13 7·08	13 14·96	13 8·64	13 6·29	13 7·49
	Juli	13 5·15	13 1·67	13 7·15	13 14·78	13 9·01	13 7·63	13 7·56
	August	13 4·87	13 2·58	13 7·09	13 13·86	13 7·62	13 6·33	13 7·06
	September ..	13 3·98	13 2·89	13 7·18	13 11·87	13 6·40	13 4·44	13 6·13
	October	13 5·86	13 5·55	13 5·62	13 11·78	13 6·01	13 4·16	13 6·49
	November ..	13 5·82	13 5·47	13 5·78	13 8·19	13 5·01	13 3·53	13 5·63
	December ..	13 2·08	13 3·45	13 3·47	13 5·24	13 2·31	13 0·39	13 2·84
	Jahr	13 6·93	13 6·09	13 8·10	13 13·72	13 8·57	13 6·68	13 8·35
1854	Jänner	13 0·09	13 0·80	13 2·27	13 3·43	12 59·71	12 58·68	13 0·83
	Februar	12 58·02	12 59·72	12 59·38	13 3·24	12 59·04	12 55·51	12 59·15
	März	12 57·93	12 58·44	12 59·12	13 4·92	12 57·71	12 57·65	12 59·30
	April	12 56·94	12 56·86	12 58·61	13 5·53	12 58·43	12 57·05	12 58·90
	Mai	12 55·90	12 54·49	12 58·05	13 3·53	12 58·99	12 56·23	12 59·47
	Juni	12 55·60	12 53·31	12 56·93	13 3·45	12 58·34	12 56·42	12 57·34
	Juli	12 57·00	12 55·08	12 58.65	13 5·58	13 0·92	12 58·57	12 59·30
	August	12 54·11	12 52·06	12 56·61	13 1·69	12 56·19	12 54·82	12 55·92
	September ..	12 57·26	12 57·30	13 0.84	13 4·22	12 59·98	12 57·68	12 59·55
	October	12 58·76	12 59·45	13 0·10	13 4·06	13 0·18	12 57·74	13 0·05
	November ..	12 55·68	12 55·66	12 56·65	13 58·43	12 56·37	12 54·73	12 56·25
	December ..	12 54·27	12 54·48	12 55·19	12 56·11	12 54·29	12 51·96	12 54·38
	Jahr	12 56·80	12 56·47	12 58·53	13 2·85	12 58·35	12 56·42	12 58·37

Jahr	Monat	14h	18h	22h	2h	6h	10h	Mittel
1855	Jänner	12° 53'70	12° 54'38	12° 53'87	12° 57'35	12° 54'44	12° 52'55	12° 54'38
	Februar	12 52·47	12 53·06	12 52·67	12 57·18	13 53·09	12 49·84	12 53·05
	März	12 51·96	12 51·57	12 52·42	12 57·93	12 52·68	12 50·86	12 52·90
	April	12 55·64	12 54·59	12 55·89	13 3·13	12 55·58	12 55·39	12 56·71
	Mai	12 50·43	12 48·61	12 52·90	12 57·86	12 52·75	12 50·51	12 52·18
	Juni	12 49·08	12 46·28	12 49·71	12 55·27	12 51·21	12 49·10	12 50·09
	Juli	12 45·73	12 44·08	12 47·15	12 53·15	12 48·88	12 46·97	12 47·71
	August	12 48·64	12 46·47	12 50·43	12 55·18	12 50·27	12 49·19	12 50·02
	September ..	12 49·65	12 49·45	12 53·60	12 56·20	12 51·24	12 50·10	12 51·72
	October	12 49·42	12 50·19	12 49·97	12 55·03	12 51·07	12 48·33	12 50·66
	November ..	12 49·00	12 49·46	12 49·86	12 52·64	12 49·16	12 47·77	12 49·66
	December ..	12 47·85	12 48·19	12 49·46	12 49·76	12 47·63	12 46·35	12 48·20
	Jahr	12 50·30	12 49·69	12 51·49	12 55·89	12 51·50	12 49·75	12 51·44

Wenn man die Zahlen dieser Tafel genauer betrachtet, so findet man in ihnen das doppelte Maximum und das doppelte Minimum, welches schon aus anderweitigen Beobachtungen[1]) bekannt ist. Das Maximum des Tages, in den ersten Nachmittagsstunden ist auch hier bei weiten das überwiegende, jenes der Nacht in manchen Monaten kaum erkennbar. Von den beiden Minimis ist jenes der Morgenstunden im Sommer, jenes der Abendstunden im Winter das vorherrschende. In dem Jahresmittel scheinen sie sich nahezu das Gleichgewicht zu halten, denn im Jahre 1854 ist das Jahresmittel um 18^h fast genau gleich dem um 10^h. Näher in die Erörterung des täglichen Ganges einzugehen, scheint nicht nöthig, weil eine solche ohnehin in der erwähnten Abhandlung vorgenommen wurde, und weil diese Beobachtungsreihe noch nicht ausgedehnt genug ist, um feinere Abweichung mit Verlässlichkeit anzugeben.

Ein Punkt jedoch muss noch genauer ins Auge gefasst werden, nämlich die Stelle, welche die hier in Betracht gezogenen Jahrgänge in der sogenannten zehnjährigen Periode einnehmen. Es haben nämlich nicht nur ältere, sondern auch die Münchner[2]) und Prager Beobachtungen[3]) gezeigt, dass die täglichen Schwankungen der Declination einer solchen Periode unterworfen sind, und dass im Jahre 1843·5 ein Minimum stattgefunden habe, woraus folgerecht auch im Jahre 1853 ein solches sich ergeben sollte.

Um nun zu untersuchen, ob dies wirklich der Fall sei, wurde aus der vorhergehenden Tafel, für jeden Monat der kleinste Werth der Declination, mag dieser nun Morgens oder Abends eingetreten sein, vom grössten abgezogen, und die Unterschiede als täglicher Gang in folgender Tafel zusammengestellt.

Tafel IX.

Täglicher Gang der Declination.

Monat	1853	1854	1855	Monat	1853	1854	1855	Monat	1853	1854	1855
Jänner	5'29	4'75	4'80	Mai	10'52	9'04	9'25	September ..	8'98	6'92	6'75
Februar	5·89	7·73	7·34	Juni	12·14	10·14	8·99	October	7·62	6·32	6·70
März	8·06	7·27	7·07	Juli	13·11	10·50	9·07	November ..	4·66	3.70	4·87
April	9·99	8·67	8·54	August	11·28	9·63	8·71	December ..	4·85	4·15	3·41
								Jahr	8·53	7·40	7·12

[1]) Denkschriften VIII. Bd., S. 96.
[2]) Lamont in Poggend. Ann. Bd. LXXXIV, S. 572.
[3]) Denkschriften VIII. Bd., S. 103.

Die Jahresmittel dieser Tafel zeigen, dass das Minimum im Jahre 1853 nicht eingetreten sei, sondern dass die Abnahme der täglichen Schwankung auch in den Jahren 1854 und 1855 noch fortgedauert habe.

Um sicherer zu sein, wurden auch in diesem Falle die Beobachtungen von Kremsmünster zu Rathe gezogen, wo die Declination dreimal des Tages, nämlich um 8^h Morgens, um 2^h und 8^h Abends aufgezeichnet wird, und hieraus für den täglichen Gang in den letzten 3 Jahren folgende Zahlen erhalten:

Tafel X.

Täglicher Gang der Declination in Kremsmünster.

Monat	1853	1854	1855
Jänner	4'47	4'11	4'39
Februar	5·60	6·77	5·24
März.....	9·07	8·28	7·77
April.....	12·30	11·59	9·62
Mai.....	11·20	12·00	8·08
Juni	11·69	10·76	8·70
Juli.....	10·67	10·93	8·87
August	9·90	9·36	8·51
September	7·39	7·16	7·84
October	6·71	5·78	7·19
November.....	3·16	3·39	4·20
December.....	3·27	2·92	2·54
Jahr	7·95	7·75	6·91

Auch diese Zahlen beweisen eine noch fortdauernde Abnahme der täglichen Schwankung der Declination, woraus gefolgert werden muss, dass die Periode, welche man die zehnjährige genannt hat, keineswegs unveränderlich diesen Zeitraum einschliesst, sondern manchmal sich auch über denselben hinaus erstrecken kann.

Wenn man nun zur Betrachtung der Tafel IV übergeht, welche die Bestimmungen der horizontalen Componente der Magnetkraft enthält, so zeigt der blosse Anblick der Zahlen, dass auch hier eine sehr merkliche jährliche Änderung stattfindet, und wenn gleich manche Monate im Vergleiche mit den gleichnamigen des vorhergehenden Jahres eine Abnahme angeben, so ist doch, wie die Jahresmittel zeigen, die Zunahme in jedem Jahrgange vorherrschend. Die vielen Ausnahmen hievon beweisen aber jedenfalls, dass diese Änderung nicht so regelmässig vor sich geht, wie bei der Declination, und die Unregelmässigkeiten gleichen sich auch in ganzen Jahrgängen nicht aus, denn während der Jahrgang 1853—1854 nur eine Zunahme von 0·00086 Theilen der Horizontalkraft andeutet, zeigt jener von 1854—1855 eine Zunahme von 0·00488.

Um eine klare Übersicht dieser jährlichen Änderungen zu gewinnen, wurden sie in eine Tafel zusammengestellt (Taf. XI), welche die Unterschiede zwischen je zwei in den gleichnamigen Monaten der auf einander folgenden Jahre erlangten Bestimmungen der Horizontalkraft enthält, und aus der Tafel IV entstanden ist, indem man die in ihr enthaltenen reducirten Zahlen eines jeden Monates von denselben Zahlen des gleichen Monates im darauf folgenden Jahre abzog. Nur wo die reducirten Zahlen fehlen, wurden die beobachteten benützt.

Tafel XI.

Jährliche Änderung der horizontalen Intensität.

Monat	1852—53	1853—54	1854—55	1855—56
Jänner	—	+0·0017	+0·0074	—0·0007
Februar	—	+0·0017	+0·0081	+0·0020
März.....	—	—0·0022	+0·0077	+0·0003
April.....	—	—0·0014	+0·0044	+0·0043
Mai.....	—	—0·0038	+0·0068	0·0000
Juni	+0·0067	+0·0006	+0·0029	—
Juli.....	+0·0079	—0·0001	+0·0038	—
August	+0·0015	—0·0021	+0·0061	—
September	+0·0058	—0·0004	+0·0045	—
October	+0·0075	+0·0022	+0·0036	—
November	—0·0014	+0·0055	+0·0017	—
December.....	+0·0019	+0·0082	+0·0018	—
Mittel	+0·0043	+0·0008	+0·0049	—

Das Mittel aller Zahlen dieser Tafel ist

0·00290,

welches als die jährliche Zunahme der Horizontalkraft in der vorliegenden Periode von der Mitte des Jahres 1852 bis zu der vom Jahre 1856 angesehen werden kann.

Die Unregelmässigkeit dieser Änderung, so wie der Mangel einer zweiten Beobachtungsreihe, welche in früherer Zeit an einem nicht sehr entfernten Orte mit genügender Verlässlichkeit durchgeführt worden wäre, machen es unmöglich, für dieses Element eine ähnliche Formel aufzustellen, wie bei der Declination (S. 46) gegeben wurde. Es bleibt dies, wenn sie überhaupt möglich ist, künftigen Jahren vorbehalten.

Um den Gang der horizontalen Intensität im Verlaufe des Jahres zu ermitteln, wurden die in Tafel IV für jeden Monat gegebenen vier Werthe in ein Mittel vereinigt, und mittelst des eben gefundenen Werthes der jährlichen Zunahme von der secularen Änderung befreit. Man findet auf diese Weise folgende Zahlen:

für	Juni	horizontale	Intensität	= 2·00112
„	Juli	„	„	= 2·00113
„	August	„	„	= 2·00100
„	September	„	„	= 2·00050
„	October	„	„	= 1·99975
„	November	„	„	= 2·00230
„	December	„	„	= 2·00263
„	Jänner	„	„	= 2·00272
„	Februar	„	„	= 2·00052
„	März	„	„	= 2·00166
„	April	„	„	= 2·00197
„	Mai	„	„	= 2·00151.

Diese Werthe zeigen in den Sommermonaten eine grosse Regelmässigkeit, in den Monaten September und October aber eine rasche Abnahme, so dass in dem letztgenannten Monate das kleinere Minimum eintritt, von welchem sich jedoch die Intensität noch rascher, nämlich schon im November, zu einer bedeutenden Höhe erhebt, und von da an bis Jänner nur wenig zunehmend in diesem Monate zu ihrem grössten Werth gelangt. Eben so rasch erfolgt schon im folgenden Monate (Februar) das zweite grössere Minimum, und hierauf das zweite kleinere Maximum im April.

Dieser Gang, namentlich das unmittelbare Aneinanderrücken der kleinsten Werthe an die grössten, oder wenigstens sehr grosse, scheint so auffallend, dass man gerechte Zweifel gegen sein wirkliches Bestehen erheben könnte, wenn nicht Gründe vorhanden wären, welche diese scheinbare Unregelmässigkeit recht gut erklären.

Aus früheren Erfahrungen[1]) hat sich nämlich ergeben, dass die magnetischen Störungen in den Monaten Februar, September und October stärker auftreten, als zu irgend einer anderen Jahreszeit, und da durch sie die horizontale Intensität verkleinert wird[2]), so findet darin das rasche Sinken ihres Werthes in den genannten Monaten seine vollständige Erklärung.

Demnach wäre der durch die vorhergehende Zusammenstellung gefundene jährliche Gang der horizontalen Intensität als die Folge zweier Ursachen anzusehen, oder könnte wenigstens dafür angesehen werden, von denen die eine die magnetischen Störungen, die andere der Inbegriff aller Einflüsse ist, welche, wie bei den anderen sowohl magnetischen als meteorologischen Erscheinungen, die regelmässigen in die Periode eines Jahres eingeschlossenen Änderungen hervorbringen. Beide von einander zu trennen, ist unter den gegenwärtigen Umständen für unsere Beobachtungsart nicht möglich, da der gesetzliche Verlauf der Störungen noch zu wenig bekannt ist, und ohne Anwendung von selbstzeichnenden Apparaten auch nicht gehörig erkannt werden kann, daher es auch nicht möglich ist, durch Wegschaffung der einen dieser beiden Ursachen die Wirkung der zweiten erkennbar darzustellen.

Der tägliche Gang der horizontalen Intensität wurde aus den Variations-Beobachtungen entnommen, die in der folgenden Tafel zusammengestellt sind, von welcher nur zu merken ist, dass die Mittel des Octobers 1853 blos die ersten zwölf Tage des Monats begreifen, da wegen der in der zweiten Hälfte desselben erfolgten Übertragung der Apparate in das neue Observations-Zimmer die Beobachtungen fehlen.

Tafel XII.

Monat-Mittel der horizontalen Intensität aus den Variations-Beobachtungen.

Jahr	Monat	14^h	18^h	22^h	2^h	6^h	10^h	Mittel
1852	September ..	1·99801	1·99739	1·99501	1·99712	1·99792	1·99869	1·99736
	October	1·99464	1·99464	1·99179	1·99382	1·99464	1·99505	1·99410
	November ..	2·00023	2·00052	1·99847	1·99925	1·99980	1·99979	1·99968
	December...	1·99602	1·99607	1·99553	1·99485	1·99552	1·99601	1·99567

[1]) Denkschriften der Wiener Akademie, VII. Bd., S. 108.
[2]) Magnetische und meteorol. Beob chtungen zu Prag, II. Jahrg., S. 28.

Jahr	Monat	14^h	18^h	22^h	2^h	6^h	10^h	Mittel
1853	Jänner	1·99929	1·99972	1·99878	1·99818	1·99900	1·99903	1·99900
	Februar	1·99659	1·99692	1·99582	1·99573	1·99599	1·99637	1·99624
	März	2·00153	2·00120	1·99948	2·00028	2·00064	2·00197	2·00085
	April	2·00116	2·00096	1·99872	2·00038	2·00153	2·00136	2·00069
	Mai.....	2·00101	1·99980	1·99899	2·00109	2·00163	2·00162	2·00069
	Juni	2·00227	2·00136	1·99956	2·00217	2·00274	2·00351	2·00193
	Juli.....	2·00014	1·99932	1·99782	2·00014	2·00125	2·00174	2·00007
	August	1·99943	1·99880	1·99754	1·99976	2·00043	2·00072	1·99945
	September ..	2·00105	2·00026	1·99832	2·00050	2·00102	2·00170	2·00047
	October	1·99928	1·99957	1·99742	1·99896	1·99947	1·99974	1·99908
	November ..	2·00082	2·00109	2·00037	2·00025	2·00069	2·00093	2·00069
	December...	1·99734	1·99762	1·99693	1·99655	1·99678	1·99683	1·99702
	Jahr.....	1·99999	1·99972	1·99831	1·99950	2·00010	2·00046	1·99968
1854	Jänner	1·99986	2·00021	1·99957	1·99917	1·99954	2·00015	1·99975
	Februar	1·99666	1·99707	1·99629	1·99602	1·99613	1·99655	1·99645
	März.....	1·99900	1·99912	1·99794	1·99833	1·99874	1·99896	1·99868
	April	1·99951	1·99942	1·99783	1·99849	1·99876	1·99939	1·99890
	Mai.....	1·99976	1·99930	1·99831	1·99878	1·99926	1·99979	1.99920
	Juni	2·00245	2·00204	2·00066	2·00150	2·00202	2·00273	2·00190
	Juli.....	2·00201	2·00182	2·00035	2·00079	2·00137	2·00222	2·00142
	August	2·00027	1·99997	1·99897	1·99985	1·99995	2·00070	1·99995
	September ..	2·00025	2·00022	1·99911	1·99999	2·00004	2·00040	2·00000
	October	2·00147	2·00155	2·00072	2·00130	2·00107	2·00139	2·00125
	November ..	2·00446	2·00469	2·00414	2·00417	2·00431	2·00448	2·00438
	December...	2·00693	2·00717	2·00696	2·00693	2·00674	2·00697	2·00695
	Jahr.....	2·00105	2·00105	2·00007	2·00044	2·00066	2·00114	2·00074
1855	Jänner	2·00733	2·00757	2·00703	2·00729	2·00734	2·00794	2·00742
	Februar	2·00407	2·00436	2·00401	2·00446	2·00407	2·00473	2·00428
	März	2·00494	2·00522	2·00445	2·01524	2·00545	2·00562	2·00515
	April	2·00290	2·00244	2·00117	2·00287	2·00331	2·00354	2·00270
	Mai.....	2·00701	2·00641	2·00512	2·00620	2·00703	2·00724	2·00650
	Juni	2·00502	2·00486	2·00338	2·00429	2·00520	2·00559	2·00472
	Juli.....	2·00544	2·00519	2·00351	2·00437	2·00593	2·00584	2·00505
	August	2·00552	2·00514	2·00393	2·00464	2·00526	2·00580	2·00505
	September ..	2·00547	2·00508	2·00385	2·00544	2·00573	2·00591	2·00525
	October	2·00441	2·00435	2·00317	2·00409	2·00409	2·00446	2·00410
	November ..	2·00625	2·00651	2·00583	2·00572	2·00602	2·00626	2·00610
	December...	2·00862	2·00893	2·00859	2·00900	2·00871	2·00846	2·00872
	Jahr.....	2·00558	2·00551	2·00450	2·00530	2·00568	2·00595	2·00542

Diese Tafel stellt den aus den Prager[1]) und anderen Beobachtungen bereits erkannten täglichen Gang der horizontalen Intensität dar, in so ferne er aus der geringeren Anzahl der täglich ausgeführten Ablesungen dargestellt werden kann. Wir wollen uns daher über diesen Punkt nicht weiter einlassen, sondern gehen zur Beantwortung der Frage über, ob die täglichen

[1]) Siehe Denkschriften VIII. Bd., Seite 104.

Änderungen sich dem Gesetze der zehnjährigen Periode fügen, oder ob auch hier, wie wir bei der Declination gesehen haben (S. 51), eine Verspätung eingetreten ist.

Die Prager Beobachtungen haben ein Minimum der täglichen Intensitäts-Änderung im Jahre 1843·27, ein Maximum im Jahre 1849·00 gezeigt[1]).

Wenn man hier auf dieselbe Weise verfährt, wie dort, nämlich für jeden Monat der Tafel XII die kleinste Zahl von dem Mittel aus allen abzieht, und die Reste in Zehntausendtheilen der horizontalen Intensität ausdrückt, so erhält man die in der folgenden Tafel gegebenen Zahlen.

Tafel XIII.

Tägliche Änderung der horizontalen Intensität.

Monat	1853	1854	1855
Jänner	8·2	5·8	3·9
Februar	5·1	4·3	2·7
März	13·7	7·4	7·0
April	19·7	10·7	15·3
Mai	17·0	8·9	13·8
Juni	23·7	12·4	13·4
Juli	22·5	10·7	15·4
August	19·1	9·8	11·2
September	21·5	8·9	14·0
October	16·6	5·3	9·3
November	4·4	2·4	3·8
December	4·7	2·1	2·6
Jahr	14·7	7·4	9·4

Die Zahlen dieser Tafel, namentlich die Jahresmittel, stellen allerdings einen kleinsten Werth der täglichen Änderung im Jahre 1854 dar, also gleichfalls später als dies im vorigen Decennium der Fall war; allein die rasche Abnahme von 1853 auf 1854, welche in der Nähe des Minimum nur sehr allmählich erfolgen sollte, lässt vermuthen, dass der Wechsel der Aufstellung einen Einfluss ausübte, durch welchen die vorhergehenden mit den nachfolgenden Beobachtungen nicht mehr strenge vergleichbar sind, daher auf die vorgelegte Frage keine entschiedene Antwort gegeben werden könnte, wenn nicht glücklicher Weise auch anderwärts derselbe unregelmässige Gang in den letzten Jahren beobachtet worden wäre.

Die durch die Güte des Herrn P. Augustin Reslhuber, Directors der Sternwarte zu Kremsmünster, eingesandten „Jahresberichte über die Resultate seiner meteorologischen und magnetischen Beobachtungen“ enthalten nämlich folgende Jahresmittel der Änderung der horizontalen Intensität von 8 Uhr Morgens bis 8 Uhr Abends in Zehntausendteln der Horizontalkraft:

für 1843	mittlere	Änderung	= 8·8
„ 1844	„	„	= 13·8
„ 1845	„	„	= 14·7
„ 1846	„	„	= 18·0

[1]) Siehe Denkschriften VIII. Bd. S. 109.

für 1847 mittlere Änderung = 20·8
„ 1848 „ „ = 27·3
„ 1849 „ „ = 23·0
„ 1850 „ „ = 20·3
„ 1851 „ „ = 15·2
„ 1852 „ „ = 14·8
„ 1853 „ „ = 17·8
„ 1854 „ „ = 10·5
„ 1855 „ „ = 12·2

Aus diesen Beobachtungen ist die Änderung

in Kremsmünster von 1853 bis 1854 . . . . — 7·3, von 1854 bis 1855 . . . . + 1·7
in Wien ist sie „ „ „ „ . . . . — 7·3, „ „ „ „ . . . . + 2·0.

Die fast genaue Übereinstimmung der numerischen Werthe dieser Änderung muss um so mehr einem zufälligen Zusammentreffen zugeschrieben werden, als ausser der Verschiedenheit der Apparate und ihrer Aufstellung in Kremsmünster nur zwei einzelne Beobachtungsstunden, in Wien aber die Beobachtungsstunden der kleinsten Intensität und das Mittel aller Stunden in Rechnung gezogen wurde. Jedoch können nach den vorhergehenden Zusammenstellungen zwei Thatsachen nicht in Abrede gestellt werden, nämlich

erstens: dass das Minimum der täglichen Änderung erst im Jahre 1854, also später eintrat, als es die zehnjährige Periode verlangt,

zweitens: dass das Jahr 1853 eine viel grössere tägliche Änderung zeigte, als ihm in Folge dieser Periode zukömmt.

Der letzte Punkt ist höchst merkwürdig und einer näheren Untersuchung werth.

Die seculäre Änderung der Inclination wurde aus Tafel V auf dieselbe Weise abgeleitet wie bei den vorhergehenden beiden Elementen, und es ergaben sich hieraus folgende Zahlen:

Tafel XIV.

Jährliche Änderung der Inclination.

Monat	1852—53	1853—54	1854—55	1855—56
Jänner	—	+4'6	—4'6	—7'9
Februar	—	—2·8	+1·6	—4·9
März	—	+2·6	—3·1	—3·5
April	—	+3·4	—5·7	—2·5
Mai	—	—0·1	—0·7	—4·3
Juni	—6'1	—	—	—
Juli	—8·5	—	—	—
August	+3·3	—	—	—
September	—2·3	—	—	—
October	—5·1	—	—	—
November	+2·0	—4·2	—2·3	—
December	+1·8	—3·6	—3·7	—
Mittel	—2·1	0·0	—2·6	—4·6

Aus diesen Zahlen kann man entnehmen, dass auch die Änderungen der Inclination grossen Unregelmässigkeiten unterworfen sind. Sie stehen bekanntlich in engem Zusammenhange mit denen der horizontalen Intensität, und wirklich zeigen die Mittel dieser Tafel und jene der Tafel XI einen ganz ähnlichen Gang. Nichts desto weniger muss man bedenken, dass die Änderungen der Horizontalkraft auch noch von der Totalkraft abhängen, daher mit jenen der Inclination nie ganz scharf stimmen können.

Das Mittel aller Zahlen der Tafel XIV mit Rücksicht auf ihre Zeichen ist

$$-2'18$$

welches als die jährliche Abnahme der Inclination zur jetzigen Zeit angesehen werden kann.

Über die periodischen Änderungen dieses Elementes im Verlaufe eines Jahres oder Tages kann aus diesen Bestimmungen nichts abgenommen werden, weil der hiezu verwendete Apparat nicht die gehörige Empfindlichkeit besitzt, diese kleinen Änderungen anzuzeigen, und ein Variations-Inclinatorium noch nicht aufgestellt werden konnte.

Um zu erkennen, ob und welchen Änderungen die Gesammtkraft des Erdmagnetismus unterworfen sei, wurde die Tafel VI einer genaueren Untersuchung unterzogen, welche die aus den Bestimmungen der horizontalen Componente und der Inclination berechneten Werthe derselben enthält.

Beim ersten Anblicke dieser Zahlen erkennt man sogleich, dass auch hier die Störungen einen merklichen Einfluss ausüben, indem die Monate Februar, September und October wenn auch nicht immer, doch auffallend oft die kleinsten Werthe enthalten, woraus hervorzugehen scheint, dass die störenden Kräfte nicht nur die Richtung der Magnetkraft ändern, sondern auch auf ihre Intensität schwächend einwirken. Dadurch wird höchst wahrscheinlich ein jährlicher Gang hervorgebracht, welcher dem bei der horizontalen Componente gefundenen ähnlich ist.

Ein Unterschied zwischen der Intensität der Gesammtkraft im Sommer und im Winter scheint nicht vorhanden zu sein, denn es gehören von den in der Tafel enthaltenen Monaten 22 dem Winter, 18 dem Sommer an.

Die Wintermonate geben im Durchschnitte	4·61299
Die Sommermonate geben	4·61297

Beide Werthe sind so wenig verschieden, dass auf einen Unterschied zwischen der Intensität im Sommer und Winter nicht geschlossen werden kann.

Wenn man, um die Secular-Änderung der Kraft zu finden, wieder, wie in den früheren Fällen, die gleichnamigen Monate der auf einander folgenden Jahre vergleicht, so erhält man folgende Tafel:

Tafel XV.

Jährliche Änderung der Totalkraft.

(+ bedeutet Zunahme, — bedeutet Abnahme.)

Monat	1852—53	1853—54	1854—55	1855—56
Jänner	—	+0·0171	+0·0009	—0·0202
Februar	—	—0·0035	+0·0265	—0·0122
März	—	+0·0045	+0·0090	—0·0119
April	—	+0·0081	—0·0016	—0·0019
Mai	—	—0·0106	+0·0191	—0·0160
Juni	—0·0016	—	—	—
Juli	—0·0057	—	—	—
August	+0·0126	—	—	—
September	+0·0146	—	—	—
October	+0·0033	—	—	—
November	+0·0085	+0·0021	—0·0025	—
December	+0·0086	+0·0096	—0·0066	—
Mittel	+0·0058	+0·0039	+0·0064	—0·0124

Gesammtmittel = + 0·00195.

Die Zahlen dieser Tafel geben auf die Frage, ob die magnetische Kraft in der gegenwärtigen Periode im Wachsen oder Abnehmen begriffen sei, keine entschiedene Antwort; denn wenn gleich die ersten drei Jahre eine sehr bedeutende Zunahme andeuten, so zeigt sich in den letzten sieben Monaten ohne Ausnahme das Gegentheil, es findet nämlich eine so rasche Abnahme Statt, dass dadurch mehr als die Hälfte des dreijährigen Wachsthumes aufgehoben wird. Leider geben auch andere, wenigstens näher gelegene Beobachtungsorte keinen Aufschluss; denn wenn auch über die horizontale Componente vieljährige und verlässliche Beobachtungen vorliegen, so wurde doch die Inclination erst in den letzten Jahren mit gleichem Fleisse beobachtet.

Gewöhnlich ging man von der Voraussetzung aus, dass die Inclination eine regelmässige jährliche Abnahme befolge, und suchte aus dieser und aus zwei in entfernten Epochen gemachten Jnclinations-Bestimmungen dieses Element für irgend eine dazwischen liegende Zeit, zu welcher man eine Bestimmung der horizontalen Componente ausgeführt hatte. Da aber, wie die neueren Beobachtungen zeigen, die Inclination sich keineswegs so regelmässig, sondern oft sprungweise ändert, so waren auch die durch dieses Verfahren gefundenen Werthe der Totalkraft nicht verlässlich, und es müssen demnach noch fernere Beobachtungen abgewartet werden, um die Frage über die Secular-Änderung der Gesammtkraft zu entscheiden.

Zu einem schnelleren Überblicke der magnetischen Grössen in Wien in der gegenwärtigen Periode (eigentlich für die Epoche 1854·5) mag folgende Zusammenstellung derselben dienen:

Declination	=	13° 2!05,
jährliche Abnahme . . .	=	9!15,
Horizontale Intensität	=	2·00174,
jährliche Zunahme . . .	=	0·00290,
Inclination	=	64° 16!35,
jährliche Abnahme . . .	=	2!18,
Intensität der Gesammtkraft . .	=	4·61048,
jährliche Zunahme . . .	=	0·00195.

Zweite Abtheilung.

Abhandlungen von Nicht-Mitgliedern der Akademie.

Mit 14 Tafeln.

ÜBER DAS SPRUNGGELENK

DER

SÄUGETHIERE UND DES MENSCHEN.

VON

PROF. Dr. KARL LANGER.

Mit 2 Tafeln.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTL. CLASSE AM 17. JÄNNER 1856.

BEITRAG ZUR VERGLEICHENDEN ANATOMIE UND MECHANIK DER GELENKE.

Es ist mir immer aufgefallen, dass an Durchschnitten des Sprunggelenkes des Menschen, die nach Weber's Vorgange senkrecht auf die Drehungsaxe desselben (diese durch die Knöchel gedacht) gemacht werden, trotz der scheinbaren kreisförmigen Begrenzung der Durchschnittsflächen und der Congruenz der Sprungbeinsrolle mit der Tibia, dennoch bei den Beuge- und Streckbewegungen die Durchschnittsflächen beider Knochen nicht in einer Ebene bleiben. Immer ist während der Beugung, Dorsalflexion, die Tibiafläche nach aussen abgewichen, so dass sie an dem inneren Segmente vorne etwas hervorragte, am äusseren dagegen vorne die Sprungbeinsrolle etwas blossgelegt wurde. Die Durchschnittsebene der Tibia kreuzte die Durchschnittsebene des Sprungbeines.

Selbst nachdem ich möglichst genau die Drehungsaxe bestimmte, zeigten solche verticale Durchschnitte immer dieselbe Erscheinung; ich zweifelte nun nicht mehr an der Gegenwart einer eigenthümlichen mechanischen Vorrichtung, durch welche sich das Sprunggelenk von anderen Charnieren unterscheiden dürfte, und unternahm eine nähere Untersuchung desselben mit Berücksichtigung der bei Säugethieren vorkommenden Bildungen. Da es sich um eine seitliche Ablenkung der Flexionsebene handelt, so suchte ich insbesondere den Grund derselben zu ermitteln.

Die alleinige Kenntniss der Axe der Rotationsfläche genügt nicht zur vollständigen Charakteristik eines Charnieres; die Richtung der Flexionsebene, namentlich ihr Verhältniss zur Drehungsaxe ist von gleicher Wichtigkeit.

Um die Lage der Flexionsebene kennen zu lernen, wende ich folgendes Verfahren an: Ich schlage in den concaven Knochen einen eisernen Stift so ein, dass er nur wenig über den Knorpelüberzug hervorragt; führe dann diesen Knochen in seiner Flexionsexcursion auf und nieder, und ritze mit dem vorragenden Stifte auf der convexen Gelenksfläche des andern Knochens (der Rolle) den Weg ein, welchen der bezeichnete Knochenpunkt über den andern zurückgelegt hat. Zwei oder mehr so eingeschlagene Eisenstifte bilden ebenso viele einander gleichlaufende Linien. Ich gewinne durch dieses Verfahren die Durchschnittslinie, in welcher die Flexionsebene die Rotationsfläche kreuzt, und gelange dadurch nicht allein zur Kenntniss der vertical auf die Drehungsaxe gerichteten Profilprojection der Flexionsebene, sondern gewinne auch Kenntniss von der seitlichen Neigung derselben gegen die Drehungsaxe; ein Umstand, der bis jetzt nur wenig berücksichtiget wurde. Ich nenne diese Durchschnittslinie, weil sie den Gang eines Punktes über der Rolle markirt, die Ganglinie.

Wäre am Sprunggelenke des Menschen die Begrenzungslinie der senkrechten Durchschnittsfläche der Talusrolle zugleich die Ganglinie des Gelenkes, so müsste bei jeder Stellung desselben die Durchschnittsfläche der Tibia und die des Sprungbeines in einer Ebene liegen, was bei so angefertigten Durchschnitten des Ellenbogengelenkes auch der Fall ist, da seine Ganglinie ein Kreis ist, dessen Ebene senkrecht auf der Drehungsaxe der Oberarmsrolle steht.

Die Ganglinie des Sprunggelenkes weicht also aus der senkrechten Durchschnittsebene der Talusrolle ab. Um sich diese Abweichung bemerkbarer zu machen, stecke man am gestreckten Gelenke in der Richtung der senkrechten Durchschnittsebene des Fusses zwei Nadeln ein, eine am Rande der Gelenkfläche der Tibia, die andere am Rande der Gelenkfläche des Sprungbeines; wird dann das Gelenk gebeugt, so stehen die beiden Nadeln nicht mehr über einander, sondern neben einander; die im Schienbein befestigte ist nach aussen abgewichen; bei grossen knochigen Männern über 3 Millim.

Da die Ganglinie aus der kreisförmigen senkrechten Durchschnittsebene der Sprungbeinsrolle abweicht, so kann sie kein Kreissegment sein. Indem sie unter spitzigem Winkel um eine cylindrische oder conische Oberfläche aufsteigt, wird sie Abschnitt einer Wendellinie sein. Der Gang einer solchen Linie erklärt auch die seitliche Verschiebung beider Knochen an einander. Die freien seitlichen Ränder der oberen Sprungbeinsfläche und der Rist der beiden in der Richtung von vorne nach hinten verlaufenden Erhabenheiten dieser Gelenkfläche sind, weil durch den Gang des Gelenkes bestimmt, der genaue Ausdruck der Ganglinie desselben. Doch ist es bei dem geringen Umfange und der geringen queren Concavität der oberen Gelenkfläche der Talusrolle des Menschen schwerer, sich diese als Abschnitt einer Wendellinie vorzustellen; ich suchte mir daher dieses Verhältniss bei den Säugethieren klarer zur Anschauung zu bringen, namentlich an grösseren Thieren und solchen, deren Sprungbeinsrolle zwischen zwei grösseren Gelenkerhabenheiten rinnenförmig vertieft ist. Aus diesen Untersuchungen hat sich ergeben, dass die Ganglinie des Sprunggelenkes wohl bei allen Säugethieren Theil einer Wendellinie ist; die Sprungbeinsrolle daher bei ihrer cylindrischen oder conischen Grundgestalt Abschnitt einer Schraubenspindel, an der das Schienbein mit seiner concaven unteren Gelenkfläche als Schraubenmutter spielt.

Das Sprunggelenk des Pferdes ist am besten geeignet dieses Verhältniss zu erläutern und als Ausgangspunkt zu dienen, von dem aus dasselbe durch die Reihe der Säugethiere bis zum Menschen verfolgt werden kann.

Bekanntlich besteht die Sprungbeinsrolle des Pferdes aus zwei länglichen nach der Quere abgerundeten Erhabenheiten, welche in schiefer Richtung nach aussen und unten verlaufen und eine sehr vertiefte in gleicher Richtung verlaufende Rinne einschliessen. Diese Erhabenheiten bezeichnen schon die Richtung des Ganges, doch wurde die Ganglinie noch genauer nach obiger Methode über den Rist derselben verzeichnet. Man sieht wie diese Linie, weit entfernt in einer Ebene zu bleiben, sich immer mehr nach aussen abbiegt, daher keine in sich zurücklaufende Linie sein kann. Die Congruenz beider Knochen in jeder Stellung des Gelenkes spricht gegen eine Ellipse, welche durch eine schief über eine Cylinder-Oberfläche in derselben Ebene zurücklaufende Linie dargestellt würde.

Um des Verlaufes der Ganglinie noch sicherer zu sein, suchte ich diese zu ergänzen, und so weit als möglich zu verfolgen. Zu dem Zwecke machte ich von der Sprungbeinsrolle mehrere Gypsabgüsse, in denen sich die über die Erhabenheiten geritzten Ganglinien deutlich ausprägten. Parallel der Axe wurden die Abgüsse beschnitten und so an einander gepasst, dass die Ganglinien des einen Abgusses in die des andern fielen. Zwei Abgüsse ergänzten sich schon zu einem ganzen Schraubenumfange, und zwar in der Art, dass die Ganglinie der einen Erhabenheit nach einem gemachten Umgange in die Ganglinie der andern Erhabenheit auslief (Fig. 2 zeigt die Ergänzung zweier Abgüsse der rechten Rolle vom Panther). Ich erhielt also das Modell eines Schraubenstückes, an welchem die Ganglinie zwei ganze Touren mit constanter Neigung um die Axe machte. Die beiden Erhabenheiten der Rolle bildeten das Schraubengewinde; ihre Distanz, parallel der Axe gemessen, gibt die Ganghöhe; durch Anpassen mehrerer Abgüsse konnte die Schraube beliebig verlängert werden. Aus den so gewonnenen Modellen lassen sich die Eigenschaften dieser Schraube und der Ganglinie entnehmen. Es ist eine einfache Schraube, deren Ganghöhe etwas grösser ist als der Radius des äusseren Schraubenumfanges, so dass die Schraubenlinie gegen die Grundfläche in einem Winkel über 10° aufsteigt.

Betreffs der Windungsrichtung ist die Sprungbeinsrolle der linken Seite Segment einer rechtsgewundenen Schraube, die von rechts einer linksgewundenen. Diesen Bezeichnungen, rechts- und linksgewunden, liegt die conventionell in der Mechanik gebräuchlichere Bedeutung dieser Ausdrücke zu Grunde. Nach der Bezeichnungsweise von Listing ist die Rolle des linken Fusses laeotrop, die des rechten Fusses dexiotrop (mit den mnemonischen Kennzeichen λ und δ). Die Axe der Rolle steht senkrecht auf der Axe des Fusses, diese durch die Länge des Mittelfussknochens (Schienbein der Thierärzte) auf die Mitte des Fusses gezogen. Die Neigung der Ganglinie gegen die Fussaxe ist daher dieselbe, wie gegen die Grundfläche der Rolle. Die Axe des Fersenhöckers steht parallel der Fussaxe und rechtwinkelig auf die Drehungsaxe.

Die schief gestellte Erhabenheit der unteren Fläche des Unterschenkelknochens (Tibia) ist ein Segment des Muttergewindes, welches in der Furche zwischen den Erhabenheiten der Sprungbeinsrolle lauft.

Der Rist der beiden Gelenkerhabenheiten der Sprungbeinsrolle des Pferdes entspricht den Seitenrändern der oberen Gelenkfläche dieses Knochens beim Menschen und manchen Säugethieren; es wird daher auch die seitliche Randbegrenzung der Rolle die Krümmung der Ganglinie wiedergeben. Auch die Krümmung der Seitenflächen der Rolle, wo diese durch die Knöchel wie in einer Gabel eingefasst ist, wird durch die Gangweise so weit bestimmt sein, dass unabhängig von ihrer seitlichen Krümmung (in der Richtung

von oben nach unten) sie entsprechend der Ganglinie symmetrisch mit dieser in der Richtung von vorne nach hinten gekrümmt sein wird. Doch ist nur ausnahmsweise wegen der geringen Excursion des Sprunggelenkes so viel von den Seitenflächen entwickelt, dass man aus dem geringen Segmente allein genaues entnehmen könnte.

In dieser Beziehung ist das Geschlecht *Bradypus* von besonderem Interesse, es ist meines Wissens das einzige Säugethier-Geschlecht, bei welchem die äussere Fläche der Sprungbeinsrolle im ganzen Kreisumfange entwickelt wäre. Sie ist nämlich zur Aufnahme des unteren, nach innen gegen die Rolle gebogenen, und zapfenartig frei vorspringenden Endes vom Wadenbeine zu einer ziemlich vertieften Grube ausgekehlt, deren Umfangsrand dem äusseren Rand der Rolle entspricht; da nun dieser Rand gleichzeitig Ganglinie des Gelenkes ist, so kann er vermög seiner Krümmungsverhältnisse nicht kreisförmig in sich zurücklaufen, sondern, da die Schraubenlinie des Sprungbeines nach aussen aufsteigt, weicht er immer mehr aus der Ebene seines Anfanges heraus ohne diesen zu erreichen; er bildet zwar keine ganze Windung, sondern hört am Vorderrande der Tibiafläche auf; dagegen machen die mit ihm um die Drehungsaxe symmetrisch gezogenen Linien in der Tiefe der äusseren Malleolargrube eine volle Windung, so dass im Ganzen die Wand dieser Gelenkgrube die Form eines trichterförmig eingerollten Blattes bekommt. Da wo der Umfang der Grube von seinem Anfange an der hinteren Peripherie der Rolle nach der Tiefe abweicht, hat der Knochen eine Spalte, die tief in die Substanz bis gegen den Grund der Grube reicht.

Die Abbildung Fig. 3 ist einem erwachsenen Exemplare von *Bradypus tridactylus* entnommen, dessen anderes Bein aber diese offene Spalte nicht zeigt, indem der Knorpelüberzug dieselbe bedeckte. Einen Einschnitt des Knochens habe ich unten an drei *Bradypus*-Skeleten gesehen, die Spalte in der Malleolargrube selbst constant aber nur bei jüngeren Thieren. Bei *Bradypus* ist also in der spiralig um die Drehungsaxe des Gelenkes angelegten äusseren Malleolarfläche die spirale Ganglinie der Talusrolle ganz wiedergegeben.

Auch betreffs der Mechanik dieser Schraubencharniere ist das Sprunggelenk des Pferdes ganz geeignet als Paradigma zu dienen, da das Sprungbein durch seine sehr straffen Bänder mit den übrigen Fusswurzelknochen vereiniget und dadurch jede andere störende Mitbewegung des Gelenkes möglichst ausgeschlossen ist. Blos Beuge- und Streckbewegungen können hier ausgeführt werden.

Der Umfang der Bewegung beträgt am Präparat 115°, kann also nahe einem Drittheile des Kreisumfanges gleich angenommen werden.

Bekanntlich federt dieses Gelenk; an einer bestimmten Stelle nämlich hat es eine so labile Lage, dass es durch den geringsten Impuls, je nach dessen Richtung, mit grosser Kraft in die Beuge- oder Strecklage zurückschnellt; dagegen nur mit immer wachsendem Widerstande dieser labilen Stellung zugeführt werden kann. Von den 115° kommen 35° auf den Abstand der labilen Lage von der extremen Streckstellung.

Da der Schraube dieses Sprunggelenkes ein Cylinder zu Grunde liegt, so ist hier, wie in den Cylindercharnieren, die Drehungsaxe eine fixe nicht verschiebbare, und die beiden Knochen unter allen Stellungen in den der Ganglinie gleichlaufenden Contactlinien vollkommen congruent. Auch die Richtung der Drehungsebenen beider Glieder zu einander wird ebenfalls wie dort von der Richtung der Drehungsaxe gegen die Axe der bewegten Knochen abhängig sein. In dieser Beziehung finden daher keine Unterschiede Statt zwischen Schrauben- und Cylinder-Charnieren. Charakteristisch aber für das Schraubencharnier ist

eine nach der Richtung der Drehungsaxe vor sich gehende seitliche Verschiebung der Knochen. Es wird nämlich bei fixirtem Fusse die Tibia in ihrer Drehungsebene nach aussen zu verschoben, wenn sie aus der Strecklage in die Beugelage geführt wird; umgekehrt bei der Streckung. Die Grösse dieser Verschiebung wächst im geraden Verhältniss mit dem Sinus des Neigungswinkels, unter welchem die Ganglinie der Rolle aufsteigt; steigt also mit der Ganghöhe der Schraube. Würde die Tibia als Schraubenmutter um die Sprungbeinsrolle eine vollkommene Umdrehung machen, so würde die seitliche Verschiebung genau den Werth der Höhe des Schraubenganges haben; beträgt dagegen die Excursion der Tibia nur ein Drittheil des Cylinderumfanges, so wird die Verschiebung nur dem dritten Theile der Ganghöhe entsprechen. Bei bekannter Excursionsweite eines Gelenkes und bekanntem Radius der Rolle lässt sich daher auch aus dem Werthe der Verschiebung die Neigung der Ganglinie gegen die Schraubenbasis ermitteln.

Messungen über die Grössen der Verschiebung lassen sich annähernd durch Markirung zweier Punkte vornehmen, die in der Streckstellung senkrecht auf die Drehungsaxe angebracht werden, einer an der Tibia, der andere an dem Sprungbeine. Im Maximo der Beugung stehen die Marken neben einander; die der Tibia ist die äussere.

Genauer habe ich den Grad der Verschiebung nach folgender Methode bestimmt. Ich zeichnete am unteren Ende der Tibia eines am Mittelfuss befestigten Gelenkes eine Querlinie, parallel mit der Drehungsaxe; construirte auf ihr eine Senkrechte. Ein mit einem Fadenkreuz versehenes Fernrohr wurde horizontal aufgestellt, das Fadenkreuz deckte die Linien am Schienbein; die richtige Aufstellung des Apparates wurde an einem zwischen dem Fernrohr und dem Gelenke aufgehängten Loth geprüft. Bei vorgenommenen Bewegungen der Tibia sieht man ihre Verticale parallel mit dem Lothe sich verrücken. Eine an der Horizontalen der Tibia verzeichnete Millimeter-Skala diente als Massstab, an welchem die Grösse dieser Verschiebung abgelesen wurde. An einem Pferde-Sprunggelenk betrug die Verschiebung bei einer ganzen Excursion 11 Millim., was ein Drittheil der Distanz beider Erhabenheiten der Talusrolle war. Die durch directe Messungen erlangte Grösse des Neigungswinkels und die Weite der Excursionsfähigkeit der Tibia stimmten mit diesem Resultate überein. Die stärkere Prominenz des äusseren Knöchels in der Beugestellung steht mit dieser Verschiebung in Verbindung.

Unter Berücksichtigung dieser seitlichen Verschiebung ergibt sich zum Unterschiede von einem Cylindercharniere, dass die Flexionsebene keine Ebene, sondern übereinstimmend mit der wendelartig verlaufenden Ganglinie ein Theil einer Wendelfläche ist.

Die Verschiebung bedingt auch die Unterschiede, die in der Anheftung der Lateral-Ligamente hier im Gegensatze von Cylindercharnieren beobachtet werden.

Es gibt bei Cylindercharnieren einzelne Faserbündel, welche beiderseits im Endpunkte der Umdrehungsaxe symmetrisch befestigt, bei jeder Lage des Gelenkes ihre Spannung gleichmässig erhalten. Diese Fascikel bilden den Mantel eines geraden Kegels, oder laufen in einer Kreisebene, je nachdem ihre centralen Befestigungspunkte an einem hervorragenden Tuberculum oder in der Ebene der Rollenbasis sich befestigen. Solche sind bei Schraubencharnieren undenkbar; denn sie würden, wenn sie an einem hervorragenden Höcker der Rolle entstehen würden, beiläufig den Mantel eines schiefen Kegels bilden, dessen längere Seiten nach der Seite gerichtet wären, nach welcher die Ganglinie abweicht; am äusseren Ligamentum nach hinten, am inneren nach vorne. Wären aber beide in ihrer Länge z. B. für die Strecklage accommodirt, so wäre für die Beugelage

das innere zu kurz, das äussere würde erschlaffen; und umgekehrt, wenn ihre Länge der Beugelage entsprechen würde; eine gleichzeitige Spannung der beiden Bänder bei freier Beweglichkeit des Gelenkes ist also nicht möglich, wenn diese ihren Ursprung beiderseits im Endpunkte der Umdrehungsaxe nehmen; oder überhaupt symmetrisch an der Rolle befestigt sind, wie dies an einem reinen Ginglymusgelenke stets der Fall ist.

Es ist unmöglich für ein Band-Fascikel einen Ansatzpunkt zu finden, bei dem dasselbe in allen Stellungen gleichmässig gespannt sein könnte. Wie bei den unreinen Charnieren (mit nicht congruenten Gelenkflächen) strahlen auch hier die Faserbündel der Lateralligamente nicht gegen einen Punkt der Rolle zusammen, sondern heften sich in einer Linie an, die mehr weniger der Ganglinie entspricht; die Fascikeln durchkreuzen sich, so dass die an der Rolle hinten befestigten am concaven Knochen vorne sich anheften, und umgekehrt, wodurch eine abwechselnde Spannung der einzelnen Bündeln jedes Lateral-Ligamentes bedingt, und dabei der feste Anschluss beider Knochen nur durch Spannung einzelner Bündeln erzielt wird; eine gleichzeitige Spannung aller Fasern eines Ligamentes ist da unmöglich. Die Durchkreuzung der Fascikeln eines Bandes unter einander ist dadurch geboten, dass Fasern, die an der Tibia z. B. hinten sich anheften, zu kurz für die Beugung wären, wenn sie auch an der Rolle hinten angeheftet wären.

Beim Pferde sind beiderseits zwei Lateralligamente, ein tieferes und ein oberflächliches; letzteres entspricht den *Ligamentis laciniatis*, als Verstärkungen der Aponeurose am Fussgelenke des Menschen; die tiefen sind die eigentlichen Lateralligamente. Die oberflächlichen tragen zur Festigkeit des Gelenkes wesentlich bei, ohne jedoch auf die Mechanik des Gelenkes einen eigenthümlichen Einfluss zu nehmen; sie sind der Strecklage accommodirt, erschlaffen daher bei der Beugelage. Das äussere tiefe Seitenband befestigt sich in grosser Ausdehnung entlang der Contactlinie des Sprungbeines mit dem Fersenbeine; wechselnd spannen sich seine Faserbündeln bei der Beuge- oder Streckbewegung. Das innere tiefe heftet sich schon am Fersenbein an, beiläufig in der Peripherie der Basis der Talusrolle, vor (unter) dem Endpunkte der Drehungsaxe; seine Länge ist der Streckstellung entsprechend.

Der Abstand der Befestigung des inneren Lateralligamentes am Fersenbein von seinem Tibialansatze ist bei extremer Flexion selbst mit Berücksichtigung der Abweichung der Ganglinie nach aussen kleiner, als bei der extremen Extension, daher in der Beugelage das Band erschlafft ist. Zwei Nebenfascikel, die hinten an der Rolle sich ansetzen, spannen sich bei der Flexion. Den höchsten Grad seiner Tension erreicht aber das Band, wenn es während des Ganges der Tibia den Endpunkt der Drehungsaxe deckt, weil es dann in den grössten Durchmesser des Kreises zu liegen kommt. In dieser Spannung des inneren tiefen Lateralligamentes liegt der Hauptgrund des Federns des Gelenkes, da das Band in dieser Stellung stark gedehnt, vermöge seiner Elasticität den Knochen bald nach vorn bald nach rückwärts herüber zu schnellen versucht. Fig. 5 ist die innere Seite des Pferdegelenkes mit den Ursprüngen der inneren Lateralligamente, *a*, *a* des tiefen, *b*, *b* des oberflächlichen, *a'* sind accessorische Fascikeln des tieferen Bandes, von dem sie als *Ligamenta tibio-tali postica* getrennt werden könnten. Die Tibia ist in der labilen Lage eingestellt; in dieser Stellung erreicht das innere tiefe Ligament die grösste Tension.

Beide tiefere Ligamente befestigen sich am vorderen Höcker der Knöchel; indess die oberflächlichen am Fusse vor, am Schienbein hinter den tiefen sich anheften. Beiderlei Bänder kreuzen sich daher.

Wegen ihrer Befestigung an der Fusswurzel vor den tiefen Bändern ist die Erschlaffung der oberflächlichen Bänder bei der Beugung eine gänzliche, und da nur die hinteren Fascikeln der tieferen Bänder gespannt sind, ist das Gelenk in der Beugelage minder fest. Schlotternd kann jedoch selbst in der extremen Beugelage, trotz der Erschlaffung der meisten Bänder-Fascikeln, das Gelenke nicht sein, da einerseits der kräftige Muskeldruck die Knochen fixirt, andererseits die stark eminenten Erhabenheiten der Rolle eine Lateralbewegung verhindern.

Was das Verhältniss dieser Gelenkeinrichtung zur Musculatur und ihrer Leistung betrifft, so ergibt sich im Vergleich mit dem Mechanismus eines reinen Ginglymusgelenkes beim Schraubengelenk zu Gunsten der Musculatur offenbar ein mechanischer Vortheil.

Denkt man sich die Last des Leibes senkrecht abwärts gerichtet, so fällt sie bei dem horizontalen Stande der Drehungsaxe zugleich senkrecht auf diese; wäre das Gelenk ein Cylindergelenk mit gerader Gangrichtung, so fiele der Druck der Leibeslast parallel mit der Gangebene. Geht dagegen die Ganglinie (Flexionsebene) in schiefer Richtung auf die Axe, so wird ein Theil der Last als Normaldruck senkrecht auf die Ebene der Ganglinie fallen und durch die Resistenz der Rolle getragen; der Musculatur fällt nur mehr das relative Gewicht zur Last welches in der der Ganglinie gleichlaufenden Richtung sich fort zu bewegen strebt. Je mehr dabei die Resultirende des Gastrocnemius in die Richtung der Ganglinie fällt, desto grösser ist der Gewinn an Kraft, der sich in dem Verhältnisse günstig gestaltet, in welchem die Länge, der Schraubenlinie (Ganglinie) zu der Peripherie der Spindel (gerade Ganglinie eines Cylinder-Gelenkes) steht. Zieht man eine Linie von dem Zwischenraume der Oberschenkel-Condylen zum Fersenhöcker, der auswärts der Tibia gestellt ist, so dürfte diese Linie der Resultirenden des Gastrocnemius entsprechen. Ihre Richtung nähert sich bei verschiedenen Thieren und verschiedenen Attituden bald mehr bald weniger der schiefen Gangrichtung des Gelenkes, wodurch also die gleichlaufende schiefe Gangrichtung des Gelenkes für die Musculatur ein günstigeres mechanisches Verhältniss erzielt, indess bei bestehender schiefer Richtung der Muskelresultirenden ein Charnier mit gerader (senkrechter) Gangrichtung einen entsprechenden Verlust an Kraft für die Musculatur bedingen würde.

Wie es scheint ist beim aufrechten Stande der vierfüssigen Säugethiere, wegen der halbgebeugten Stellung ihrer Glieder mehr die Musculatur in Anspruch genommen, als dies, wie Meyer erwiesen, beim aufrechten Stande des Menschen der Fall ist, wo das Tragen der Leibeslast, wenigstens grösstentheils, den Hemmungs-Apparaten der Gelenke zugefallen ist. Solche für die Musculatur mechanisch günstige Gangrichtungen der Gelenke erzielen dieselbe Ersparniss an Muskelkräften. Während am Ellenbogengelenk des Menschen eine kaum abweichende Gangrichtung sich findet, trifft man eine solche auch hier schon angedeutet beim Pferde und Rinde. Das Federn des Sprunggelenkes beim Pferde scheint für die Stabilität der Strecklage gleichfalls von Bedeutung zu sein.

In je grösserem Neigungswinkel daher, bei gleichbleibendem Umfange der Rolle, die Ganglinie von ihrer verticalen Richtung abweicht, desto mehr wird an Normaldruck gewonnen und das relative von der Musculatur zu tragende Gewicht vermindert; damit steht wohl in Verbindung die Verschiedenheit in der Grösse des Neigungswinkels bei verschiedenen Thieren. Ich finde dass solche, die den Fuss steil tragen, namentlich hochbeinige, wie das Pferd und Känguru, den grössten Neigungswinkel haben, hingegen der Mensch überhaupt die Sohlen-

gänger, eine weniger geneigte Gangrichtung haben, Bestimmtes kann aber nur der Vergleich mit der Richtung der Muskelresultirenden ergeben.

Während am Ellenbogengelenk zur Aufnahme des vorspringenden Ellenbogenhöckers in der Strecklage der Oberarm eine tiefe *Fossa supracondyloidea* besitzt, weicht die Tibia hier wegen der schiefen Gangrichtung des Gelenkes dem Fersenhöcker aus, und gewinnt dadurch gleichfalls an Umfang der Bewegung, die durch den stark vorspringenden Fersenhöcker gehemmt würde.

Dass diese Bildung der Sprungbeinsrolle nicht dem Pferde allein eigenthümlich sei, geht schon aus der schiefen Gangrichtung des Sprunggelenkes des Menschen hervor. Es handelte sich darum zu erfahren, in wie weit diese Form in der typischen Bildung des Säugethierskeletes begründet ist, und welche Abweichungen etwa vorkommen. Ich untersuchte zu dem Ende eine Reihe von Säugethierskeleten, und bin, wie gesagt, zu dem Resultat gekommen, dass die schiefe wendelförmige Gangrichtung des Sprunggelenkes allen Säugethieren typisch zukomme.

Die schiefe Richtung der Gelenkleisten, oder, wo diese nicht auffallend entwickelt sind, die schiefen Ränder der oberen Rollenfläche lassen darüber schon auf den ersten Blick keinen Zweifel aufkommen, und an grösseren Thieren kann man sich selbst die Ganglinie dadurch markiren, dass man mit der über die Rolle vorsichtig geführten Tibia einen Bleistift in Verbindung bringt. Die Lage der Drehungsaxe und die anatomischen Verhältnisse der Bänder können da wohl nicht mehr mit jener Genauigkeit ermittelt werden, die wünschenswerth wäre, aber nur am frischen Gelenke erzielt werden kann.

Ich finde diese schiefe Richtung der Ganglinie unter den Raubthieren beim Katzengeschlechte (Löwe, Panther, Katze), dann den Hundearten mit wenig geringerem Neigungswinkel als beim Pferde, beim Bären als Sohlengänger scheint mir der Neigungswinkel etwas geringer zu sein. Die Nager (Hase, Stachelschwein) schliessen sich im Ganzen an die Raubthiere an; Aguti mit seinem steil getragenen Fusse hat eine grössere, und der plantigrade Bieber die geringste Neigung. An die genannten schliesst sich *Hyrax* und *Tapyrus* an; letzterer mit einer Neigung, die jene des Pferdes beinahe erreicht. *Myrmecophaga jubata* hat eine Rolle mit geringer Neigung und dabei einen, im Verhältniss zur Grösse der Extremität geringen Durchmesser; letzteres fällt bei der kletternden *Myrmecophaga didactyla* besonders auf. Der langfüssige *Halmaturus* ist durch eine flache, scharf geränderte und sehr schiefe Rolle ausgezeichnet. Geringer ist die schiefe Gangrichtung der Talusrolle bei den Wiederkäuern und Schweinen, welche sich vor allen übrigen *Pachydermen* wesentlich durch die Form ihres Sprungbeines unterscheiden. *Hyrax* steht den Nagern, namentlich den Hasen am nächsten, *Tapyrus* und *Hippopotamus* den kurzfüssigen *Digitaten*. *Elephas* hat eine wenig gekehlte, bei dem geringen Umfange der Bewegung auch wenig umfangreiche Rolle, deren schiefe Gangrichtung, trotz der Kürze, aber mit der Steilheit des Fusses in Verbindung stehend, mindestens 10° beträgt. Von den Springern unter den Nagethieren untersuchte ich *Dipus*, und fand wie beim *Halmaturus* eine sehr schiefe Gangrichtung. *Dasypus* zeigt keine Eigenthümlichkeiten und schliesst sich den kurzzehigen Säugethieren an.

Von den meisten der untersuchten Thiere habe ich die Sprungbeinsrolle in Gyps abgegossen, und sie zu einem vollen Schraubenumfange zu ergänzen gesucht. Fig. 2 stellt einen solchen Abguss und die Ergänzung zur Schraube vom Sprungbein des Panthers vor. In Fig 1 ist die ganze rechte Fusswurzel desselben Thieres abgebildet. Fig. 4 ist die rechte Fusswurzel vom *Halmaturus giganteus*.

Diese Angaben sind, weil die Axen nicht mehr so genau ermittelt werden konnten, nur Schätzungen, doch glaube ich eine ziemliche Genauigkeit für sie in Anspruch nehmen und behaupten zu können, dass bei keinem Säugethiere der Neigungswinkel der Ganglinie gegen die Rollenbasis sich so klein herausstellt, dass diese zu einem Kreissegmente würde.

Bisher wurde als Grundgestalt der Sprungbeinsrolle ein Cylinder angenommen, dies ist beim Pferde und *Halmaturus*, wie es scheint, auch der Fall; doch zeigt die Rolle der meisten anderen genannten Thiere nach innen einen geringeren Umfang als nach aussen zu, so dass die Rolle in ihrer Grundgestalt eine konische Form mit nach innen gewendeter Spitze annimmt. Da bei der Flexion die Tibia nach aussen gegen die Basis der Kegelschraube, also gewissermassen schraubauf sich bewegt, so wird das Gelenk in der extremen Flexion wie festgeschraubt und die weitere Bewegung gehemmt.

Rücksichtlich des Umfanges der überknorpelten Sprungbeinsrolle ergaben sich einige auf die Grösse der Excursion Einfluss nehmende Unterschiede. Beim Elephanten finde ich ihn am kleinsten, nicht über $^1/_6$ eines Kreisumfanges, beim *Tapir* über $^1/_3$, beim Pferde ist er $^1/_2$, so auch beim Panther.

Betreffs der Lage der Drehungsaxe scheint diese bei den genannten Thieren kaum aus der horizontalen abzuweichen, doch nicht immer senkrecht gegen die Fussaxe gestellt zu sein, wo sie dann aussen eine nach hinten, doch wenig ablenkende Richtung bekömmt, die Axen beider parallel aufgesetzten Füsse bilden dann einen nach hinten offenen, sehr stumpfen Winkel. Wie es scheint senkrecht auf die Fussaxe, finde ich sie ausser beim Pferde auch noch beim *Halmaturus*. Von der Neigung der Axe und der schiefen Gangrichtung der Rolle hängt der Umstand ab, dass die Flexionsebene der Tibia mit der des Fusses sich kreuzt und in der Beugestellung das Knie über den äusseren Fussrand zu stehen kommt.

Bei einigen Säugethieren tritt aber noch eine Neigung der Drehungsaxe gegen den Horizont auf. In diesem Falle ist sie stets aussen höher, so dass sie mit der horizontalen einen nach aussen offenen Winkel beschreibt. Da die Drehungsaxe im Sprungbein liegt, und dieses gegen den Fuss noch durch das untere Gelenk beweglich ist, so bestimmt die im unteren Gelenke mehr oder weniger bleibend angenommene Lage des Sprungbeins die Lage der Axe. Ist das Sprungbein nach innen gesenkt (pronirt), so wird dadurch die Axe des oberen Gelenkes aussen gehoben. Die äussere Fibularfläche des Talus bekommt eine nach obenzu gerichtete Lage, und der äussere Rand der oberen Rollenfläche läuft leistenförmig über den Rist und zeichnet die Ganglinie. Im Maximo dieser Bildung articulirt die Fibula mit einer unteren schief abfälligen Fläche mit dem Sprungbein, so dass die beiden Unterschenkelknochen nicht eigentlich eine Gabel bilden.

Eine sehr schiefe Lagerung des Sprungbeines finde ich bei *Phoca;* es steht das mit dem ausgezeichneten Schwimmvermögen dieses Thieres im Zusammenhange, da sich die Flexionsebene des Sprunggelenkes wegen der bleibenden Pronationslage des Sprungbeines im unteren Gelenke schief gegen den Horizont einstellt; bei der vollen Extensionslage ist der Plattfuss ganz einwärts gewendet.

Auch bei *Phalangista* ist die Fibularfläche des Talus aufwärts gewendet, beide Flächen jedoch von geringerem Umfange und kleiner Convexität, so dass besonders die Tibialfläche nahezu eben ist; gegen einander sind sie unter einem nur wenig stumpfen Winkel geneigt, und durch eine niedrige schief auf die Drehungsaxe gestellte Leiste (nämlich den äusseren Rand der Rolle)

geschieden. Die flachen Gelenksflächen deuten auf ein grosses, der Lebensweise dieses Kletterthieres zuständiges Drehungsvermögen in diesem Gelenke, dessen Axe in den Unterschenkel fällt.

Die mit der Zulässigkeit dieses Gelenkes um zwei vertical auf einander stehende Axen sich zu drehen, nothwendig verbundene Incongruenz beiderlei Knochen ist durch einen verschiebbaren Meniscus ausgeglichen, der das untere Ende der Fibula umsäumt; der convexe Rand desselben läuft entlang der mittleren Rollleiste (äusseren Rand der Rolle anderer Thiere), sein hinteres Ende verschmilzt mit dem *Ligamentum fibulare tali posticum*, das andere mit der Wand der Kapsel. Dasselbe Verhältniss finde ich auch bei *Didelphis*, dessen Gelenk ich näher untersuchen konnte; ich sehe hier zwischen Fibula und Tibia auch einen Fortsatz des Meniscus aufwärts gehen, und beide Knochen von einander scheiden. Die den beiden Unterschenkelknochen entsprechenden Synovialhöhlen communiciren über der Rolle nur durch die Öffnung des Meniscus. In Fig. 6 ist der rechte Hinterfuss von *Didelphis virginiana* abgebildet, um den Bau der oberen Rollenfläche des Sprungbeins zu zeigen. Die innere der Facetten ist die innere Malleolarfläche, die mittlere die Tibialfläche, die dritte ist die äussere Malleolarfläche. So viel mir bekannt, sind diese beiden die einzigen Säugethiere, welche ein umfangreiches Drehungsvermögen um eine verticale Axe mit einem Meniscus in diesem Gelenke besitzen. Nur bei den *Monotremen* scheint noch ein ähnliches Rotationsvermögen vorhanden zu sein.

Hat man einmal die schiefe Gangrichtung des Sprunggelenkes an Thieren kennen gelernt, so wird man diese auch beim Menschen nicht vermissen. Ich empfehle zu dieser Untersuchung Extremitäten grosser knochiger Männer zu wählen.

Die Versuche, die ich über die Richtung der Axe der Sprungbeinsrolle gemacht, zeigen, dass sie aussen nahe der Spitze der Fibularfläche, innen durch ein Höckerchen läuft, an welchem sich ein tiefes Fascikel des *Ligamentum laterale int.* befestigt. Etwas ober diesem Höckerchen finde ich eine Öffnung, die zum Durchtritte eines Blutgefässes dient (Fig. 11, *a*). Projicirt man durch beide Punkte über die Rolle eine Linie und untersucht ihr Verhältniss zur Ganglinie, die auf die früher angegebene Weise durch einen feinen Stift markirt wird, so sieht man, dass diese von der Geraden (d. h. Senkrechten auf die Drehungsaxe) im Maximo um etwa 8° nach aussen abweicht; sich daher dem allgemeinen Säugethier-Typus vollkommen anschliesst, ohne jedoch, bei dem geringen Umfange der Rolle, so eminent zu sein, wie es beim Pferde oder Känguruh zu finden ist.

Was die Lage der Drehungsaxe zur Längenaxe des Fusses betrifft, ist sie in dieser Beziehung sehr wechselnd, wegen der Beweglichkeit des Sprungbeines gegen den übrigen Fuss. Ich ziehe nach Weber die Fussaxe durch das Köpfchen vom zweiten Mittelfussknochen und den unten aufliegenden Höcker vom Fersenbein. Wird das Sprungbein bei senkrecht stehender Tibia durch Druck am Knie belastet, so dass das Höckerchen des *Caput tali* nicht über das *Os naviculare* hervorragt, so ist eine Neigung der Fussaxe gegen die Verticale der Drehungsaxe kaum bemerkbar; steht aber das Höckerchen des Talus vor, wie dies bei halber Beugung und unbelastetem Gelenke der Fall ist, so wird sich der Winkel der schiefen Gangrichtung mit dem Winkel der nun auch schief gegen die Axe des Fusses gelagerten Drehungsaxe summiren, und an Durchschnitten des Gelenkes die Eingangs erwähnte Ablenkung ergeben; sie wird um so auffallender sein, je mehr auch das untere Gelenk, und durch dieses das Sprungbein gegen den übrigen Fuss bewegt wird. Bei der Beugung geschieht die Ablenkung nach aussen, bei der Streckung nach innen.

Herm. Meyer hat in seiner Abhandlung über „das aufrechte Stehen“ in Müller's Archiv 1853, pag. 9, zuerst auf die Form der Gelenkfläche der Talusrolle genau aufmerksam gemacht und gefunden, dass die Rolle nach vorne breiter ist als nach hinten, wodurch sie in der Beugelage zwischen den beiden Knöcheln eingeklemmt festgehalten wird. Diess scheint für den ersten Augenblick im Widerspruch zu stehen mit der oben besprochenen Verschiebung der Tibia nach aussen, da ja ihr Knöchel an sie fest angewachsen, sie daher bei dem Breiterwerden der Rolle nach vorne eher nach innen als nach aussen verschoben werden sollte, besonders da die innere Malleolarfläche der Rolle vorne nach innen sich ausbuchtet.

Um darüber ins Klare zu kommen, untersuchte ich zunächst die Form der Concavität der Unterschenkelknochen im Verhältniss zur Form der Sprungbeinsrolle, und machte zu dem Ende einen Abguss der Gabelpfanne, der natürlich kürzer in seinem Kreisumfange war als die Rolle; es stellte sich aber die vollkommenste Congruenz desselben mit jenem Theil der Rolle heraus, den die Unterschenkelknochen decken, wenn sie senkrecht über dem Fusse stehen; es reicht in dieser Lage der äussere Rand der Tibia genau bis an den Rand der Abstumpfungsfläche der äusseren Rollenkante. Die Abstumpfungsfläche selbst ist in dieser Lage mit keinem der Unterschenkelknochen in Berührung, sondern wird von den gespannten Fasern des *Ligamentum tibio-fibulare post.* gedeckt, welches gewissermassen zu dieser Abstumpfung führt.

Der Grund der grösseren Breite der Rolle vorne liegt darin, dass sie innen in mehr senkrechter Richtung auf die Drehungsaxe, aussen aber in der Richtung der Ganglinie abgegrenzt ist.

Wenn man von einer Schraubenspindel mit abgerundeten Gängen ein Segment, das beiläufig ein Viertheil ihres Umfanges beträgt, nach den angegebenen Richtungen abgrenzt, dann den schiefen nach der Wendellinie gerichteten Rand hinten abstumpft, so hat man sich damit das Schema einer Sprungbeinsrolle nachgebildet. Die innere Malleolarfläche, scheinbar im Widerspruche mit der nach aussen gerichteten Gangweise, stellt sich jetzt als die abgegrenzte Wand der seitlich steil abfallenden Schraubenwindung heraus. Die äussere Malleolarfläche als Seitenbegrenzung der Rolle ist auch entsprechend der Ganglinie symmetrisch mit dieser in der Richtung von hinten nach vorne gekrümmt, und entsprechend dem Umfange der Rolle beinahe in einem Viertelkreis entwickelt, daher stets im Contacte mit dem Malleolus; während der *Malleolus internus*, da er eine von dem Begrenzungsrande der inneren Malleolarfläche abweichende Gangrichtung hat, diese Fläche also hinten nicht in dem Umfange ausgeführt ist, der der Grösse der Rolle entspricht, sich bei der Streckung um so viel entfernen muss, als der Winkel beträgt, unter welchem die Ganglinie die Begrenzungslinie schneidet. Dass der *Malleolus internus* sich hier bei der Plantarflexion von der Rolle wirklich entfernt, sieht man bei Ansicht des Gelenkes von hinten her. Die ungleiche Länge der Knöchel ist Ursache der verschiedenen Form der ihnen entsprechenden Seitenflächen der Rolle, indem der äussere Knöchel die Drehungsaxe erreicht, der innere dagegen kürzer, die Axe unter sich durchtreten lässt. In Fig. 7 ist ein solches Schema der linken Sprungbeinsrolle entworfen, mit einem Neigungswinkel von 8°. *A* die Axe, *B* Richtung der Basis, *G* die Ganglinie, *D* innere Begrenzungslinie der Rolle. Zwei volle Umgänge der Schraubenspindel bilden nämlich eine Rolle, von welcher das Sprungbein nur ein Viertheil entwickelt an sich trägt; die Seitenflächen tragen die Malleoli, und werden daher durch deren Form in ihrer Ausdehnung und in ihrer seitlichen Krümmung bestimmt, indess ihre Krümmung von vorne nach hinten durch die Ganglinie bestimmt ist. Auch

die nach innen ablenkende, auffallend spirale innere Malleolarfläche bei *Echidna*, findet in der unsymmetrischen Begrenzung der Rolle ihre Erklärung.

Auch beim Menschen ist die äussere Peripherie der Rolle grösser als die innere; die Grundform der Rolle ist daher auch ein Kegel mit einwärts gerichteter Spitze. Da die Verschiebung nach aussen, also gegen den breiteren Theil der Rolle vor sich geht, so wird durch die Beugebewegung der Unterschenkel an die Talusrolle gleichsam festgeschraubt und die extreme Flexionslage gehemmt. Dieser Umstand wird in gleicher Weise, wie die vorne grössere Breite der Rolle, worauf Meyer aufmerksam machte, als Hemmniss der Flexion bei der Statik des Aufrechtstehens in Betracht kommen, und diese Attitude durch den Mechanismus des Gelenkes getragen, mit dem geringsten Muskelaufwande festzuhalten gestatten. Es wird durch diesen Apparat an der zum Tragen der Körperlast nöthigen Muskelkraft möglichst gespart, um sie der Bewegung zuwenden zu können.

Die im Ganzen trapezoidale Durchschnittsform der Rolle erlaubt bei der geringen Höhe der Schraubenwindungen eine kleine Drehbewegung um den *Malleolus externus* weil bei der Streckung der innere Knöchel gelockert wird. Diese Drehbewegung ist in der Streckstellung so lange gestattet, als die die Streckung hemmenden Bänder nicht das Maximum ihrer Tension erreichen, durch welche der Talus wieder an die Unterschenkelknochen angedrückt wird.

Welchen Einfluss die nach aussen schief gerichtete Flexionsebene des Unterschenkels auf die Mechanik des Gehens und Stehens habe, hat H. Meyer in seiner Abhandlung „das aufrechte Gehen“ (Müller's Archiv 1853, pag. 365) auseinander gesetzt. Die oben besprochene Einrichtung des Sprunggelenkes macht die schiefe Lage der Flexionsebene unabhängig von der Lage des Astragalus, wodurch, selbst für den Fall als beide Füsse mit vorwärts gewendeten Zehen aufgesetzt, die Fussaxen daher mehr parallel sind, die Flexionsebenen dennoch sich schneiden werden. Ferner, wenn wir mit auswärts gewendeter Fusspitze gehen, und die Last des Leibes durch Streckung des hinten aufgesetzten Fusses auf den vorgesetzten Fuss übertragen, so geschieht das in einer Richtung, die wenn nicht ganz, doch beinahe senkrecht auf die Drehungsaxe des Sprunggelenkes des vorgesetzten Fusses fällt. Da die Axe durch die Dorsalflexion im unteren Gelenke immer mehr senkrecht auf die Fussaxe fällt, so würde, wenn die schiefe Richtung der Flexionsebene blos durch die Neigung der Drehungsaxe gegen die Mittelebene bedingt wäre, dieser mechanische Vortheil der schiefen Lage der Flexionsebene elidirt werden für den die Last des Leibes aufnehmenden Fuss, weil dieser im selben Momente gebogen wird, wo er die Leibeslast aufnimmt. Durch diese Einrichtung wird es überhaupt erst möglich, dass bei allen Attituden des Leibes die Flexionsebene eine schiefe Richtung bekömmt.

An den Bewegungen des Fusses gegen den Unterschenkel betheiligt sich wesentlich noch ein zweites Gelenk, nämlich das des Sprungbeines gegen die übrigen Fussknochen. Es tritt dieses Gelenk zu dem oberen in ein ähnliches Verhältniss, wie es Günther für die beiden Gelenke der Handwurzel früher schon beschrieben hat. Um eine bestimmte Excursion des Fusses auszuführen, betheiligen sich die beiden Gelenke bald wechselnd, bald gleichzeitig, meist aber in der Art, dass das Maximum der Bewegung in dem einen erst dann eintritt, wenn das andere ausgespielt hat. Durch die Reihe der Säugethiere verfolgt, sieht man die Summe der Flexionsbewegung des Fusses verschieden vertheilt, bald ist es das obere, welches eine grössere Excursion hat, während das untere zu einer straffen Amphiarthrose zurücksinkt, bald sind beide mehr gleichmässig beweglich. Dabei

ist nebst der verticalen Flexion auch noch die laterale Verschiebung und ihre Vertheilung auf die beiden Gelenke zu berücksichtigen.

Das Sprunggelenk der Wiederkäuer und des Schweines ist da wieder am meisten geeignet, die gegenseitigen Beziehungen der beiden Gelenke zu einander kennen zu lernen.

Messungen am präparirten Gelenke eines Rindes ergaben für die ganze Excursion der Beugung einen Winkel von 110°, von diesen wurden blos 15° ausschliesslich im oberen Sprunggelenke ausgeführt. Wenn die Tibia aus der extremen Strecklage in die Beugelage geführt wurde, und sie einen Winkel von 15° zurückgelegt hat, so beginnt schon allmählich die Beugung im unteren Gelenke, bis sich bei 55° die Tibia in Maximo ihrer Flexion einstellt. Die anderen 55°, also die Hälfte der ganzen Excursion wird im Tarsalgelenk beendigt.

Das Sprungbein des Rindes besteht aus zwei Rollen, die obere grössere articulirt mit der Tibia, die untere ist der Kopf des Sprungbeines. (Vergl. das ähnlich gebaute Sprungbein vom Schweine in Fig. 10 und 13.) Die Erhabenheiten der Schienbeinsrolle sind hoch, beinahe leistenförmig, die äussere höher als die innere. Die Erhabenheiten der Kopfrolle sind beinahe gleich. Die Fersenbeinfläche des Sprungbeines ist nicht concav wie sonst bei Säugethieren, sondern convex in der Richtung von vorne nach rückwärts. Der ganze Knochen bildet also beiläufig eine elliptische Rolle, die zwischen dem Fersenbeine einerseits und einem dem Vorderfusse angehörigen, dem Naviculare und Cuboideum entsprechenden Knochen andererseits eingekeilt ist. Er ist in diesem Raume um eine Axe beweglich, die durch die Vorderenden der beiden oberen Rollhügel gezogen werden kann (Fig. 10 *c*) und zugleich Axe ist der unteren Cylinderfläche, die die Gelenkverbindung mit dem Fersenbein herstellt. Die Zeichnungen Fig. 8 und 9 sind Entwürfe der inneren und äusseren Seitenansicht eines linken Gelenkes, worin gerade Durchschnitte, die die beiden inneren und äusseren Rollhügel des Talus schneiden, eingetragen sind. *c* ist die Axe der Fersenbeinfläche und Drehungsaxe des ganzen Knochens, *a* bezeichnet die Lage der oberen, *b* die Lage der unteren Axe. Fig. 8 ist in Maximo der Flexion des oberen Gelenkes, Fig. 9 in Maximo der Extension beider gezeichnet.

Man ersieht aus der Form des Taluskopfes, der hier zu einer Rolle geworden ist, dass die sogenannte Pro- und Supination des Fusses hier ganz elidirt ist. Blos eine Flexion mit lateraler Verschiebung ist möglich.

Die Veranlassung, durch welche das Sprungbein bei dieser Bewegung an die Tibia zur Mit- und Folgebewegung sich anschliesst, wird theils durch den Bandapparat, theils durch eine eigenthümliche Vorrichtung am äusseren Knöchel gegeben.

Nebst dem beiderseitigen oberflächlichen Bandapparat geht innen vom Knöchel der Tibia ein Band zur hinteren Peripherie des Sprungbeines, das hinter der Drehungsaxe des oberen Gelenkes sich ansetzt, Fig. 8 α; ein zweites geht zum Fersenbein, Fig. 8 β. Nach aussen ist ein in der Tiefe gelegenes *Ligamentum fibulare tali posticum*, Fig. 9 γ, dessen Ansätze sich ähnlich verhalten, wie am inneren oberen. Diese beiden Bänder hemmen, wegen ihrer excentrischen Befestigung, die Flexion und fixiren das Sprungbein an die Tibia; bei fortgesetzter Spannung der Beugemuskeln wird die Bewegung der Tibia an den nun fest an sie angeklemmten Talus übertragen, wobei seine Drehungsaxe *c* zum Hypomochlion wird.

Dieser Mechanismus würde blos eine Folgebewegung des Sprungbeines veranlassen; doch wird schon vor der Einstellung der Tibia in die extreme Flexion durch die Vorrichtung am äusseren Knöchel eine Mitbewegung des Sprungbeines eingeleitet. Bekanntlich ist der äussere Knöchel des Unterschenkels vom Rind ein Rudiment der Fibula, welches höchstens

im Alter mit der Tibia verwächst, sonst nur durch eine Knorpelfuge und straffes Periost mit ihr vereinigt ist. Dieses Fibularrudiment hat an seiner inneren, dem Sprungbein zugewendeten Fläche einen vorspringenden keilförmigen Fortsatz, der unter dem äusseren Rollhügel des Talus in einer Rinne desselben läuft. Er ist gekrümmt. Seine obere Fläche adaptirt sich in ihrer Krümmung der Krümmung des äusseren Rollhügels vom Sprungbein, ist also Abschnitt eines mit ihm concentrischen Kreises (?), die untere Fläche des Keiles dagegen ist Abschnitt eines kleineren Kreises, dessen Centrum vor dem der Rollhügel liegt. Indem sich die Peripherien beider Kreise vorne einander nähern, bekömmt der Knochen eine keilförmige Gestalt; sein schmäleres Ende sieht nach vorne. In Fig. 9 ist ein Durchschnitt des *Malleolus externus* und des äusseren Theiles vom Fersenbein dargestellt; man sieht zwischen Tibia und Calcaneus den eingeschobenen Keil, dessen hinteres Ende noch mit der Tibia in Verbindung steht. Auch vorne an der Tibia ist noch ein Stückchen des Fibularrudimentes zu sehen. Die untere Fläche des Keiles läuft auf der oberen Fläche eines Fortsatzes des Fersenbeines, der in der äusseren vertieften Fläche der Sprungbeinsrolle liegt. Diese ist also wegen der Convergenz beider Knöchel gegen einander fest eingekeilt, und fällt erst durch Ablösung des Fibularrudimentes aus seiner Verbindung mit der Tibia leicht heraus.

Bei den Bewegungen der Tibia nach der Beugerichtung drängt sich dieser keilförmige Fortsatz der Fibula immer mehr zwischen die vorragenden Rollhügel und den Fortsatz des Fersenbeines, wodurch das Sprungbein hinten gehoben und der Drehung um seine Axe allmählig zugeführt wird.

Entsprechend der Axe, um welche sich das Sprungbein rotirt, ist es an das Fersenbein durch einen kurzfaserigen straffen Bandapparat befestigt, der dem *Apparatus ligamentosus* des *Sinus tarsi* entspricht, und durch seine Torsion die Rotation des Sprungbeines um seine Axe hemmt. Hier ist also dieser Bandapparat Hemmung für die Flexionsbewegung. An der inneren Seite wird diese Hemmung durch ein *Ligamentum talo-naviculare* hervorgebracht, welches Fig. 8 *δ* am Endpunkte der Umdrehungsaxe der Kopfrolle entsteht und radienförmig zum Kahnbeine hinzieht. Wird bei der Beugung das Sprungbein um seine Axe *c* gedreht, so bewegt sich der Ursprung dieses Bandes nach hinten und zieht auch das Naviculare nach hinten gegen das Fersenbein. Der Zwischenraum zwischen Naviculare und Fersenbein, gleichsam die Pfanne für das Sprungbein, wird dadurch kleiner, entsprechend dem kürzeren Durchmesser *d* des Sprungbeines, der nun bei der extremen Flexionslage in diesen Raum zu liegen kommt. Das Nähern des Kahnbeines ist desshalb möglich, weil es innen nicht ganz das Fersenbein erreicht, wie die punktirten Begrenzungslinien beider Knochen in der Zeichnung zeigen, und nach aussen beide Knochen durch eine nach hinten schief absteigende Gelenkfläche articuliren (Fig. 9), die eine Verschiebung in dieser Richtung zulässt.

In der extremen Strecklage des oberen Gelenkes fällt die Richtungslinie der Tibia hinter die Drehungsaxe *c* des Sprungbeines; ein in der Richtung der Tibia gehender Druck keilt daher den längeren Durchmesser des Sprungbeines in seine veränderliche Pfanne ein und hemmt jede Flexion im unteren Gelenke, was für die Stabilität der Strecklage nicht ohne Einfluss ist. Eine Beugung im unteren Gelenke führt nothwendig auch eine Beugung im oberen mit sich.

Nach demselben Plane ist auch das Sprunggelenk des Schweines gebaut, nur ist der keilförmige Fortsatz der hier ganz entwickelten Fibula nicht so tief in das Sprunggelenk eingesenkt, daher er sich erst nahe nach vollendeter Beugung der Tibia an den oberen Fersenbeinfortsatz anstemmt.

Andeutungen dieses Apparates am äusseren Knöchel finden sich auch schon unter den Nagern beim Hasen, wo das untere Fibularende mit dem Fersenbein in gelenkiger Verbindung steht. Auch bei *Hyrax* finde ich eine ähnliche Bildung.

Wegen des geringeren Umfanges der Flexionsbewegung im oberen Gelenke ist auch die schiefe Gangrichtung am oberen Sprunggelenke des Rindes minder auffallend, doch wahrnehmbar. Deutlicher ist sie schon beim Schweine auszunehmen. Da die Flexionsbewegung auch auf das untere Gelenk übertragen ist, musste ihre schiefe Gangrichtung mit der seitlichen Verschiebung gleichfalls dort auftreten; am Schweinsfuss ist auch diese schiefe Richtung der Kopfrolle deutlicher als am Rinde, da scharfe Leisten vorspringen, und diese die Gangrichtung markiren (Fig. 10). Dass sie dem Rinde nicht fehlt, geht schon aus dem Umstande hervor, dass man bei der Beugung im unteren Gelenke den inneren Rollhügel des Sprungbeinkopfes nach innen sich vordrängen sieht.

Im oberen Gelenke hat die Gangebene eine schief nach aussen, im unteren eine schief nach innen gehende Richtung, wodurch bei der extremen Flexion der *Malleolus externus* aussen, das *Caput tali* innen hervorragt. Der Grund dieser Verschiedenheit in der Gangrichtung beider Gelenke liegt in der Drehung des Sprungbeines. Wenn das Sprungbein nach Fixation der Tibia durch anhaltende Spannung der Flexoren die Bewegung fortzusetzen sucht, so bildet es einen zweiarmigen Hebel, dessen Hypomochlium seine Drehungsaxe *c* ist, die quer auf der Fussaxe liegt. Sein Längendurchmesser liegt schief auf dieser Axe; oben ragt die Rolle aussen, unten der Kopf nach innen vor. Die Schienbeinsrolle geht bei der Beugung nach vorne und aussen, die Kopfrolle nach hinten und innen. In voller Umdrehung um seine Axe würde dieser Knochen mit seinen Enden zwei Parallelkreise in umgekehrter Richtung beschreiben, der äussere würde nach vorne begonnen, der innere nach hinten ausgeführt werden. Diese Kreise würden senkrecht auf die Axe gestellt sein, wenn die Gangrichtung eine gerade wäre, da aber die obere Rolle einen schief auswärts gerichteten Gang hat, muss die untere Rolle eine schief einwärts gewendete Gangrichtung einhalten. Die obere Rolle ist am linken Fuss eine rechtsläufige Schraube (laeotrop nach Listing), daher die Ganglinie der Kopfrolle desselben Fusses Abschnitt einer linkslaufenden (dexiotropen nach Listing) Wendellinie sein muss; und umgekehrt am rechten Fusse.

Die Axen beider Rollen sind unter einander nicht parallel, sondern convergiren nach innen gegen die Drehungsaxe des ganzen Sprungbeines. Wären sie parallel, dabei die Ablenkung oben und unten, und die Hebelarme des Sprungbeines gleich; so würde in der Richtung des Fusses gegen die Tibia nichts geändert; wegen ihrer Convergenz nach innen aber neigen beide ein wenig mit ihren Flexionsebenen nach aussen zusammen; kaum dass dadurch aber bei der Strecklage die hintere (untere) Seite des Fusses nach innen bemerkbar gewendet wäre. Eine eigentliche Drehung des Fusses mit Wendung seiner Sohle ist in diesen Gelenken nicht ausführbar.

Eine ausgiebige Wendung des Plattfusses um das Sprungbein kann auf zweifache Weise zu Stande kommen. Entweder es wird der Fuss unabhängig von seiner Flexionsbewegung um eine mit seiner Länge mehr weniger gleichlaufenden Axe gedreht, die durch den Kopf des Sprungbeines geht; in welchem Falle der Kopf entsprechend der Axe kugel- oder kegelförmig geformt sein könnte. Nur wenn er auch in der Richtung von vorne nach rückwärts

gekrümmt ist, könnte das Sprungbein auch Flexionsbewegungen ausführen; dann müsste aber diese Queraxe durch seinen Mittelpunkt durchgehen, und das Fersenbein diese Bewegungen mitmachen, oder durch eine schief nach vorne abfallende Gelenkfläche ein Auf- und Niedergleiten desselben an sich gestatten. Rotations- und Flexionsbewegung wären da auf zwei vertical auf einander gestellte Axen vertheilt.

Eine andere Art Wendung des Plattfusses vereint mit der Flexionsbewegung um dieselbe Axe wird dadurch zu Stande kommen können, dass die Axe der Flexionsbewegung nicht quer, sondern schief auf die Fussaxe und den Horizont gestellt ist, wodurch die Flexionsebene eine Neigung gegen den Horizont bekömmt. Wenn, ohne das obere Gelenk zu berücksichtigen, nur die Axe des Sprungbeinkopfes schief nach aussen und hinten gerichtet ist, so wird, wenn der Fuss in diesem Gelenke eine Plantarflexion macht, die Sohle einen zugleich nach innen gerichteten Gang nehmen, und diese Wendung um so ausgiebiger sein, je mehr die Drehungsaxe zugleich aussen schief gegen den Horizont sich neigt.

Im ersten Falle geschieht die Rotation um eine Axe, die die Flexionsbewegung ausschliesst, im zweiten Falle geschehen beide Bewegungen um dieselbe Axe. Dass aber Rotation und Flexion jede um eine besondere Axe des Sprungbeines vor sich gehen würden, ist in der Reihe der Säugethiere ohne Beispiel. Der Kopf des Sprungbeines ist immer nur um eine Axe gekrümmt. Je vollkommener die eine Bewegungsweise in diesem Gelenke, beschränkter ist die andere.

Bei *Bradypus* ist eine Rotation mit Ausschluss jeder Flexion, sie geschieht um eine, nach der Länge des Sprungbeines liegenden Axe, die mit der Fussaxe einen nach innen offenen spitzigen Winkel bildet. Die beiden unteren Gelenksverbindungen des Sprungbeines tragen Flächen, welche vollkommen symmetrisch um diese eine Axe angelegt sind. Das Köpfchen ist quer abgerundet, vorne flach-kugelig; die Fersenbeinfläche rinnenförmig quer auf die Axe gekehlt, in Verbindung mit einer convexen schmalen Leiste des Fersenbeines. Durch diese Leiste und das Köpfchen vom Talus ist die Axe zu ziehen. Da das Fersenbein fest mit den übrigen Fusswurzelknochen verwachsen ist, so ist jede Flexions-Excursion aus diesem Gelenke beseitiget, auf deren Kosten die vollkommenste Rotation sich entwickelt hat, die überhaupt bei Säugethieren beobachtet wird.

Die zweite Art Rotation, die im Vereine mit der Flexion um eine schief gestellte Drehungsaxe ausgeführt wird, findet sich typisch bei allen Säugethieren, selbst der oben besprochene Fall bei *Bradypus* lässt sich auf diesen, wie später gezeigt wird, zurückführen. Die Plantarflexion im unteren Gelenke führt zur Einwärtswendung der Sohle, die Dorsalflexion führt die Sohle in die horizontale zurück; der äussere Fussrand kann wenig nur gehoben werden. Diese Rotation bedingt eine solche Richtung der unteren Sprungbeinsaxe, dass diese aussen mehr zurück weicht, wodurch die Bewegungsebene den äusseren Fussrand schneidet, und um so schiefer den Horizont nach innen gerichtet schneiden wird, je mehr die Axe aussen auch gegen den Horizont sich neigt.

Die schiefe Richtung der Ganglinie gegen die Drehungsaxe am Sprungbeinkopfe, die bei horizontaler Lage der letzteren nur eine Lateralverschiebung bedingt und die Neigung der Flexionsebene gegen den Horizont nicht ändert, kömmt bei der schiefen Lagerung der Axe gegen den Horizont wohl auch in Betracht, da sie die Flexionsebene noch mehr nach innen ablenkt.

Beide Bewegungsexcursionen im unteren Gelenke, die Rotation und die Flexion in der Profilprojection, geben, wie es scheint, überall eine gleiche Summe von

Beweglichkeit, die aber je nach der Lage der Axe in ungleiche Theile getheilt ist. Hat die Axe des *Caput Astragali* die Lage, dass sie bei 45° gegen die Fussaxe und gegen die Horizontale geneigt ist, so sind die Excursionswinkel beider Bewegungen einander gleich, und es ist durch diese Stellung der Axe bereits die Möglichkeit gegeben, die Plattfüsse einander gegenüber zu stellen. Eine grössere Neigung scheint auch kaum bei *Bradypus* zu sein, in der den übrigen Säugethieren Parallellagerung des Astragalus. Wo eine vollständige Wendung des Plattfusses bei diesem Winkel der Axe nicht ganz gelingt, liegt dies an der Hemmung der freien Beweglichkeit des Sprungbeines durch seine Verbindung mit dem Fersenbeine. Die Varianten, die daher in der Lagerung der Axe des Kopfes zu finden sind, liegen zwischen 45° Neigung und der Horizontalen.

Da beim Schweine und den Wiederkäuern die Drehungsaxe des Sprungbeinkopfes beinahe quer auf die Fusslänge und horizontal liegt, so ist eine Wendung des Plattfusses hier kaum zu bemerken. Die Bewegung in der Verticalprojection ist die beinahe allein mögliche. Diese Flexionsbewegung des Sprungbeines bedingt hier eine in demselben Sinne gekrümmte Verbindungsfläche mit dem Fersenbeine. Ihre convexe Rollfläche ist Abschnitt einer Cylinderoberfläche mit querer Axe, der eine concave Gelenkfläche des Fersenbeines gegenüber steht. Würden diese beiden Axen in einander fallen, so hätte das Gelenk des Kopfes eine umfangreiche Excursion, sie liegen aber über einander, durch einen beim Rinde etwa 3 Linien betragenden Zwischenraum getrennt, und es kommt dadurch zu der oben besprochenen Hemmung der Bewegung.

Die Kenntniss der Mechanik des unteren Sprunggelenkes der Wiederkäuer und Schweine führt zum Verständniss dieses Gelenkes beim Menschen.

Indem beim Menschen das Sprungbein durch die extremen Flexionsbewegungen der Tibia zur Mitbewegung eingeladen wird, dreht sich dieser Knochen nicht mehr um eine quere Axe wie beim Rinde, sondern um eine schiefe, nach aussen und hinten gerichtete. Nach neueren Angaben zieht Herm. Meyer die untere Drehungsaxe des Astragalus aus dem oberen Rande des *Caput Astragali* gegen die Mitte des unteren hinteren Randes des Calcaneus. (Lehrbuch der physiologischen Anatomie des Menschen 1856, pag. 139.) Es wird bei dieser Bewegung des Talus der *Malleolus externus* bei der Streckung schief nach innen gehoben, bei der Beugung schief nach aussen gesenkt. Es geschieht aber die Bewegung des Sprungbeines wie beim Rinde auch beim Menschen gewiss um zwei Axen, von denen die eine dem Fersenbeingelenke, die andere dem Kahnbeingelenke zugehörig ist. Beim Rinde fällt die Axe des Fersengelenkes in das Sprungbein, da dieses die convexe Gelenkfläche trägt, beim Menschen in das Fersenbein, da dieses, vielleicht wegen des festeren Aufruhens des Astragalus, die beiderseits schief abfallende concave Gelenkfläche trägt. Diese bildet den Abschnitt eines Kegels, dessen Spitze dem *Sustentaculum tali* zugewendet ist, und dessen Axe von hier aus gegen die Mitte der äusseren Fläche des Calcaneus gerichtet ist. Die Ganglinie hat übereinstimmend mit dem oberen Sprunggelenke eine schief auswärts gehende Richtung. In Fig. 16 ist auf die obere Fläche des Fersenbeins in horizontaler Projection die Axe und die Gangrichtung eingezeichnet. Wenn auf die bekannte Weise mit einem Stift vom Naviculare aus die Ganglinie am Kopfe des Astragalus markirt wird, so sieht man wie diese nach der Länge seiner Gelenkfläche läuft; zieht man mit Rücksicht auf die schiefe Gangrichtung die Axe des Kopfes, so hat sie mit der vorigen beinahe parallel die Richtung durch den Hals in den *Sinus Tarsi* bekommen. Wenig vor dem Ende der inneren Malleolarfläche und senkrecht unter der Anheftung des

Ligamentum fibulare calcanei am Fersenbein sind ihre Durchtrittspunkte. Betreffs ihrer Neigung zur Fussaxe, bildet sie mit ihr einen Winkel von 45°; gleiches Verhältniss in Neigung zeigt sie gegen den Horizont. Wenn man auf eine Unterlage eine Linie zieht, auf diese eine zweite unter 45° geneigte, und legt den Fuss bei belasteter Tibia so darüber, dass die Längslinie durch das Köpfchen des zweiten Mittelfussknochens und den unten aufliegenden Fersenhöcker (die Fussaxe) gedeckt wird, so zeigt die unter 45° gezogene zweite Linie die möglichste Übereinstimmung ihrer Richtung mit der Lage beider unteren Axen des Sprungbeines. In Fig. 11 sind an einem linken Astragalus des Menschen alle Axen in horizontaler Projection gezeichnet. *F* Richtung der Fussaxe in der Lage bei aufrechtem Stande, *a* Axe des oberen Gelenkes, *b* Axe des Taluskopfes, *c* Axe des Fersenbeingelenkes. Beiderlei Gelenkflächen des Astragalus und Calcaneus sind vollkommen congruent, und in genauem Contacte dann, wenn die Tibia die Stellung hat, die ihr beim aufrechten Stande zukömmt. In dieser Lage sind beide Axen parallel. Jede Lageveränderung des Sprungbeines stört den Parallelismus der Axen und stört den innigen Contact der drei Knochen. Bei jeder Plantarflexion neigt sich die Axe des *Caput tali* immer mehr der Fussaxe zu, wodurch gegen Ende dieser Bewegung die Flexion abnimmt, die Rotation dagegen zunimmt. Anfangs dagegen ist die Flexion die ausgiebigere Bewegung. Der Astragalus wird bei der Dorsalflexion über die schief aufsteigende Fläche des Fersenbeines nach aussen und etwas nach vorne geschoben, bei der Plantarflexion nach innen und hinten verschoben, und die äussere Malleolarfläche mehr aufwärts gewendet. Diese Verschiebungen des Talus bewirken die Spannung der Ligamente und leiten die Hemmung ein, welche, wegen Übertritts der Bänder von den Unterschenkelknochen über den Talus zum Calcaneus, auch die Bewegung im oberen Gelenke einzustellen vermag.

Die Duplicität der Axen des ganzen Astragalus hindert die Rotation und Flexion des Kopfes, und beschränkt sie auf eine geringere Excursion als durch den Neigungswinkel der Axe zu erwarten wäre. Ohne Zuhülfenahme anderer Gelenke kann der Mensch beide Sohlen einander nicht vollkommen zuwenden.

Den beiden Bewegungen des *Caput Astragali* im unteren Gelenke liegt daher nur eine Axe zu Grunde, die Rotation ist Mitbewegung der Flexion. Auf Kosten der ersteren ist die Winkelexcursion der letzteren verringert. Beide Bewegungen erleiden durch die ausserhalb der Axe des Capitulum liegende Fersenbeinaxe eine um so grössere Hemmung, je mehr beide Axen sich kreuzen und je weiter aus einander sie liegen. Die Bewegungen des unteren Gelenkes sind wieder Folgebewegungen der Flexion im oberen Gelenke, gewissermassen Fortsetzungen derselben.

Je näher also beide unteren Axen des Sprungbeines einander liegen, desto weniger ist die Fersenbeinverbindung den Bewegungen des *Caput Astragali* hinderlich. Das grössere Rotationsvermögen des Fusses der Affen hat hauptsächlich darin seinen Grund. So weit ich nämlich die Form des Sprungbeines bei den Affen zu untersuchen Gelegenheit hatte, fand ich überall ein im Verhältniss zur Breite der Sprungbeinsrolle bedeutend verlängertes Capitulum, wodurch dieses auf einen langen Hals zu sitzen kömmt. Fig. 12 ist das linke Sprungbein von einem *Cercopithecus*, die grössere Länge des Knochens im Verhältniss zu seiner Breite bringt natürlich beide schief liegenden Axen einander näher, ohne dass die Neigung der Axen gegen die Fussaxe wesentlich geändert würde. Selbst der menschenähnlichste Affe, der *Chimpanse*, von welchem ich nur ein junges Exemplar untersuchen konnte, zeigte gegenüber

der menschlichen Bildung eine Verlängerung des Sprungbeines. Das untere Gelenk wird also beim Affen dadurch beweglicher, verliert aber damit die Stabilität, die zum aufrechten Stande erforderlich ist.

Ein gänzliches Zusammenfallen der Fersenbeinaxe mit der Axe des *Caput Astragali* ist nur bei *Bradypus* zu finden. Die schmale Kante des Fersenbeines ist dort gar nicht geeignet den Unterschenkel stabil in aufrechter Lage zu tragen; wie der Fuss von oben her belastet wird, wendet sich das Sprungbein nach innen, und der gekrümmte Fuss legt sich auf seinen äusseren Rand auf. Der Astragalus nimmt eine Plantarflexionslage als Mittellage an. Die Drehungsaxe des Köpfchens ist dadurch der Fussaxe näher gerückt, und schliesst nun jede Flexionsbewegung aus. Die äussere Malleolarfläche kömmt nach oben zu liegen, und wird desshalb von Cuvier in seinem „Ossemens fossiles“ die obere Fläche des Sprungbeines genannt.

Aus der Anordnung der Musculatur ist bereits die Einheit der Bewegungen des Fusses durch Weber nachgewiesen worden. Die Extensoren und Flexoren des Sprunggelenkes sind zugleich die Pro- und Supinatoren desselben. Dasselbe Resultat ergibt sich auch aus den Anordnungen des Gelenkes. Eine besondere, von der Flexions- verschiedene Rotationsaxe des Fusses existirt bei keinem Säugethiere; im unteren Astragalusgelenke werden die Bewegungen des oberen nur ergänzt. Der Mensch hat in dieser Beziehung eine Mittelbildung, deren ein Extrem im Fusse der Wiederkäuer und Schweine, das andere im *Bradypus* gegeben ist. Bei ersteren ist die Rotation, bei letzteren die Flexion des unteren Astragalusgelenkes beinahe gänzlich elidirt. Im Menschen sind beide vereint, doch jede vermindert. Erst die Summe der Excursionen beider wird der Grösse der Flexion im ersteren, und der Grösse der Rotation im anderen Falle gleichkommen. Die Affen nähern sich in dieser Bildung dem *Bradypus*, ohne die Flexion gänzlich zu verlieren; die Nager und Carnivora der Bildung der Wiederkäuer, ohne aber das Rotationsvermögen gänzlich einzubüssen, da bei diesen Thieren die Axe des *Caput Astragali* aus der queren Richtung ein wenig abweicht.

Es dürfte aufgefallen sein, dass bei den Wiederkäuern und Schweinen die Axe der *Articulatio talo-calcanea* durch das Sprungbein gehe, der Knochen daher unten convex gekrümmt sei, während bei den übrigen Säugethieren die Axe dieses Gelenkes durch das Fersenbein geht, die Convexität dieses Gelenkes also am Fersenbein lagert. Die Grenzen dieser Verschiedenheit weichen jedoch nicht über die typische Säugethierbildung des Sprungbeines hinaus. Es steht, wie bekannt, dieser Knochen des Menschen mit dem Fersenbeine durch zwei Gelenkflächen in Verbindung, die eine ruht auf dem Körper auf, die zweite auf dem *Sustentaculum tali*. Bald ist nun bei Thieren die eine, bald die andere in grösserem Umfange entwickelt. Die beim Menschen grössere hintere Gelenkfläche fehlt bei Wiederkäuern und Schweinen, und ist da nur durch einen rauhen, nicht überknorpelten Einschnitt angedeutet, der gerade unter der Rolle liegt. Es genügt Fig. 13, 14, 15, welche die untere Seite dreier rechter Sprungbeine vom Schweine, Hasen und Löwen darstellen, zu besehen, um den Übergang der einen Bildung in die andere zu entnehmen. Die convexe untere Fersenfläche des Talus vom Schweine und den Wiederkäuern ist die Gelenkfläche des *Collum capituli* vom Astragalus des Menschen. In allen Figuren sind die Bezeichnungen gleichlautend. *a* die untere Fläche der Rolle, *c* das *Collum capituli*, *b* das Capitulum selbst.

Eine geringe Rotation des Fusses ist auch im oberen Gelenke möglich, wenn die Drehungsaxe der oberen Rolle schief gegen die Fussaxe sich einstellt. Da aber, wenn das Sprungbein im unteren Gelenke beweglich ist, diese Axe nur nach innen in den Horizont

fällt, so hat diese Bewegung mit der im unteren den entgegengesetzten Sinn. Ist wie bei manchen Thieren, *Phoca*, *Bradypus*, das Sprungbein in geneigter (Pronations-) Lage bleibend eingestellt, so hat die Flexionsebene des oberen Gelenkes eine nach aussen schief gegen die Horizontale gewendete Richtung. Doch erreicht diese Drehung nie den Umfang der unteren, daher die Sohlen bei voller Strecklage des ganzen (beider) Gelenkes immer eine nach innen gerichtete Lage haben. Das obere ist beinahe ausschliesslich ein Flexionsgelenk. Die ausnahmsweise umfangreichere Drehung dieses Gelenkes um die Verticale der Tibia wurde oben bei *Phalangista* und *Didelphis* besprochen.

Beide Gelenke ergänzen sich; daher das Sprunggelenk mit Recht ein combinirtes Gelenk genannt werden kann. Indem ich vergleichend in meine Untersuchungen die Reihe der Säugethiere einbezogen habe, ist es mir noch gelungen, die schiefe Gangrichtung als typische Eigenthümlichkeit desselben für die Säugethiere und den Menschen nachzuweisen. Diese auf Grund einer regelmässigen Wendellinie mit constanter Steigung vor sich gehende Gangweise lässt sich noch in anderen, und zwar nicht allein an Säulen- und Kegelgelenken mit Bestimmtheit nachweisen. Möge dieser Versuch ein bisher unbeachtetes Moment in die Lehre von den Gelenken einzuführen mindestens Veranlassung geben, der Anatomie und Mechanik der Gelenke neue Kräfte zu gewinnen.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

TAFEL I.

Fig. 1. Rechte Fusswurzel vom Panther.
Fig. 2. Zwei Gypsabgüsse seiner Sprungbeinsrolle zu einem Schraubenstück ergänzt.
Fig. 3. Linke Fusswurzel vom *Bradypus tridactylus*. Das Sprungbein in der den anderen Säugethieren parallelen Lage.
Fig. 4. Rechte Fusswurzel von *Halmaturus giganteus*.
Fig. 5. Rechtes Sprunggelenk vom Pferde mit den Ansätzen der inneren Lateralligamente und Bezeichnung seiner Bewegungsexcursion.
Fig. 6. Rechte Fusswurzel von *Didelphis virginiana*.
Fig. 7. Schema einer einfachen Schraubenspindel, welche der Sprungbeinsrolle des Menschen zu Grunde liegt. *A* die Axe. *B* Basis. *G G* Ganglinie.

TAFEL II.

Fig. 8. Linkes Sprunggelenk vom Rind. *c* die Axe der Fersenbeinfläche. *a* Axe der oberen Rolle, *b* Axe des *Capitulum Astragali*, α, β, δ Lateralligamente, *d* kurzer, *D* langer Durchmesser des Sprungbeines.
Fig. 9. Dasselbe Gelenk von aussen. *a*, *b*, *c* die Axen des Astragalus, γ *Ligamentum fibulare tali*.
Fig. 8 und 9 in halber natürlicher Grösse.
Fig. 10. Linkes Sprungbein vom Schweine, von oben gezeichnet. *A*, *C*, *B* Axen des Knochens.
Fig. 11. Linkes Sprungbein vom Menschen. *A*, *B*, *C* seine Axen, *F* die Fussaxe bei belasteter Tibia.
Fig. 12. Linkes Sprungbein von einem *Cercopithecus*.
Fig. 13. Untere Seite des rechten Sprungbeines vom Schweine.
Fig. 14. Dasselbe vom Hasen.
Fig. 15. Dasselbe vom Löwen. *a*, *b*, *c* bezeichnen in allen drei Figuren die entsprechenden Flächen.
Fig. 16. Linkes Fersenbein vom Menschen mit seiner Axe und den Ganglinien seiner oberen Gelenkfläche.

Fig. 1.

Fig. 2.

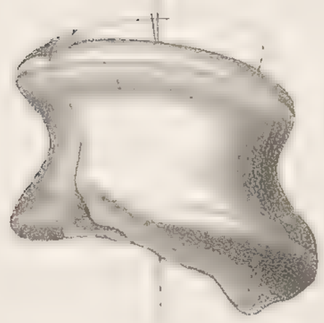


Fig. 5, ½ n. g.

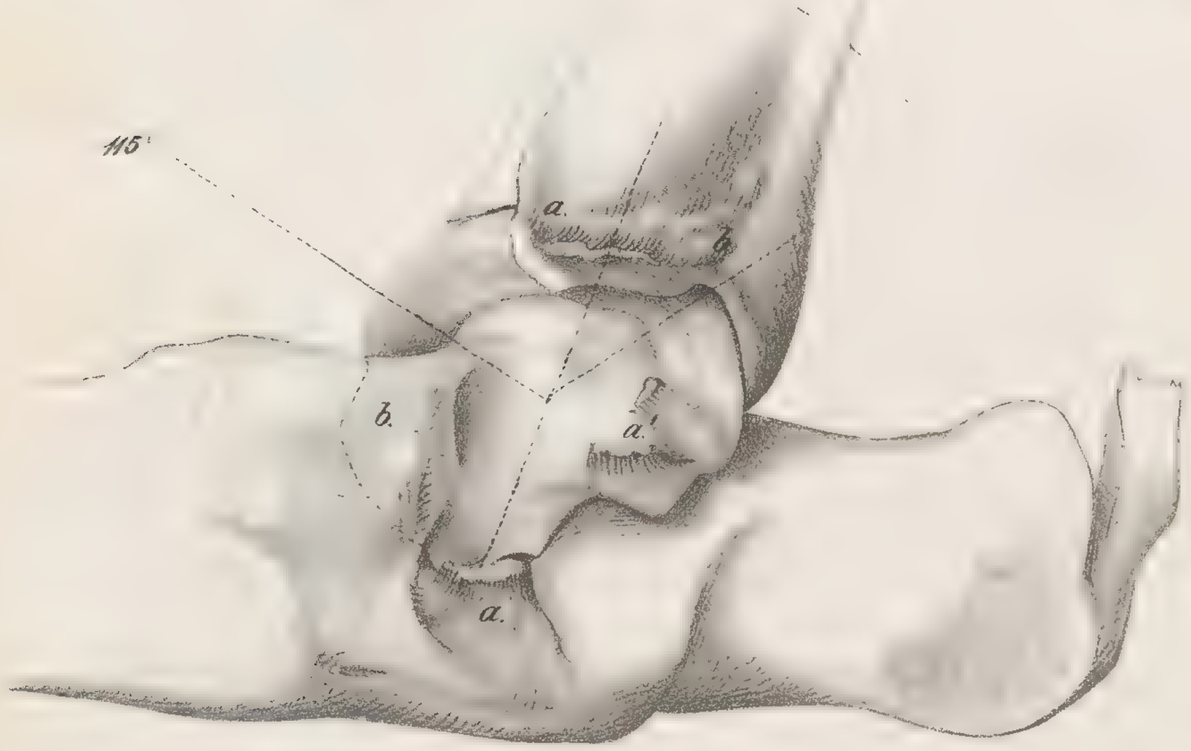


Fig. 3.

Fig. 6.

Fig. 4.

Fig. 7.

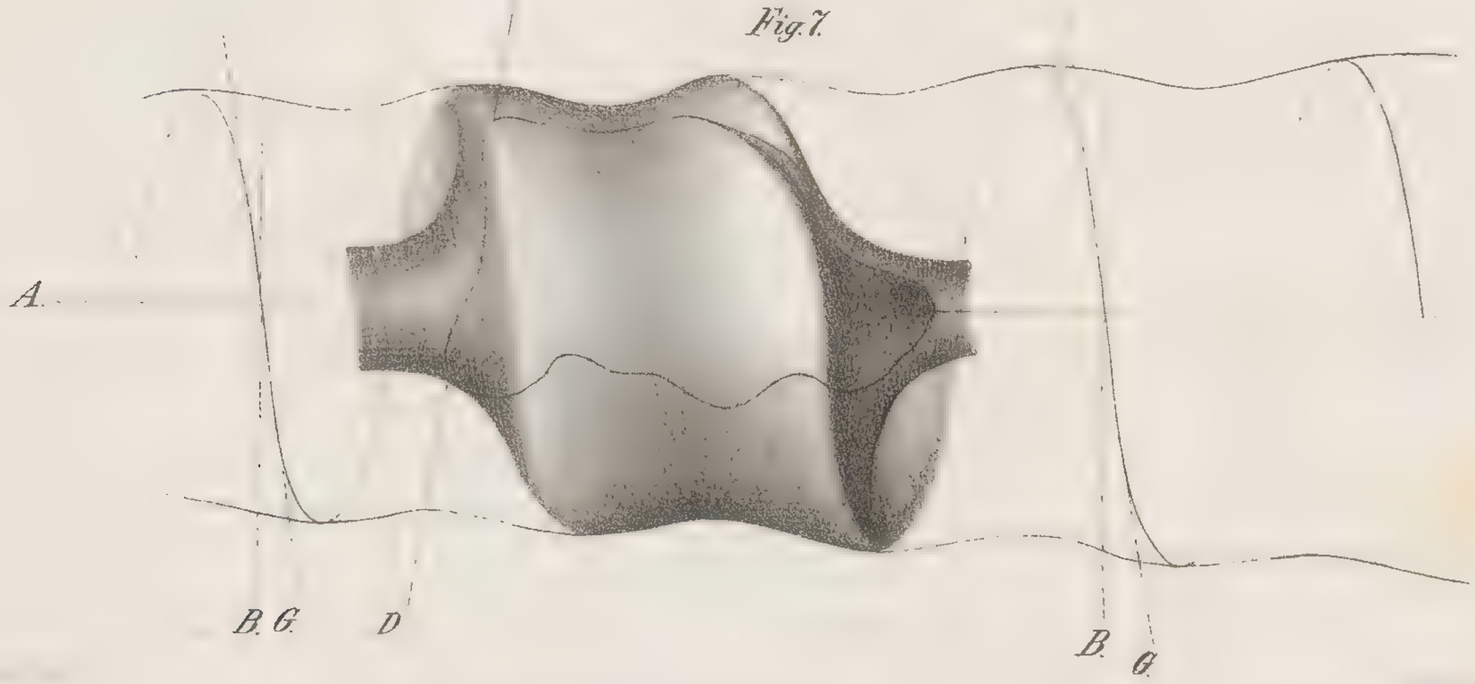


Fig. 10.

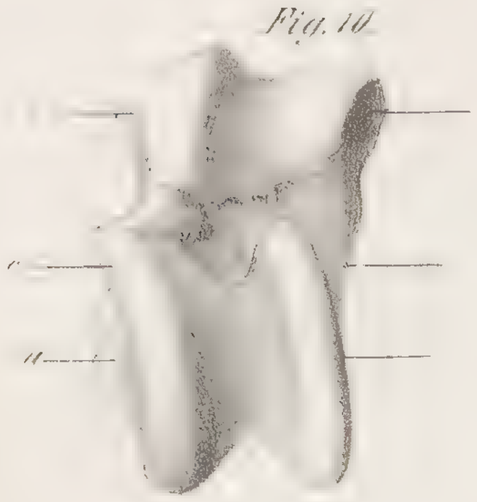


Fig. 12.

Fig. 11.

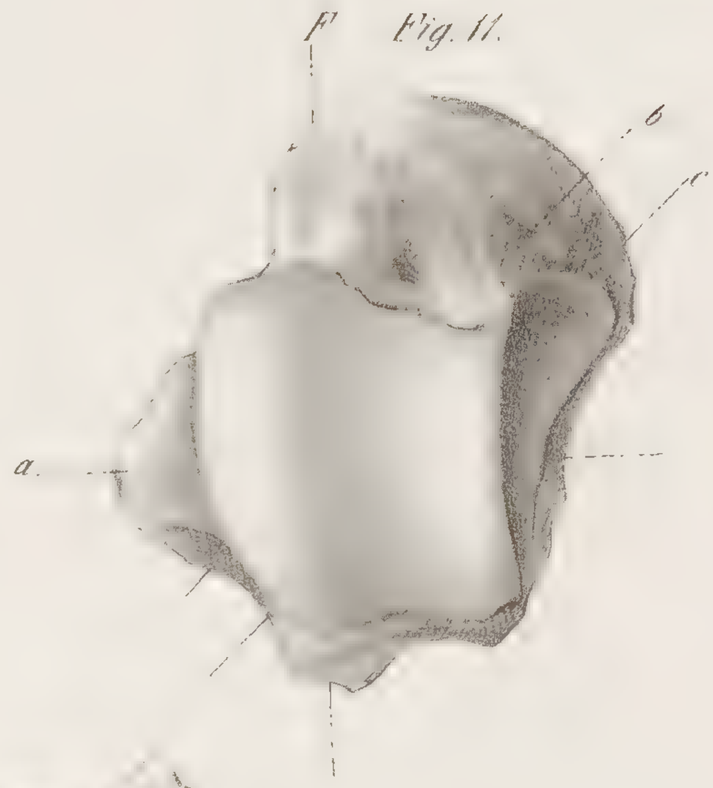


Fig. 9. ½ n. G.

Fig. 15.

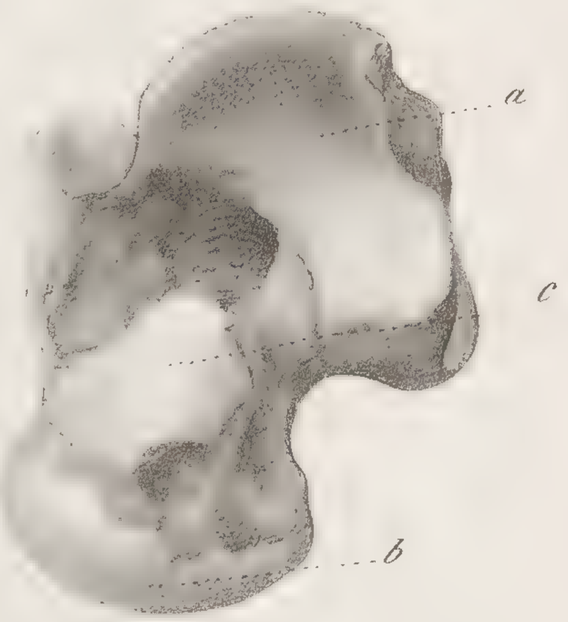


Fig. 16.

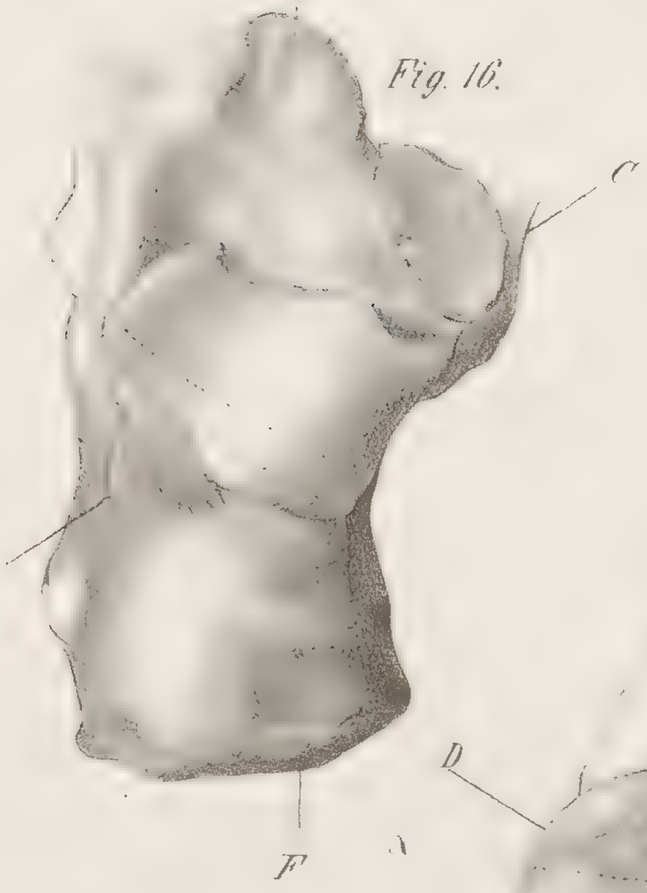


Fig. 14.

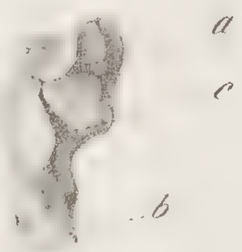


Fig. 8. ½ n G.

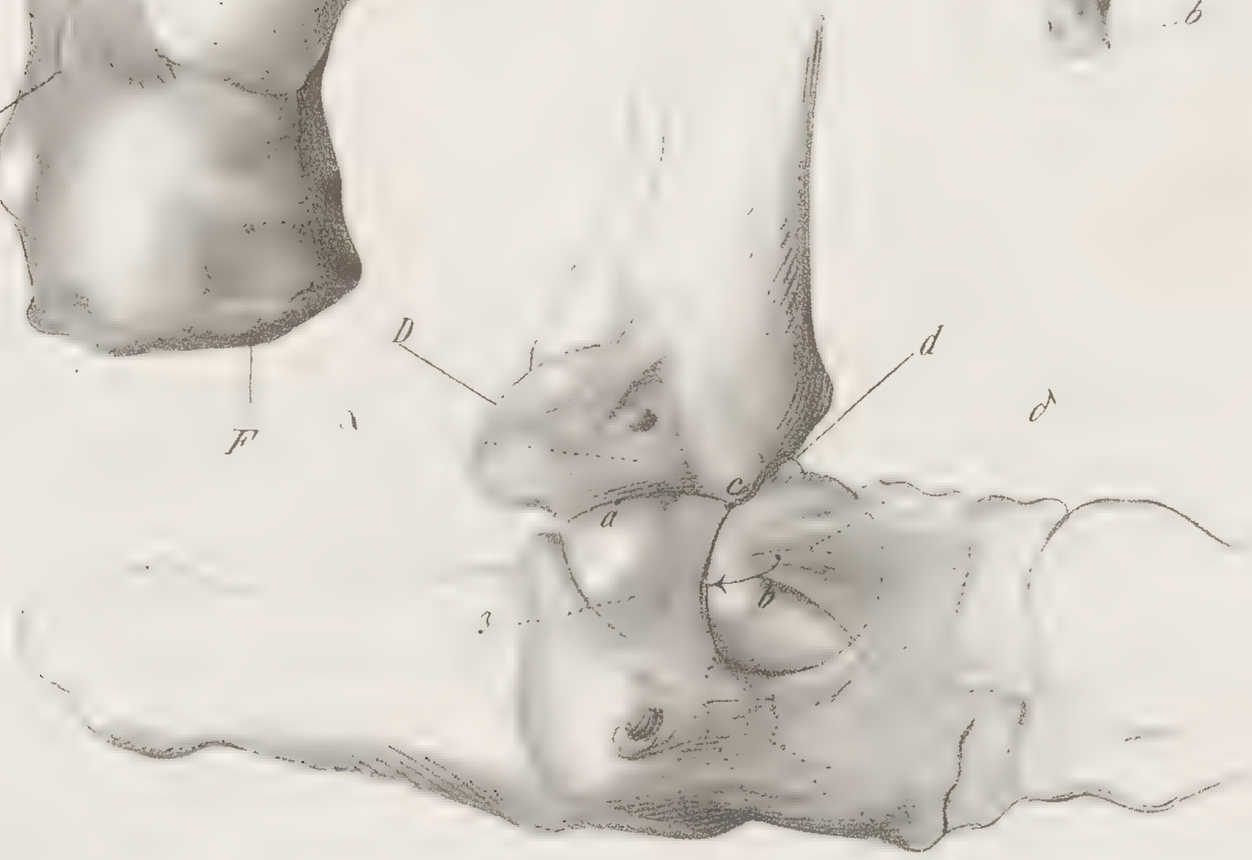
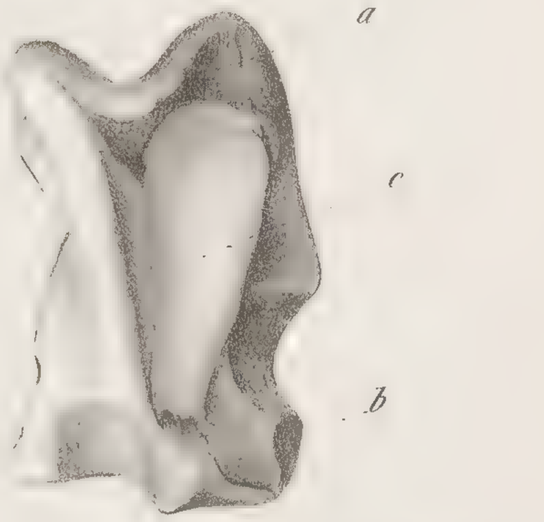


Fig. 13.



ÜBER

GASTROPODEN AUS DER TRIAS DER ALPEN.

VON

DR. MORIZ HÖRNES,

ERSTEM ADJUNCTEN AM K. K. HOF-MINERALIEN-CABINETE.

Mit 3 Tafeln.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 21. FEBRUAR 1856.

Die vorliegende Mittheilung ist ein Beitrag zur näheren Kenntniss der Fauna der alpinen Trias und soll zugleich als eine Ergänzung meiner früher erschienenen Abhandlungen[1]) dienen.

Die Auffindung einer grösseren Anzahl von Versteinerungen bei Unterpetzen nächst Schwarzenbach, dann die Entdeckung eines neuen Fundortes am Obir, nordwestlich von Eisenkappel in Unterkärnten, durch Herrn Lipold und die grosse und merkwürdige Übereinstimmung dieser Versteinerungen mit den wenigen Exemplaren, welche sich in den Sammlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt von Esino, unweit Varenna an der Ostseite des Comer-Sees, vorfanden, veranlasste mich an den um die Kenntniss der Alpen hochverdienten Herrn Escher von der Linth in Zürich die Bitte zu stellen, mir seine reiche Suite von Versteinerungen aus Esino zur Beschreibung und Abbildung zu überlassen. Herr Escher kam meinen Wünschen auf das Bereitwilligste entgegen und sendete seine sämmtlichen Stücke aus jenen Gegenden ein, wodurch ich in die angenehme Lage versetzt wurde, meine Untersuchungen mit jener Schärfe anzustellen, die nur ein zahlreiches und wohlerhaltenes Material gestattet.

Ausser den 12 Arten, welche auf den beiden ersten Tafeln abgebildet sind, die theils bei Esino, theils bei Unterpetzen oder am Obir, oder endlich an allen diesen Fundorten zugleich vorkommen, sind auf der dritten Tafel noch 15 Arten von Versteinerungen aus den Hallstätter Schichten abgebildet, die Herr Hofrath Dr. Fischer in München als neue Funde theils vom Sandling, theils von Teltschen bei Aussee in Steiermark eingesendet hat.

Was nun vorerst die Versteinerungen von Esino betrifft, so stammen dieselben nach Escher[2]) aus den Schutthalden der Nordseite des Val Pelaggia; sie kommen daselbst in einem dunkelgrauen bis schwarzen, mit weissen Kalkspathadern durchzogenen, dolomitischen

[1]) Über die Gastropoden und Acephalen der Hallstätter Schichten. Denkschriften der mathm.-naturw. Classe der kais. Akademie der Wissenschaften, Bd. IX, pag. 33. Über einige neue Gastropoden aus den östlichen Alpen; Denkschriften u. s. w., Bd. X, pag. 173.

[2]) Über die Trias in der Lombardei, ein Nachtrag zu dessen geologischen Bemerkungen über das nördliche Vorarlberg und einige angrenzende Gegenden, 1853, pag. 94.

Kalksteine vor, der unter den Hammerschlägen einen schwachen bituminösen Geruch von sich gibt. Man findet sie aber auch etwa $^1/_4$ Stunde weiter thaleinwärts in einem röthlichen, sehr zelligen Kalksteine, dessen ungemein häufige, bis 1 Fuss grosse Drusen mit Kalkspathkrystallen ausgekleidet sind; seine Schichten streichen St. 1—2, fallen etwa 60° westlich und scheinen die Unterlage der Bänke zu bilden, aus deren Zertrümmerung die angeführten Schutthalden hervorgegangen sind. Ganz ähnlicher, röthlicher und drusiger, die gleichen Chemnitzien, Natica u. s. f. enthaltender Kalkstein findet sich auch etwa halben Weges zwischen dem Auslauf des Val Pelaggia und dem Bacheinschnitte südlich von Esino inferiore in fast wagrecht liegenden, im Ganzen etwa 30 Fuss mächtigen Schichten; diese scheinen dort bedeckt zu sein von gelblich-weissem, feinkörnigem bis sandigem und zelligem Dolomit, in dem sich keine Petrefacten zeigen. Die Esino-Petrefacten kommen auch vor im dolomitischen St. 10 streichenden, 50° SW. fallenden Kalk, auf dem die Hauptkirche von Esino auf dem Vorsprunge zwischen den verschiedenen Thalzweigen erbaut ist. In der Verlängerung dieser ungefähr SO.—NW. laufenden Linie hat Hr. Escher die Petrefacten nicht weiter gesehen, dagegen sind sie sehr häufig am Nord- und Ost-Abfalle des Monte Croce und am ganzen Abhange zwischen Alpe di Cainallo und Sasso Mattolino.

Röthlicher, drusiger, dolomitischer Kalk, ganz gleich dem bei Esino, erscheint aber auch östlich von Varenna ob Vezio an der oberen Grenze des Dolomits, in welchen das Thal Esino grösstentheils eingeschnitten ist, und analoges Gestein, bei Val Vacchera mit *Chemnitzia* und *Natica*, steht ausgedehnt am Ufer des Comer-Sees zwischen C. Cicogna und Castello di Lierna an; Escher glaubt daher, dass sämmtlicher hier in Rede stehender Dolomit zwischen Val Sasina und dem Comer-See Einer Etage angehöre, und zwar derjenigen, welche in Vorarlberg, ferner bei Menaggio und Bellaggio die unmittelbare Grundlage der St. Cassian-Formation bildet, da der Dolomit des Val Vacchera wohl nicht zu trennen ist von dem bei Bellaggio und Limonta.

Nach dem vorliegenden Materiale aus Esino konnte ich, abgesehen von den von Curioni und Escher erwähnten Crinoidenstielgliedern, folgende 7 Arten unterscheiden: *Turbo depressus*, *Natica Meriani*, *N. lemniscata*, *N. Comensis*, *Chemnitzia eximia*, *Ch. gradata*, *Ch. Escheri*. Von diesen kommen *Natica lemniscata* und *Chemnitzia gradata* auch im Bleiberg-bau „Unterpetzen“ westlich von Schwarzenbach und am Obir nordwestlich von Eisen-kappel in Unterkärnten vor.

Nun finden sich aber zugleich an den letzteren Fundorten 4 Arten der häufigsten und bezeichnendsten Cassianer Ammoniten, nämlich: *A. Aon* Münst., *A. Gaytani* Klipst., *A. Johannis Austriae* Klipst., *A. Jarbas* Münst. — Arten, die auffallenderweise gerade zu den wenigen gehören, die in den Cassianer und Hallstätter Ablagerungen zugleich vorkommen, ausserdem aber noch 3 Gastropoden, welche auch in St. Cassian vorkommen, nämlich: *Turbo subcoronatus* Hörn., *Natica sublineata* Münst. und *Chemnitzia formosa* Klipst. Die Identität dieser wenigen Arten ist zwar in Betreff der Übereinstimmung der beiden Faunen bei dem ganz verschiedenen Habitus dieser Versteinerungen und bei der grossen Anzahl der bekannten Arten von St. Cassian von geringer Bedeutung, allein sie ist doch hinreichend, um auf die nahe Verwandtschaft dieser beiden Ablagerungen aufmerksam zu machen. Ausserdem kommt *Chemnitzia eximia* in grosser Anzahl und unter ganz gleichen Verhältnissen wie bei Esino auch am Wildanger im Issthale, nordwestlich von Hall in Tirol vor, von welch' letzterem Fundorte ich sie kürzlich beschrieben habe. Ferner haben die Herren Prinzinger und Pichler die

Natica Comensis, *N. Meriani* und *Chemnitzia Escheri* nicht weit von Hall am Trotzberge bei Jenbach in einem dem Haller, sogenannten Riesen-Oolithe ganz gleichen Gesteine gefunden.

Alle diese Verhältnisse deuten darauf hin, dass vom paläontologischen Standpunkte aus die dolomitischen Kalke von Esino, Hall, Unterpetzen u. s. w. dem grossen Complexe der Cassianer Ablagerungen angehören. Diese Ansicht gewinnt noch mehr durch den Umstand an Wahrscheinlichkeit, dass unter den eingesendeten Stücken sich zwei Exemplare von *Halobia Lommelii* Wissm. befinden, die Herr Escher mit den übrigen Petrefacten in Esino erhalten hat und die aus dem Val Pelaggia stammen sollen. Das Gestein, auf welchem die Schalen aufsitzen, ist zwar weisslicher als der Kalkstein des Haupt-Fundortes der übrigen Esino-Petrefacten, aber nach Escher ziemlich ähnlich dem nahe dabei vorkommenden Riesen-Oolithe.

A. ARTEN VON ESINO, UNTERPETZEN UND VOM OBIR.

1. ***Turbo Suessi*** Hörn.

Taf. 1, Fig. 1 *a*, *b*.

T. testa rotundata, imperforata; anfractibus convexis, subgradatis, suturis contiguis, nodosis et transverse striatis; apertura rotundata; labro acuto; labio expanso.

M. Höhe des Taf. I, Fig. 1, abgebildeten Exemplares 20 Millim., Breite 20 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{70}/_{100}$.

Fundort: Unterpetzen nächst Schwarzenbach in Unterkärnten.

Die Schale ist rund, ungenabelt; das wenig hervorstehende Gewinde besteht aus drei convexen, fast stufenförmigen Umgängen, die an ihrem oberen Theile mit ziemlich eng stehenden Längsknoten versehen und mit erhabenen, dachziegelförmig gebildeten Querstreifen bedeckt sind. Ein Hauptkennzeichen dieser Art besteht darin, dass der oberste Theil jedes Umganges sich an dem nächstvorhergehenden etwas hinaufzieht und sich enge anschmiegt, wodurch an dem oberen Theile jedes Umganges eine schwache Aushöhlung entsteht. Die Mündung ist rund; der rechte Mundrand ist scharf, der linke bildet eine ziemlich breite Spindellamelle.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

2. ***Turbo subcoronatus*** Hörn.

Taf. I, Fig. 2 *a*, *b*.

T. testa ovato-ventricosa, subumbilicata; anfractibus convexis, scalariformibus, tuberculatis ac transverse striatis; ultimo bicarinato, duplici serie nodorum instructo; apertura rotundata; labro acuto; umbilico semitecto.

M. Höhe des Taf. I, Fig. 2, abgebildeten Exemplares 30 Millim., Breite 27 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{65}/_{100}$.

Fundorte: Unterpetzen nächst Schwarzenbach in Unterkärnten; St. Cassian in Tirol.

Die Schale ist bauchig-eiförmig; das zugespitzte Gewinde besteht aus 5—6 convexen, stufenförmigen Umgängen, welche an ihrer Kante eine Reihe von mehr oder weniger breiten Knoten tragen; ausserdem bemerkt man erhabene Querreifen, welche in geringen Entfernungen die ganze Schale umgürten. Die Schlusswindung ist mit zwei Kielen versehen, welche beide mit Knoten besetzt sind, doch sind die Knoten des oberen Kieles immer stärker und weniger zahlreich, während an dem unteren kleinere aber in grösserer Zahl auftreten. Die Mündung ist rund; der äussere Mundrand ist scharf, der linke bedeckt als eine starke Kalklamelle nur halb einen schwachen Nabel. Diese Art ist in ihren äusseren Verhältnissen bedeutenden Veränderungen unterworfen; so

z. B. ist das Gewinde bald mehr bald minder erhaben, die Umgänge sind mehr oder weniger stufenförmig oder nahe convex, die Knoten mehr oder weniger breit u. s. w. Die Ähnlichkeit dieser Form mit der von Münster unter der Bezeichnung *Pleurotomaria coronata* beschriebenen Schnecke ist so gross, dass ich keinen Anstand nehme, beide zu vereinigen, um so weniger als die Münster'sche Art aus Schichten stammt, welche entschieden mehrere Arten mit den Ablagerungen von Unterpetzen gemein haben. Ich würde auch ohne Bedenken den Namen der *T.* Art *coronatus* beibehalten haben, wenn nicht d'Orbigny in seinem Prodrôme, II, pag. 223, Nr. 254, die von Roemer aufgestellte *Delphinula coronata* als *Turbo coronatus* bezeichnet hätte, wodurch der Name vergriffen wurde.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

3. ***Turbo depressus*** Hörn.

Taf. I, Fig. 3 *a, b, c.*

T. testa globosa, imperforata; spira depressa; anfractibus convexis, laevibus, bituberculatis; apertura rotundata; labro acuto; labio crasso.

M. Höhe des Taf. I, Fig. 3 abgebildeten Exemplares 36 Millim., Breite 42 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{95}/_{100}$.

Fundort: Esino im Val Pelaggia an der Ostseite des Comer Sees.

Die Schale ist kugelförmig mit auffallend niedergedrücktem Gewinde; die Gestalt erinnert an manche *Euomphalus*- oder *Delphinula*-Arten, unterscheidet sich jedoch durch den gänzlichen Mangel eines Nabels. Die ersten Windungen, drei an der Zahl, werden fast ganz von der Schlusswindung umhüllt, welche an ihrem oberen Theile eine doppelte Reihe stark hervortretender Knoten zeigt, von denen man 10—12 auf einen Umgang zählt. Die Mündung ist rund, der rechte Mundrand scharf, der linke bedeckt als starke Kalklamelle die Spindel. Diese schöne Form ist so eigenthümlich, dass keine einzige der bis jetzt bekannten lebenden oder fossilen Formen mit ihr in unmittelbaren Vergleich gezogen werden kann.

Sammlung des Herrn Escher von der Linth in Zürch.

4. ***Nerinea prisca*** Hörn.

Taf. I, Fig. 4.

N. testa conica, imperforata, laevi; spirae angulo 35°; anfractibus subscalariformibus, ad suturas marginatis, planis; columella triplicata.

M. Länge des Taf. II, Fig. 4 abgebildeten Exemplares 28 Millim., Breite 15 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{35}/_{100}$.

Fundort: Unterpetzen nächst Schwarzenbach in Unterkärnten.

Die Schale ist kegelförmig, ungenabelt; das spitze Gewinde besteht aus 7—8 flachen Umgängen, welche hart an der Nath mit einem sehwachen Saume versehen sind. Die Spindel trägt 3 starke Falten. Diese Art ist das erste Beispiel, dass Nerineen auch in älteren als jurassischen Bildungen vorkommen.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

5. ***Natica Lipoldi*** Hörn.

Taf. I, Fig. 5 *a, b.*

N. testa ventricosa, globosa, crassa; anfractibus convexis, ad suturas subcanaliculatis, laevibus, striis incrementalibus instructis; apertura semilunari; labro acuto; umbilico labio calloso obtecto.

M. Höhe des Taf. I, Fig. 5 abgebildeten Exemplares 80 Millim., Breite 90 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{90}/_{100}$.

Fundort: Fladungbau am Obir, nordwestlich von Eisenkappel in Unterkärnten.

Die Schale ist niedergedrückt kugelförmig, dick; das stumpfe Gewinde besteht aus 4—5 convexen glatten Umgängen, die an ihrem oberen Theile hart an der Nath eine breite, schwache Aushöhlung zeigen. Die Mündung ist halbmondförmig, der rechte Mundrand scharf. Eine dicke Kalklamelle bedeckt den Nabel.

Diese Art hat einige entfernte Ähnlichkeit mit der *Natica grandis* Münster aus dem Coral rag, doch ist das Gewinde weit mehr breitgedrückt.

Ich habe mir erlaubt, diese schöne Art zu Ehren des Herrn Bergrathes M. Lipold, Chefgeologen der k. k. geologischen Reichsanstalt, zu benennen, welcher diese Petrefacten-Localität bei Gelegenheit seiner geologischen Aufnahmen zuerst auffand und das beschriebene Stück nach Wien brachte.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

6. ***Natica Comensis*** Hörn.

Taf. I, Fig. 6 *a*, *b*.

N. testa ovato-convexa; spira elata, acuta; anfractibus convexis, ultimo tenue longitudinaliter striato; apertura ovato-rotundata; labro simplici; labio magno, repando, umbilicum tegente.

M. Höhe des Taf. I, Fig. 6 abgebildeten Exemplares 22 Millim., Breite 25 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{85}/_{100}$.

Fundorte: Esino im Val Pelaggia an der Ostseite des Comer See's; Trotzberg bei Jenbach in Tirol.

Die Schale ist convex-eiförmig. Das hervorragende Gewinde besteht aus 3—4 gewölbten Umgängen, welche glatt und nur mit feinen Zuwachsstreifen versehen sind. Die Mündung ist abgerundet eiförmig, der rechte Mundrand scharf, der linke bedeckt als eine ziemlich breite Kalklamelle einen schwachen Nabel. An einem Exemplare sieht man noch Spuren von einstiger Färbung, es zeigen sich nämlich entfernt stehende dunkel gefärbte Querlinien, von denen man an der Schlusswindung 4 bemerkt. Diese Art hat in ihren Hauptumrissen einige entfernte Ähnlichkeit mit *Nerita decorata* Münster (Beiträge zur Petrefactenkunde, IV. Heft, pag. 98, Taf. X, Fig. 1), allein diese ist viel kleiner und auch die Oberflächenzeichnung scheint eine verschiedene zu sein.

Sammlung des Herrn Escher von der Linth in Zürich.

7. ***Natica sublineata*** Münst.

Taf. I, Fig. 7 *a*, *b*.

N. testa globosa, inflata; spira elata; anfractibus convexis, suturis bene distinctis, longitudinaliter lineatis; apertura semilunari; labro acuto; umbilico semiclauso.

M. Höhe des Taf. I, Fig. 7 abgebildeten Exemplares 16 Millim., Breite 16 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{80}/_{100}$.

Fundorte: Unterpetzen nächst Schwarzenbach in Unterkärnten; St. Cassian in Tirol.

Die Schale ist fast kugelförmig, etwas aufgeblasen. Das ziemlich erhabene Gewinde besteht aus 5 convexen Umgängen, die durch schiefe Näthe scharf von einander getrennt und mit feinen Längsstreifen bedeckt sind. Die Mündung ist halbmondförmig; der äussere Mundrand ist scharf, der innere bedeckt zum Theil einen tiefen Nabel.

Die Kärntner Exemplare stimmen vollkommen mit der Beschreibung und Zeichnung überein, welche Münster von seiner *N. sublineata* aus St. Cassian gibt, selbst die Grösse ist beinahe gleich.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

8. ***Natica Meriani*** Hörn.

Taf. II, Fig. 6 *a, b.*

N. testa depresso-ovata, dilatata; spira brevi, depressa; anfractibus angustis, convexiusculis; ultimo tenue longitudinaliter striato; apertura subrotunda, amplissima, dilatata; labro simplici, acuto; labio extenso; umbilico tecto.

M. Höhe des Taf. II, Fig. 6 abgebildeten Exemplares 22 Millim., Breite 28 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{95}/_{100}$.

Fundorte: Esino im Val Pelaggia an der Ostseite des Comer Sees (Fig. 6); Trotzberg bei Jenbach in Tirol.

Die Schale ist niedergedrückt-eiförmig; das sehr wenig vorstehende, fast ebene Gewinde besteht aus 3 schwach gewölbten, fast glatten Umgängen, an denen man nur die Zuwachsstreifen wahrnehmen kann. Die Mündung ist niedergedrückt-eiförmig, fast rund, sehr weit, der äussere Mundrand ist scharf, der innere legt sich als dünne Kalklamelle über den sehr schwachen Nabel. An mehreren Exemplaren bemerkt man noch deutlich zickzackförmige, dunkle Flecke, ungefähr in der Art gruppirt, wie man sie an dem *Conus marmoreus* Linn. beobachtet.

Durch das ähnliche Auftreten von Flecken könnte man verleitet werden, diese Form mit der *Natica maculosa* Klipstein aus St. Cassian zu verwechseln, doch scheint diese nach der Zeichnung und Beschreibung verschieden zu sein, wesshalb ich wegen Mangel an Originalexemplaren über das Zusammengehören dieser beiden Arten nicht zu entscheiden wage, und dieselbe lieber unter einer neuen Bezeichnung aufstelle.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt und des Herrn Escher von der Linth in Zürich.

9. ***Natica lemniscata*** Hörn.

Taf. II, Fig. 7, 8 *a, b.*

N. testa depresso-ovata, dilatata; spira prominula; anfractibus convexis, laevibus, striis incrementalibus et fasciis transversalibus bruneis ornatis; ultimo infra suturam paullulum excavato; apertura rotundata; labro acuto; labio extenso.

M. Höhe des Taf. II, Fig. 8 abgebildeten Exemplares 55 Millim., Breite 66 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{85}/_{100}$.

Fundort: Fladungbau am Obir nordöstlich von Eisenkappel in Unterkärnten (Fig. 7); Esino im Val Pelaggia an der Ostseite des Comer See's (Fig. 8).

Die Schale ist niedergedrückt-eiförmig; das hervorstehende Gewinde besteht aus 3 convexen glatten Umgängen, an denen man nur die länglichen Zuwachsstreifen und braune, entfernt stehende Querstreifen beobachten kann. Die Schlusswindung ist an der Nath schwach ausgehöhlt, wodurch eine breite Depression der Schale entsteht, wie man dies am besten an dem rechten Mundrande bemerkt. Die Mündung ist rundlich, der äussere Mundrand scharf, der innere bedeckt als eine schmale Kalklamelle einen äusserst schwachen Nabel.

Es unterliegt keinem Zweifel, dass diese Art eine grosse Ähnlichkeit mit der vorhergehenden hat, allein das mehr hervorragende Gewinde, die eigenthümliche Depression an dem oberen Theile der Schlusswindung und hauptsächlich die ganz verschiedene Farbenzeichnung bestimmten mich diese Trennung vorzunehmen.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt (Fig. 8) und des Herrn Escher von der Linth in Zürich.

10. ***Chemnitzia gradata*** Hörn.

Taf. II. Fig. 1 *a, b.*

Ch. testa turrita; anfractibus convexiusculis, gradatis, carinatis, medio cingulis duobus elevatis instructis, ultimo tricincto; apertura ovali; labro simplici; labio incrassato.

M. Länge des Taf. II, Fig. 1 abgebildeten Exemplares 100 Millim., Breite 45 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{40}/_{100}$.

Fundorte: Esino im Val Pelaggia; Unterpetzen nächst Schwarzenbach und Fladungbau am Obir, nordwestlich von Eisenkappel in Unterkärnten (Fig. 1).

Die Schale ist thurmförmig; das spitze Gewinde besteht aus 8—9 schwach gewölbten, stufenförmigen, glatten Umgängen, in deren Mitte man 2 erhabene Reihen bemerkt, welche die Schale umgürten; an der Schlusswindung treten 3 solche erhabene Reifen auf; die Mündung ist oval, oben verengt; der äussere Mundrand ist einfach, der innere schmiegt sich ziemlich verdickt an die Spindel.

Steinkerne dieser Art wurden schon von Brunner[1]) bei Esino aufgefunden, und mit der jurassischen *Ch. Heddingtonensis* Sow. verglichen, ja Omboni[2]) gründet sogar auf die scheinbare Ähnlichkeit dieser Formen mit jurassischen Vorkommnissen seine Ansicht, dass die Esino-Schichten dem Jura zuzuzählen seien. Brunner dagegen spricht nur von einer Ähnlichkeit, durchaus nicht von einer Identität der Arten, und in der That weicht *Ch. gradata* von der *Ch. Heddingtonensis* durch das auffallend ausgeprägte, stufenförmige Gewinde sehr ab.

Diese Art ist diejenige, welche am auffallendsten die Übereinstimmung der Ablagerungen von Esino und von Unterpetzen zeigt. Die Exemplare von diesen beiden Localitäten entsprechen sich aber auch in allen Details so vollkommen und ihre Merkmale sind so deutlich und unverkennbar, dass hier ein Irrthum kaum möglich ist. Jedenfalls ist die vollkommene Identität dieser Formen von nahe an 60 Meilen entfernten Fundorten merkwürdig.

Schliesslich möchte ich noch auf die Zeichnung eines kleinen Stückes aus den Cassianer Schichten (*Turbo scalaris* Münster, Beiträge zur Petrefactenkunde, IV. Heft, pag. 116, Taf. XII, Fig. 40) aufmerksam machen, welches vielleicht die Spitze dieser Art sein dürfte; da mir jedoch Originalexemplare fehlen, kann ich hierüber nicht entscheiden.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

11. ***Chemnitzia Escheri*** Hörn.

Taf. II, Fig. 2, 3, 4.

Ch. testa elongato-conica, ventricosa; anfractibus subplanis, laevibus, medio striis duabus aut tribus transversalibus laevissimis ornatis; apertura ovata; labro acuto; labio umbilicum tegente.

M. Länge des Taf. II, Fig. 2 abgebildeten Exemplares 70 Millim., Breite 35 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{45}/_{100}$.

Fundorte: Esino im Val Pelaggia; Trotzberg bei Jenbach in Tirol.

Die Schale ist in ihren äusseren Umrissen, wie mich ein reiches Materiale lehrt, sehr veränderlich, bald verlängert kegelförmig und etwas bauchig (Fig. 2), bald mehr thurmförmig (Fig. 3). Diese Unterschiede sind so auffallend, dass ich lange zögerte, diese Gestalten zu vereinen; ein sorgfältiges Studium von nahe an 80 Exemplaren überzeugte mich jedoch, dass eine Trennung in der That unmöglich sei, da es zwischen den beiden extremsten Formen viele Mittelglieder gibt, die mit gleichem Rechte bald der einen, bald der anderen Form angeschlossen werden können. Es zeigt sich hier auf eine ganz merkwürdige Weise, wie sehr der Gewindewinkel bei den Individuen einer und derselben Art variire und von welcher geringen Wichtigkeit daher dieses Merkmal als Artkennzeichen sei. Das mehr oder minder spitze Gewinde besteht aus 8—9 schwach gewölbten, fast ebenen Umgängen, die in ihrer Mitte mit 2 oder 3 ungemein schwachen Querlinien geziert sind. Diese Linien sind bei älteren Exemplaren (Fig. 2) oft fast ganz verwischt und kaum mehr zu sehen, während sie an jüngeren (Fig. 4) sehr deutlich auftreten; ausser diesen bemerkt man an einigen Exemplaren (Fig. 3 und 4)

---

[1]) Studer, Geologie der Schweiz, 1851, I. Band, pag. 525.

[2]) Omboni, Elementi di Storia naturale, 1854, und „Serie des terrains sedimentaires de la Lombardie“ im Bulletin de la Soc. géol. de France, Tom. XI, 1855, pag. 525.

noch schwache Längsfalten. Die Mündung ist eiförmig, oben verengt; der rechte Mundrand ist scharf, der linke bedeckt als dünne Kalklamelle einen starken Nabel.

Ich habe mir erlaubt, diese schöne und bezeichnende Art zu Ehren des Herrn Arnold Escher von der Linth zu benennen, dem wir einen so grossen Theil dessen, was über die Flötzgebilde der Alpen überhaupt bekannt ist, verdanken.

Brunner[1]) scheint ebenfalls Exemplare dieser Art gekannt zu haben, denn die Anführung der jurassischen *Chem. lineata* d'Orb. und *Chem. curta* d'Orb. deutet darauf hin. Diese Art dürfte, nach den zahlreichen Exemplaren zu urtheilen, wohl die häufigste in Esino sein.

Herr Professor Pichler in Innsbruck hat mir erst ganz kürzlich, während des Druckes dieser Bogen, ein schönes Exemplar dieser Art, das der Fig. 4 entspricht, aus dem Riesen-Oolithe vom Trotzberge bei Jenbach unweit von Hall gesendet.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt und des Herrn Escher von der Linth in Zürich.

12. ***Chemnitzia formosa*** Klipst.

Taf. II, Fig. 5 *a*, *b*.

Ch. testa turrita; anfractibus convexiusculis, subplanis, laevibus; apertura ovata; labro acuto; labio parvo.

M. Länge des Taf. II, Fig. 5 abgebildeten Exemplares 20 Millim., Breite 9 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{40}/_{100}$.

Fundorte: Unterpetzen nächst Schwarzenbach in Unterkärnten; St. Cassian in Tirol.

Die Schale ist thurmförmig; das spitze Gewinde besteht aus 8 schwach gewölbten, fast ebenen, glatten Umgängen; die Mündung ist oval, der rechte Mundrand scharf, der linke bedeckt als dünne Kalklamelle einen schwachen Nabel.

Das Exemplar von Kärnten hat eine grosse Ähnlichkeit mit der Zeichnung, welche Klipstein von seiner *Mel. formosa* gibt, wesshalb ich in Anbetracht dessen, dass bereits 4 entschiedene und gut kennbare Cassianer Ammoniten in denselben Schichten aufgefunden wurden, diese Identificirung vornehme, obgleich eine solche bei derlei indifferenten Formen immer eine missliche Sache ist.

Sammlung der k. k. geologischen Reichsanstalt.

B. ARTEN AUS DEN HALLSTÄTTER SCHICHTEN VOM VORDEREN SANDLING UND VON TELTSCHEN BEI AUSSEE.

13. ***Holopella tumida*** Hörn.

Taf. III, Fig. 1.

H. testa conica; anfractibus 6—7 convexis, tumidis, transversim striatis, striis confertis; apertura rotundata; umbilico parvo.

M. Länge des Taf. III, Fig. 1 abgebildeten Exemplares 27 Millim., Breite 17 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{35}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig; das spitze Gewinde (Gewindewinkel 33°) besteht aus 6 bis 7 convexen, aufgeblasenen Umgängen, die mit engstehenden Querstreifen bedeckt sind, über welche die länglichen Zuwachsstreifen hinweglaufen. Die Mündung ist rund; die Mundränder sind an den vorliegenden Exemplaren

[1]) Studer, Geologie der Schweiz, I. Band, 1851, pag. 461.

nicht erhalten; ein kleiner aber tiefer Nabel durchbohrt das Gehäuse. An einem in der Mitte entzweigebrochenen Exemplare, von gleicher Grösse mit dem abgebildeten, sieht man im Innern der Windungen eine ungefähr 2 Millimeter dicke Ausfüllungsmasse dieses Nabels hervorstehen.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

14. ***Phasianella acuminata*** Hörn.

Taf. III, Fig. 2.

Ph. testa conica, apice acutissimo; anfractibus 10 convexiusculis, laevibus; apertura subrotunda; umbilico nullo.

M. Länge des Taf. III, Fig. 2 abgebildeten Exemplares 25 Millim., Breite 15 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{45}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig, mit einem dolchartig zugespitzten Gewinde; dasselbe besteht aus 10 schwach gewölbten, an ihrem oberen Theile ein klein wenig eingeschnürten, fast ebenen, glatten Umgängen. Die Mündung ist rund, beide Mundränder sind erweitert uud umgebogen; kein Nabel. Diese Art ist durch die auffallend emporgezogene Spitze leicht kenntlich.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

15. ***Trochus Koninckı*** Hörn.

Taf III, Fig. 3 *a*, *b*. (Die vorletzte Windung zweimal vergrössert.)

T. testa conica; anfractibus 7 convexiusculis, suturis bene distinctis, striis transversalibus et lineis incrementi elevatis confertissimis, sese oblique decussantibus ornatis; ultimo anfractu ad basin carinato; apertura subrhomboidali; labro acuto; umbilico nullo.

M. Höhe des Taf. III, Fig. 3 abgebildeten Exemplares 26 Millim., Breite 20 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{50}/_{100}$.

Fundort: Teltschen bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig; das Gewinde besteht aus 7 schwach gewölbten, an den Näthen scharf getrennten Umgängen, die mit Querstreifen bedeckt sind, welche von engstehenden feinen Zuwachsstreifen in schiefer Richtung durchkreuzt werden. Die Schlusswindung ist an ihrer Basis mit einem scharfen, gekerbten Kiele versehen und die Basis selbst mit spiralen Querstreifen bedeckt. Die Mündung ist beinahe rhombisch, nach unten abgerundet; der äussere Mundrand ist scharf, der innere zeigt sich als eine dünne Kalklamelle.

Diese Art ist durch die in schiefer Richtung sich kreuzenden Linien leicht kenntlich.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

16. ***Trochus sinistrorsus*** Hörn.

Taf. III, Fig. 4.

T. testa conoidea, sinistrorsa; anfractibus convexiusculis, laevibus, ad basin marginatis; ultimo acute carinato; apertura rhomboidali; umbilico patulo.

M. Höhe des Taf. III, Fig. 4 abgebildeten Exemplares 13 Millim., Breite 13 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{50}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig, linksgewunden; das Gewinde besteht aus 4 schwach gewölbten, glatten, an ihrem Grunde mit einem erhabenen Bande versehenen Umgängen. Die Schlusswindung ist an ihrem Umfange

scharf gekielt und an ihrer Basis glatt. Die Mündung ist rhomboidisch; am Grunde öffnet sich ein kleiner aber deutlicher Nabel.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

17. ***Trochus strobiliformis*** Hörn.

Taf. III, Fig. 5.

T. testa conica; anfractibus 12 planis, laevibus, contiguis; apertura trapezoidali; umbilico parvo.

M. Länge des Taf. III, Fig. 5 abgebildeten Exemplares 15 Millim., Breite 10 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{15}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig; das spitze Gewinde besteht aus 12 ebenen, glatten, anderthalb Millimeter hohen Umgängen, die sich eng an einander schliessen. Die Mündung ist quer-viereckig, die Basis mit einem kleinen Nabel versehen. Diese Form erinnert sehr an einige Trochiden aus dem mittleren Lias, z. B. an *Trochus epulus* d'Orb. u. a.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

18. ***Scoliostoma moniliferum*** Hörn.

Taf. III, Fig. 6.

Sc. testa conica, ventricosa, imperforata; anfractibus 10 convexis, medio acute carinatis ac nodosis, infra carinam transverse striatis; ultimo anfractu bicarinato.

M. Länge des Taf. III, Fig. 6 abgebildeten Exemplares 24 Millim., Breite 15 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{25}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist bauchig-kegelförmig, ungenabelt; das spitze Gewinde wird von 10 gewölbten Umgängen gebildet, die in ihrer Mitte mit einem scharfen Kiele versehen sind, auf welchem Knoten sitzen, welche aber an dem einzigen vorliegenden Exemplare meist abgestossen sind; unterhalb des Kieles sind die Umgänge quergestreift, sonst glatt; auch die ungenabelte Basis ist fast glatt, nur unter der Loupe bemerkt man an derselben Spuren von Spiralstreifen. Die Mündung ist zerbrochen, wesshalb die generische Bestimmung dieses Exemplares nicht vollkommen sicher ist; ich habe mich jedoch veranlasst gefunden, diese Schale für ein *Scoliostoma* zu halten, da man in der That an der Schlusswindung eine Tendenz bemerkt, sich nach abwärts zu biegen. Noch deutlicher tritt diese Tendenz an einem Exemplare der folgenden sehr verwandten Art hervor; da jedoch diese Erscheinung lediglich bei *Scoliostoma* vorkömmt, und da überdies Sandberger in seiner „Beschreibung der Versteinerungen des rheinischen Schichtensystems in Nassau pag. 226 eine ähnliche Form unter der Bezeichnung *Scoliostoma conoideum* beschreibt und Taf. 26, Fig. 3 abbildet, so habe ich keinen Anstand genommen, diese Formen zu *Scoliostoma* zu stellen, obgleich an beiden Arten die Mündungen nicht ganz erhalten sind.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

19. ***Scoliostoma fasciatum*** Hörn.

Taf. III, Fig. 7, 8.

Sc. testa conica, apice acuminato; anfractibus 12 convexis, laevibus, ad suturam fasciatis, ultimo deorsum spectante.

M. Länge des Taf. III, Fig. 7 abgebildeten Exemplares 25 Millim., Breite 15 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{25}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig, zugespitzt; das Gewinde besteht aus 12 convexen, glatten Umgängen, welche an ihrem Grunde hart an der unteren Nath von einem, von 2 scharfen Leisten begrenzten, Bande umgeben werden. Dieses Band dürfte im ersten Augenblicke verleiten, die Form für eine *Pleurotomaria* zu halten, allein der Umstand, dass die Zuwachsstreifen regelmässig in gleicher Weise im Bande fortsetzen, spricht gegen diese Annahme. Unterhalb des Bandes ist die Schale quergestreift, eine Erscheinung, die man ganz besonders gut an der Schlusswindung sieht; diese zeigt ganz deutlich die Neigung, sich nach abwärts zu bewegen, ja an dem vorliegenden Exemplare hat sich schon ein bedeutender Theil desselben von der vorhergehenden Windung abgetrennt. Diese Eigenthümlichkeit ist bis jetzt von den hochgewundenen Schnecken nur bei *Scoliostoma* beobachtet worden, wesshalb ich auch diese Form hierher stelle.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

20. ***Porcellia abnormis*** Hörn.

Taf. III, Fig. 9 *a, b, c, d.* (Ein in der Mitte durchschnittenes Stück, um die Verhältnisse der Windungen zu sehen.)

P. testa discoidea, ammonitiformi, utrinque concava; anfractibus 5 rotundatis trapezoidalibus, non amplectentibus, ad utrumque dorsi finem tuberculatis; tuberculis inaequalibus, laevibus; sulco dorsali satis lato; apertura subquadrangulari.

M. Durchmesser des Taf. III, Fig. 9 abgebildeten Exemplares 35 Millim., Höhe des letzten Umganges an der Mündung 13 Millim., Breite 13 Millim.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist scheibenförmig, ganz nach Art der Ammoniten eingerollt, ohne dass sich die Umgänge, deren man fünf zählen kann, umfassen, oben und unten schüsselförmig vertieft. Die einzelnen Umgänge sind im Querschnitte trapezoidal, doch ist die Rückenseite namentlich der letzten Windung, stark gewölbt; sie sind an der oberen und unteren Seite, dort wo die Rückenseite, mit der Innenseite zusammenstösst, mit schief stehenden Knoten versehen, welche aber an der oberen und unteren Seite verschieden auftreten; so ist z. B. an dem abgebildeten Exemplare die obere Seite (9, *a*) viel schwächer geknotet als die untere (9, *b*). Ich hebe diese Verschiedenheiten hervor, weil sich durch dieselbe herausstellt, dass der regelmässige Bau bei den Porcellien gewissen Schwankungen unterworfen sei, welche beweisen, dass die Ansicht derjenigen mehr Geltung gewinne, welche die Porcellien mit den Pleurotomarien vereinigt wissen wollen, als jener, welche sie mit *Bellerophon* vereinigen wollten. Die Entscheidung jedoch, ob *Porcellia* in der That nichts anders als eine eingedrückte *Pleurotomaria* sei, muss der Untersuchung eines reichhaltigeren Materiales vorbehalten bleiben; nach dem Vorliegenden scheint die Ansicht noch zu gewagt, denn die Verschiedenheit der oberen und der unteren Fläche ist verhältnissmässig doch nur eine geringe, und an zwei weiteren Exemplaren dieser Art bemerkt man sie kaum. Die Schale ist ferner mit ungemein feinen, gebogenen Zuwachsstreifen bedeckt, die sich über den Rücken hinüberschwingen und an den beiden Leisten des Schlitzbandes mit einer starken Krümmung nach rückwärts enden. Das Schlitzband selbst ist 2 Millimeter breit und mit halbmondförmig gebogenen Streifchen bedeckt.

Diese Art ist leicht von der früher von mir beschriebenen *Porcellia Fischeri*[1]) durch den gänzlichen Mangel der so bezeichnenden Gitterung der Oberfläche zu unterscheiden.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

21. ***Pleurotomaria Fischeri*** Hörn.

Taf. III, Fig. 10 *a, b.*

P. testa trochiformi, conica; spirae angulo 65°; anfractibus 8 convexis, striis longitudinalibus ac transversalibus decussantibus ornatis; fascia sinus plana, densissime striata, in medio

[1]) Hörnes, Über die Gastropoden und Acephalen der Hallstätter Schichten, in dem IX. Bde. der Denkschriften der mathm.-naturw. Cl. der k. Akademie der Wissenschaften, pag. 45.

anfractuum sita; ultimo anfractu ad basin rotundato; basi convexa; apertura subovata; umbilico amplo, profundo.

M. Höhe des Taf. III, Fig. 10 abgebildeten Exemplares 70 Millim., Breite 75 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{45}/_{100}$.

Fundorte: Vorderer Sandling und Teltschen bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig; das ziemlich spitze Gewinde besteht aus 8 wulstförmigen Umgängen, die an ihrer Oberfläche mit einem feinen Gitter bedeckt sind, das aus der Durchkreuzung von schief geschwungenen Längs- und geraden Querlinien besteht. Ungefähr in der Mitte, meist etwas unterhalb derselben, befindet sich das charakteristische Band; dieses ist ziemlich breit, oben und unten von einem erhabenen Streifen begrenzt und mit engstehenden, halbmondförmig gebogenen Zuwachsstreifen bedeckt. Oberhalb dieses Bandes tritt ein Querreifen etwas stärker auf, wodurch die Schale das Ansehen gewinnt, als sei sie von einem Doppelbande umgeben. Die Schlusswindung ist an ihrer Basis abgerundet; die Basis selbst ist stark gewölbt und auf ähnliche Weise gegittert, wie der übrige Theil der Schale; die Mündung ist quer-eiförmig; in der Mitte der Basis befindet sich ein weiter und tiefer Nabel.

Diese Art kann mit keiner ausseralpinen in unmittelbaren Vergleich gezogen werden; nur *Pl. cancellata* Münst. (Beiträge zur Petrefactenkunde, IV. Heft, pag. 113, Taf. XII, Fig. 16) scheint ihr nahe zu stehen; die Oberflächenverzierung ist dieselbe, der äussere Habitus auch, doch der Umstand, dass bei unseren Exemplaren sich das Band meist unterhalb der Mitte eines jeden Umganges befindet, ferner der Mangel eines Nabels an der Cassianer Art, dürfte die Aufstellung einer neuen Art rechtfertigen.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

22. ***Pleurotomaria subscalariformis*** Hörn.

Taf. III, Fig. 11 *a, b, c, d.* (Ein Stück der vorletzten Windung dreimal vergrössert.)

P. testa trochiformi, conica; spirae angulo 57°; anfractibus subscalariformibus, clathratis; fascia sinus plana, dense striata, in medio anfractuum sita; ultimo anfractu ad basin angulato et bicarinato; basi subplana, clathrata; umbilico magno; apertura depressa, oblique quadrangulari.

M. Höhe des Taf. III, Fig. 11 abgebildeten Exemplares 20 Millim., Breite 20 Millim.; Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{55}/_{100}$.

Fundort: Teltschen bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig; das spitze Gewinde besteht aus 7 bis 8 stufenförmigen Umgängen, welche aus einem schiefen Dache und einer senkrechten Wand zusammengesetzt sind; dort wo beide Theile zusammenstossen, ungefähr in der Mitte des Umganges, befindet sich das Schlitzband. Das Dach ist mit einem schiefen Gitter bedeckt, bei dem die Längsleisten viel weiter, ja fast doppelt so weit von einander entfernt sind als die Querleisten. Die senkrechte Wand ist mit einem regelmässigen, geraden Gitter bedeckt, doch auch hier übertrifft die Entfernung der Längsstreifen die der Querstäbe fast um die Hälfte. Das Band selbst ist mit feinen, engstehenden halbmondförmigen Zuwachsstreifchen geziert. Die Schlusswindung ist an ihrer Basis mit einem scharfen Kiele versehen; die Basis selbst ist schwach gewölbt, fast eben und mit einem ähnlichen Gitter bedeckt wie der übrige Theil der Schale; die Mündung ist niedergedrückt, schief vierseitig; in der Mitte der Basis befindet sich ein weiter tiefer Nabel.

Als verwandte Form kann ich nur *Pleurotomaria Gaudryana* d'Orbigny (Paléontologie Française, Terr. jur., pag. 447, tab. 364, Fig. 11—12) aus dem Toarcien von Villefranche bei Lyon bezeichnen.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

23. ***Pleurotomaria Reussi*** Hörn.

Taf. III, Fig. 12 *a, b.* (Ein Stück der vorletzten Windung dreimal vergrössert.)

P. testa conica, depressa; anfractibus planiusculis, transverse striatis, lineis obliquis confertissimis interpositis; fascia sinus angusta, dense striata, in inferiori parte anfractuum sita;

ultimo anfractu subcarinato; basi planiuscula, spiraliter striata; umbilico nullo; apertura subovata.

M. Höhe des Taf. III, Fig. 12 abgebildeten Exemplares 15 Millim., Breite 19 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{55}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist niedergedrückt-kegelförmig; das stumpfe Gewinde besteht aus 5 schwach gewölbten, fast ebenen Umgängen, welche mit erhabenen Querleisten versehen sind, zwischen denen man schiefe, engstehende Längslinien sieht; das Schlitzband ist nicht sehr breit und befindet sich am Grunde jedes Umganges hart an der Nath; es ist mit feinen, halbmondförmig gebogenen Zuwachsstreifen bedeckt. Die Schlusswindung ist an ihrem Umfange schwach gekielt, die Basis fast eben und mit spiralen Reifen geziert, zwischen denen, wie an den übrigen Theilen der Schale, feine Linien auftreten. Das Gehäuse ist undurchbohrt, die Mündung niedergedrückt, eiförmig.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

24. ***Pleurotomaria nexilis*** Hörn.

Taf. III, Fig. 13 *a*, *b*. (Ein Stück der vorletzten Windung dreimal vergrössert.)

P. testa depresso-conica; spirae angulo 90°; anfractibus planis, clathratis; fascia sinus ampla, dense striata, in inferiori parte anfractuum sita; apertura depressa.

M. Höhe des Taf. III, Fig. 13 abgebildeten Exemplares 12 Millim.. Breite 18 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{45}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist niedergedrückt-kegelförmig; das stumpfe Gewinde besteht aus 5 ebenen Umgängen, die mit einem feinen gleichmässigen Gitter bedeckt sind; das Schlitzband befindet sich am Grunde jedes Umganges hart an der Nath und besteht aus in spitzem Winkel nach rückwärts gebogenen, feinen Zuwachsstreifen. Die Schlusswindung ist an ihrem Umfange etwas gekielt; die Basis schwach gewölbt.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

25. ***Pleurotomaria perversa*** Hörn.

Taf. III, Fig. 14.

P. testa trochiformi, conica, perversa; anfractibus 5 torulosis, medio carinatis, ad suturam fasciatis; fascia sinus ampla, dense striata, in inferiori parte anfractuum sita; anfractu ultimo rotundato; umbilico amplo, carina cincto; apertura depresso-ovata.

M. Höhe des Taf. III, Fig. 14 abgebildeten Exemplares 13 Millim. Breite 18 Millim., Höhe des letzten Umganges im Verhältniss zur Höhe der ganzen Schale $^{50}/_{100}$.

Fundort: Vorderer Sandling bei Aussee.

Die Schale ist kegelförmig, linksgewunden; das wenig spitze Gewinde besteht aus 5 wulstförmigen, glatten oder der Länge und der Quere nach schwach gestreiften Umgängen, welche in ihrer Mitte gekielt sind. Unterhalb des Kieles, hart an der Nath, befindet sich das Schlitzband; dieses ist verhältnissmässig breit, oben und unten von einem feinen Leistchen begrenzt und von feinen, halbmondförmig gebogenen Zuwachsstreifen gekreuzt; die Schlusswindung ist an ihrem Umfange abgerundet. Die Basis ist radial gestreift; in ihrer Mitte öffnet sich ein weiter tiefer Nabel, der von einem Kiele begrenzt ist. Die Mündung ist zusammengedrückt-eiförmig.

Linksgewundene Pleurotomarien sind bereits von mehreren Autoren, z. B. von F. und G. Sandberger beobachtet worden.

Sammlung des Herrn Hofrathes Dr. Fischer in München.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

TAFEL I.

Fig. 1. *Turbo Suessi* Hörn. (Seite 23), aus dem gelblich-weissen Kalksteine von Unterpetzen nächst Schwarzenbach in Unterkärnten.
„ 2. *Turbo subcoronatus* Hörn. (Seite 23), aus dem gelblich-weissen Kalksteine von Unterpetzen.
„ 3. *Turbo depressus* Hörn. (Seite 24), aus dem grauen dolomitischen Kalke von Esino, unweit Varenna an der Ostseite des Comer See's; *a.* Ansicht von vorne, *b.* von rückwärts, *c.* von oben.
„ 4. *Nerinea prisca* Hörn. (Seite 24), aus dem gelblich-weissen Kalksteine von Unterpetzen.
„ 5. *Natica Lipoldi* Hörn. (Seite 24), aus dem weissen Kalksteine vom Fladungbau am Obir, nordwestlich von Eisenkappel in Unterkärnten.
„ 6. *Natica Comensis* Hörn. (Seite 25), aus dem grauen dolomitischen Kalke von Esino.
„ 7. *Natica sublineata* Münst. (Seite 25), aus dem gelblich-weissen Kalksteine von Unterpetzen.

TAFEL II.

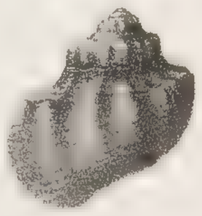
Fig. 1. *Chemnitzia gradata* Hörn. (Seite 26), aus dem weissen Kalksteine vom Fladungbau am Obir.
„ 2—4. *Chemnitzia Escheri* Hörn. (Seite 27), aus dem grauen dolomitischen Kalke von Esino.
„ 5. *Chemnitzia formosa* Klipst. (Seite 28), aus dem gelblich-weissen Kalksteine von Unterpetzen.
„ 6. *Natica Meriani* Hörn. (Seite 26), aus dem dolomitischen Kalke von Esino.
„ 7. *Natica lemniscata* Hörn. (Seite 26), aus dem weissen Kalke vom Fladungbau am Obir.
„ 8. *Natica lemniscata* Hörn. (Seite 26), aus dem grauen dolomitischen Kalke von Esino.

TAFEL III.

Fig. 1. *Holopella tumida* Hörn. (Seite 28), aus dem rothen Kalke vom vorderen Sandling bei Aussee.
„ 2. *Phasianella acuminata* Hörn. (Seite 29), vom Sandling.
„ 3. *Trochus Koninckı* Hörn. (Seite 29), aus dem röthlich-braunen Kalke von Teltschen bei Aussee; *a.* Ansicht von vorne, *b.* vorletzte Windung, zweimal vergrössert.
„ 4. *Trochus sinistrorsus* Hörn. (Seite 29), vom Sandling; *a.* Ansicht von vorne, *b.* von rückwärts, *c.* von unten.
„ 5. *Trochus strobiliformis* Hörn. (Seite 30), vom Sandling.
„ 6. *Scoliostoma moniliferum* Hörn. (Seite 30), vom Sandling.
„ 7, 8. *Scoliostoma fasciatum* Hörn. (Seite 30), vom Sandling.
„ 9. *Porcellia abnormis* Hörn. (Seite 31), vom Sandling; *a.* Ansicht von oben, *b.* von unten, *c.* von der Seite, *d.* in der Mitte entzweigeschnitten, um die Verhältnisse der Windungen zu sehen.
„ 10. *Pleurotomaria Fischeri* Hörn. (Seite 31), vom Sandling.
„ 11. *Pleurotomaria subscalariformis* Hörn. (Seite 32), von Teltschen; *a.* Ansicht von vorne, *b.* von rückwärts, *c.* von unten, *d.* ein Stück der vorletzten Windung, dreimal vergrössert.
„ 12. *Pleurotomaria Reussi* Hörn. (Seite 32), vom Sandling; *a.* Ansicht von vorne, *b.* von unten, *c.* ein Stück der vorletzten Windung, dreimal vergrössert.
„ 13. *Pleurotomaria nexilis* Hörn. (Seite 33), vom Sandling; *a.* Ansicht von vorne, *b.* ein Stück der vorletzten Windung, dreimal vergrössert.
„ 14. *Pleurotomaria perversa* Hörn. (Seite 33), vom Sandling; *a.* Ansicht von vorne, *b.* von unten.

1 a.

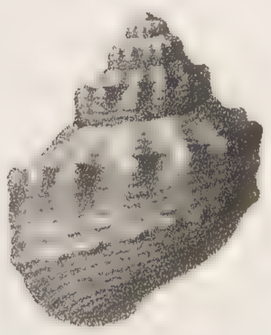
1 b.



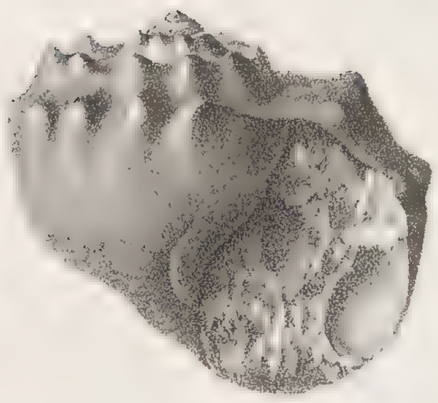
4.

2 a.

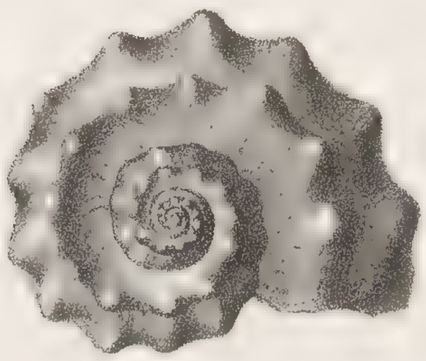
2 b.



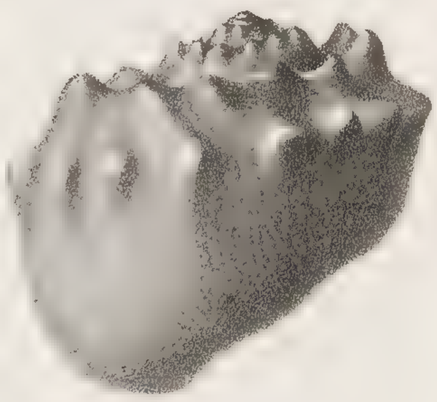
3 a.



3 c.

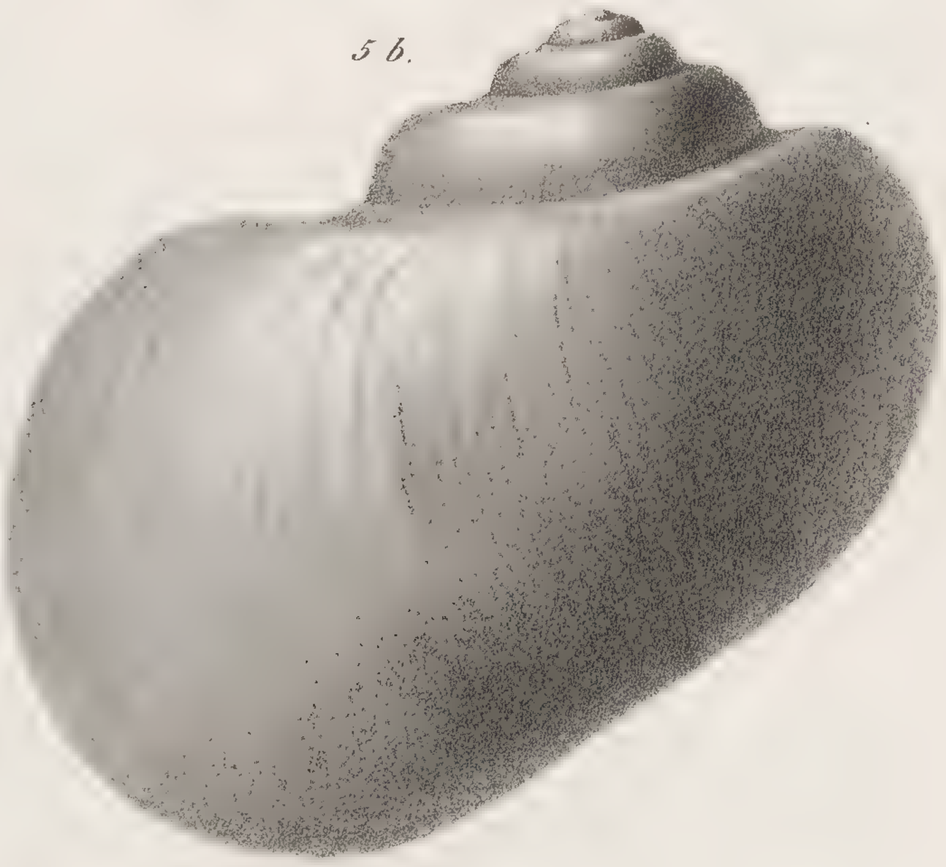


3 b.

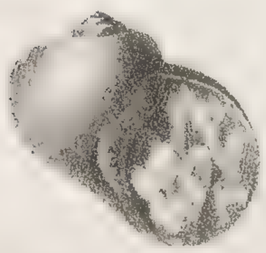


5 a.

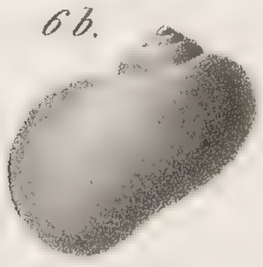
5 b.



6 a.

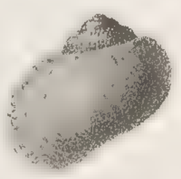


6 b.



7 a.

7 b.



1. *Turbo Sueſsi Hörn.*
2. *Turbo subcoronatus Hörn.*
3. *Turbo depressus Hörn.*
4. *Nerinea prisca Hörn*
5. *Natica Lipoldi Hörn.*
6. *Natica Comensis Hörn.*
7. *Natica sublineata Münst.*

Rud Schönn lith.

Lith.u.gedr.v.d.k.k.Hof.u.Staatsdruckerei

1. *Chemnitzia gradata Hörn.*
2.3.4. *Chemnitzia Escheri Hörn.*
5. *Chemnitzia formosa Klipst.*
6. *Natica Meriani Hörn.*
7. 8. *Natica lemniscata Hörn.*

1. *Holopella tumida Hörn.*
2. *Phasianella acuminata Hörn.*
3. *Trochus Konincki Hörn.*
4. *Trochus sinistrorsus Hörn.*
5. *Trochus strobiliformis Hörn.*
6. *Scoliostoma monilifegum Hörn.*
7. 8. *Scoliostoma fasciatum Hörn.*
9. *Porcellia abnormis Hörn.*
10. *Pleurotomaria Fischeri Hörn.*
11. *Pleurotomaria subscalariformis Hörn.*
12. *Pleurotomaria Reußi Hörn.*
13. *Pleurotomaria nexilis Hörn.*
14. *Pleurotomaria perversa Hörn.*

DAS

GEFÄSS-SYSTEM DER TEICHMUSCHEL.

VON

PROF. Dr. KARL LANGER.

Mit 3 Tafeln.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTL. CLASSE AM 17. JÄNNER 1856.

II. ABTHEILUNG.

VENÖSES UND RESPIRATORISCHES GEFÄSS-SYSTEM.

C. DAS KÖRPER-VENEN-SYSTEM.

Bojanus hat unter dem Namen „Venenbehälter“ einen centralen Venenstamm beschrieben, in welchem der grösste Theil des Körpervenen-Blutes abläuft. Es ist dies ein cylindrischer, bis eine Linie dicker Venen-Sinus, welcher in der Mittelebene des Leibes unter dem Pericardium zwischen den beiden Bojanus'schen Körpern liegt. Seine Wände sind zart und durchsichtig, er entsendet beiderseits dichte Gefässnetze, welche in die Wandungen des Bojanus'schen Körpers eindringen und das Blut desselben in die Kiemen führen. An seinem vorderen Ende, wo der Mastdarm den Pericardial-Raum betritt, nimmt er die venösen Stämme des Fusses auf. Hier ist er von der gemeinschaftlichen Wand der Vorhöhlen des Bojanus'schen Körpers bedeckt, nach hinten aber unmittelbar am Boden des Pericardiums liegend. Er reicht bis zum hinteren Schliessmuskel und nimmt in der Spalte der strangförmigen Sehne des Fusses aus der oberen Pericardial-Wand und dem Ende des Darmes noch Zweige auf.

Nicht alles Blut fällt in diesen Sinus, indem ein Theil, ohne die Kiemen zu umgehen, den Bojanus'schen Körpernetzen, ein anderer direct dem Vorhofe des Herzens zuströmmt. Nur ein geringer Theil venösen Blutes geht aus dem Venen-Sinus statt in die Kiemen durch die Vorhöhlenwand des Bojanus'schen Körpers gleichfalls in das Atrium.

Von den vorderen Venenstämmen, die in den Sinus münden, ist einer unpaarig, ein anderer paarig.

Der unpaarige Stamm tritt zwischen Mastdarm und der ersten Darmschlinge aus dem Fusse heraus und entspricht dem Strombezirke der drei grösseren Endäste der vorderen Aorta. Er bezieht also das venöse Blut aus dem Schwellnetze des freien musculösen Fusstheiles und aus dem Darmcanale nebst Umgebung. Seine Hauptverzweigungen halten sich alle rechterseits, während die der Aorta mehr linkerseits verlaufen. Den arteriellen Ästen, die unmittelbar aus dem Bogen der Aorta entspringen, entsprechen die beiden paarigen Stämme. Magen, Leber, der vordere Schliessmuskel, ein Theil der Oberfläche des Muschelleibes, bis dahin, wo der Mantel als Falte frei wird, und die vorderen Venen des Mantelsaumes fallen in das Stromgebiet dieser Äste. Die Tastläppchen theilweise, der centrale Theil des Mantels ganz, sowie auch die vordere Partie der Pericardialwand, die gleichfalls von der vorderen Aorta aus versorgt werden, sind aber aus dem Bereiche des Venen-Sinus ausgeschlossen, indem sie ihr Blut dem Vorhofe zusenden, und insoferne ihre respiratorische Bedeutung neben den Kiemen beurkunden. Die hinteren Venen des Mantelsaumes und die des hinteren Schliessmuskels münden in die Netze des Bojanus'schen Körpers. Der paarige Ast des Venen-Sinus rechterseits nimmt noch vom Mastdarme einen Zweig auf, der unter der Arterie in seinem Wulst verläuft.

Die weiteren Verzweigungen dieser Venenstämme sind aus der Zeichnung Fig. 1 zu entnehmen.

Mehrmals ist es mir gelungen, auch von den Venen aus die Gefässnetze der Organe zu erfüllen, so insbesondere das der inneren Darmoberfläche. Eine solche Injection hätte keine Aussicht zu gelingen, wenn die Organen-Netze nur Parenchymlücken wären und nicht durch Continuität der Wandungen in das Venensystem führen würden. Die dendritisch verzweigten Venenanfänge am Darme sind gleichfalls in Fig. 1 wiedergegeben.

Als Nachtrag zu den Formen der capillaren Organen-Netze, deren welche im ersten Theile dieser Abhandlung sehr mangelhaft in der Zeichnung ausgeführt wurden, habe ich in Fig. 15 das früher beschriebene Netz der inneren Oberfläche des Anfangsdarmes abbilden lassen. In Fig. 14 sind die Netze an den Riffen der Mundtentakeln dargestellt. Alle diese Netze sind mit Harzmasse erfüllt, und bei oberer Beleuchtung gezeichnet. An Carmin-Injectionen, die bei durchfallendem Lichte untersucht werden können, sind die Ramifications-Verhältnisse der feinen Arterienzweige untersucht, und der unmittelbare Übergang dieser in die Netze nachgewiesen worden, wobei die Unabhängigkeit der Blutvertheilung von den Geweben in so weit constatirt werden konnte, dass nicht diese die Wandungen des Strombettes bilden, es vielmehr durch eine selbstständige Gefässwandung begrenzt wird.

Nach Art der Arterien dendritisch verzweigte Venenanfänge habe ich nur am Darmcanale beobachtet; überall sonst bilden die Anfänge der Venen ein Netz, welches mit dem oberflächlichen Schwellnetze der Organe ein schwammiges Schwellgewebe darstellt. Dieses Schwellgewebe durchdringt die ganze Dicke der Organe, seine Gefässe nehmen gegen das Innere derselben an Durchmesser zu, und entsenden Canäle, die innerhalb des Schwellnetzes noch zu grösseren Canälen zusammentreten, aber in ihrem Verlaufe immer noch Theile des Schwellnetzes in sich aufnehmen. Wird daher ein solcher Theil injicirt, so gelingt es nur äusserst selten, blos diese Stämme zu erfüllen, meistens werden die umliegenden Theile des Schwellnetzes mit erfüllt, die dann nur schwer den Verlauf des Hauptcanales erkennen lassen. Man muss ihn aufschlitzen, den Injectionsstoff entfernen, um ihn durch dieses Schwellnetz verfolgen zu können. An den Wänden des aufgeschlitzten Canales sind dann die Öffnungen der

kleineren und grösseren Gefässe zu sehen, durch welche das Schwellnetz in den Hauptcanal sich entleert. Diese Formen des Schwellnetzes sind namentlich am Fusse zu sehen. Die in Fig. 1 gezeichneten Venenzweige des Fusses sind auf diese Weise dargestellt worden.

Etwas verschieden von dem des Fusses ist das Venensystem des Mantels. Die Venenanfänge des freien Mantelsaumes fliessen in ein grosses Netz ab, welches entlang seiner Anheftung an der Schale, näher der äusseren Oberfläche gegen die Schliessmuskeln verläuft. Vorne übergeht dieses Netz, nachdem es die Venen des Schliessmuskels und des Mundes aufgenommen und mit einem oberflächlichen Mantelnetze, das in das Atrium mündet, anastomosirte, in den Fig. 1 mit *t* bezeichneten Venenstamm. Hinten geht dieses Netz unter dem Schliessmuskel in die hintere Partie des Bojanus'schen Körpernetzes hinein.

Der an der Schale dicht anliegende centrale Theil des Mantels entleert sein Blut in das Atrium. Längs seines unteren Randes, wo er an der Schale befestigt ist, sieht man auch ohne Injection, der äusseren Oberfläche näher, einen Venenstamm, Kreisvene nach Bojanus, der aber nicht als solcher zum Vorhof läuft, sondern Theil eines Netzes wird, welches an der vorderen Anheftung des Fusses, neben dem Schliessmuskel liegt und mit dem Anheftungsrande des Mantels am Fusse, also gleichlaufend mit dem oberen Rande der Kieme in das vordere Ende des Vorhofes übergeht. Wo das Netz die Basis der Mundtentakel berührt, nimmt es von diesen die Venen auf, so wie auch eine mittlere Mantelvene, die an der äusseren Mantelfläche über den Kiemen bis gegen den hinteren Schliessmuskel sich verfolgen lässt. An den Mundtentakeln anastomosiren diese Netze mit den Fussvenen.

Da wo der centrale Manteltheil seitlich mit dem Pericardium verschmilzt, sieht man ebenfalls grössere Venenzweige in das Atrium münden, die aber ebenfalls keine isolirten Stämme darstellen, sondern stets in unmittelbarer Verbindung mit dem Schwellnetze des Mantels bleiben. Diese ableitenden Venenzweige liegen alle an der äuseren Oberfläche des Mantels und bilden ein lockeres, mit freiem Auge sichtbares Netz. Ich habe es einige Male vom Vorhofe aus streckenweise erfüllt, wesshalb es mit Bestimmtheit dem Venensysteme zugerechnet werden kann. Stösst man auf gut Glück in die äussere Manteloberfläche ein Glasröhrchen, so bläht sich durch Einblasen von Luft dieses Netz auf. Wie es scheint, ist es dieses Netz, welches von Delle Chiaje für ein Wassergefässsystem angesprochen wurde. Gelingt es mit Injectionsmasse dieses Netz strotzend zu erfüllen, so macht sich in seinen Lücken ein zweites Netz bemerkbar, welches erst mit einer Loupe erkannt werden kann, und mit dem grösseren im unmittelbaren Zusammenhange steht. Beide Netze gehören einem und demselben Gefässsysteme an. Je weiter gegen den freien Mantelrand dieses gröbere Netz verfolgt wird, desto feiner werden seine Zweige und desto enger seine Maschen; in demselben Masse verkleinert sich aber auch das feinere Netz in seinen Lücken, so dass letzteres deutlich erst bei einer 6 bis 10maligen Vergrösserung ausgenommen werden kann.

In Fig. 19 sind diese injicirten Netze der äusseren Manteloberfläche nahe dem unteren Anheftungsrande abgebildet. Im Mantel liegen also die grösseren venösen Gefässe nicht central, sondern an der äusseren Oberfläche. Das feine Zwischennetz kann hier für das capillare Oberflächennetz angesprochen werden.

Die ganze innere Oberfläche des Mantels zeigt gut injicirt eine gleichförmige Färbung, die unter der Loupe sich in das capillare Schwellnetz auflösen lässt, wie es auch an der Oberfläche der Fusskante zu finden ist. Ganz auf dieselbe Weise verhalten sich die Venen

des Pericardiums, welche hinten in den Venenbehälter ihren Abfluss haben; auch hier sind Netze grösserer Gefässe und in ihren Lücken feinere Netze zu finden.

Jener Theil der Oberfläche des Muschelleibes, der dunkler pigmentirt zwischen Pericardium und Mantel liegt, vorne den Pericardialraum abschliesst und von Keber rothbraunes Organ genannt wird, schickt unmittelbar in den Vorhof des Herzens seine Venenstämmchen ab; seine feineren Netze stehen mit denen des Mantels und den hinteren Pericardial-Venen in Verbindung, sie breiten sich nach abwärts und vorne aus, und legen sich daher theilweise über die Venennetze des Mantels und der oberen Äste der Fussvenen; von hinten werden sie dagegen selbst wieder von den Ausbreitungen der hinteren Pericardial-Venen gedeckt, so dass diese verschiedenen Stromgebiete des Mantels sich schichtenweise nach vorne zu über einander legen. Pericaridalwand, rothbraunes Organ und Mantel sind ein und dasselbe Organ, dessen innere Fortsetzung, wie das Durchschnitts-Schema Fig. 2 ergibt, die Scheidewand der beiden Kiemengänge bildet. Auffallend ist es, dass in die seitlichen Theile des rothbraunen Organes und in diese Scheidewand der Kiemengänge keine Arterien eindringen.

Ich habe nichts im Mantel gesehen, was für ein Wassergefäss hätte gehalten werden können, alle darin verlaufenden Gefässe gehören dem Blutgefässsysteme an, wie dies ihr Zusammenhang theils mit der Aorta, theils mit dem Atrium beweist; überall wurden sie geschlossen gefunden.

Die Venen der Tastläppchen verhalten sich auf dieselbe Weise. Das in Fig. 14 dargestellte Capillar-Netz der Riffen entleert sich mit dem Schwellnetze der glatten Fläche, welches unvollkommen injicirt in Fig. 7 des ersten Theiles dieser Abhandlung abgebildet ist, in Venenzweige, die ebenfalls oberflächlich verlaufen, und an der Vereinigung der Tastläppchen mit dem Mantel in seine Venennetze sich ergiesst. Fig. 16 gibt eine Ansicht dieser strotzend erfüllten Schwellnetze mit grösseren Venenstämmchen an der glatten Fläche der Mundtentakeln.

Keber fand am vorderen Ende des Venenbehälters einen Klappenapparat (Beiträge z. Anat. und Physiolog. wirbellos. Thiere, pag. 50). Durch eine mit gelb gefärbten Lippen umgebene Queröffnung münden nämlich die Fussvenen in den Venenbehälter; ein kleiner Muskelfaden geht von der Mitte dieser Öffnung nach hinten und verwächst durch sehnige Fäden mit der unteren Wand des Sinus und dem Fusse. Ich finde diesen Faden ober dem wulstigen Rande mit der vorderen Lippe der Venenmündung verwachsen, wodurch bei der Contraction des kleinen Muskels, die gleichzeitig mit der des Fusses stattfindet, ein dünner Vorhang über die Öffnung gespannt wird und sie verschliesst (Fig 5 *a*). Reizt man an einer frischen Muschel die Stelle, so verengert sich, auch wenn der Muskelfaden durchschnitten ist, die Öffnung. Ich kann Keber nur beistimmen, wenn er das Anschwellen des Fusses einem Anstauen des Gefässinhaltes zuschreibt, möchte aber den gehemmten Rückfluss des Blutes bei der Richtung der Falte gegen den Venen-Sinus und ihrer Zartheit eher der Verengerung der Venenmündung selbst zuschreiben, deren Contraction von der Musculatur des Fusses abhängig ist. Die Klappe aber, das heisst die vor die Öffnung vorgespannte Membran, würde ich eher für eine den Rückfluss des Blutes aus dem Sinus gegen den Fuss hemmende Klappen-Vorrichtung halten.

Bedenkt man die heftigen Zusammenziehungen des Fusses im Momente, wo die Muschel aus dem Wasser genommen und geöffnet wird, die selbst so stark werden können, dass der Fuss an seiner Kante berstet, so wird man dieser zarten Membran kaum die Resistenz, einem solchen Drucke zu widerstehen, zuschreiben können.

D. BOJANUS'SCHER KÖRPER.

Unter dem Herzen und den beiden Vorkammern, entlang der Kiemenbasis, liegt ein System von Hohlräumen, deren einer, ein dunkel pigmentirter innerer faltiger Schlauch, unter dem Namen Bojanus'scher Körper bekannt ist. Er wird jetzt als Niere gedeutet und dürfte wohl bei allen Mollusken nachzuweisen sein.

Nachdem Gegenbauer und Leuckart gezeigt haben, dass bei den Pteropoden und Heteropoden dieser Körper die Wasseraufnahme in das Blut vermittelt, sind neue Untersuchungen über das ganze Höhlensystem um so dringender geworden.

Bojanus beschreibt (Isis 1819, 4. Band, pag. 47) diesen Körper, den er Lunge nennt, als einen länglichen, in sich selbst geschlossenen Sack von gefässreichem Gewebe und schwarzgrüner Farbe; auf jeder Seite liegt einer; beide geschieden, stossen Wand an Wand vorne (Bojanus nennt es oben) an einander; sie nehmen nach hinten an Ausdehnung zu und reichen bis zur Gegend des hinteren Schliessmuskels. Jede Lunge liegt in einem Lungenfache, zu welchem eine Öffnung führt, welche zwischen Kieme und Fuss, neben der Mündung des Einganges liegt und mit wulstigen Rändern versehen ist, das Athemloch; das Lungenfach selbst ist ein dünnhäutiger Sack, der von dieser Öffnung an bis zum hinteren Schliessmuskel reicht; vorne unter dem Mastdarme hängt das Lungenfach einer Seite durch eine Quervereinigung mit dem der anderen Seite zusammen, hinten ist es vom Nachbar geschieden, stosst Wand an Wand mit ihm zusammen und endet seitwärts mit seiner grössten Ausdehnung vor dem hinteren Schliessmuskel.

Ausdrücklich nennt Bojanus seine Lunge einen geschlossenen Sack; es ist daher ein späteres Missverständniss der Bojanus'schen Beschreibung, wenn man diesen Körper durch die bekannte Öffnung am inneren Kiemengange nach aussen offen stehend glaubte.

Die wulstige Öffnung des inneren Kiemenganges führt wirklich nur in das von Bojanus so genannte Lungenfach; wird aber Luft durch diese Öffnung eingeblasen, so wird auch die Bojanus'sche Lunge aufgebläht; da man die Verbindung, die zwischen Lunge und Lungenfach gegen alle bisherigen Annahmen wirklich besteht, nicht kannte, so dürfte diesem Umstande die Annahme einer unmittelbaren Communication des Bojanus'schen Schlauches mit dem inneren Kiemengange zuzuschreiben sein.

Eine neuere Untersuchung dieses Höhlen-Systemes verdanken wir Keber. Er berichtigte (l. c. pag. 21) das bisher waltende Missverständniss betreffs der äusseren Öffnung und zeigt, dass „dieselbe nicht in den Bojanus'schen Körper, sondern in eine zwischen letzterem und dem Herzbeutel liegende, mit wässriger Flüssigkeit gefüllte Höhle führt, in welche der Bojanus'sche Körper hineinragt, ohne jedoch mit ihm zu communiciren"; diese Höhle nennt Keber die Vorhöhle des Bojanus'schen Körpers, in deren Grunde derselbe flottirt. Weiter sagt Keber, dass diese Vorhöhlen über dem Venenbehälter mit einander in Verbindung stehen, „sonst aber durchaus keine Fortsetzungen nach den benachbarten Organen haben und wahre Blindsäcke sind".

Diese Beschreibung stimmt mit der schon von Bojanus gegebenen vollkommen überein, auch die Verbindung beider Lungenfächer kannte bereits Bojanus. Was Keber Vorhöhle nennt, nennt Bojanus Lungenfach.

Blainville vermuthete schon (Froriep's Not. 1826, Nr. 265) dass die Höhle des Bojanus'schen Körpers mit dem Pericardium in Verbindung stehe. Garner (Zoolog. transact. 1838, Vol. 2, pag. 93) kennt bereits bei *Unio* diesen Zusammenhang. Genau schildert ihn dann Keber (pag. 59). „In einer durch eine Hautfalte begrenzten vorderen Nebenhöhle des Pericardiums, gerade unter dieser halbmondförmigen Falte, liegt der trichterförmig verengerte Eingang in den Bojanus'schen Körper."

Auch bei den Pteropoden und Heteropoden fanden Gegenbauer und Leukart, dass die dem Bojanus'schen Körper entsprechende Blase nebst einer äusseren Öffnung in die Mantelhöhle noch eine innere besitzt, durch welche sie mit dem Pericardialraum in Verbindung steht. Bei der durch andere Thatsachen auch bei Muscheln sichergestellten Wasseraufnahme, und nachdem alle bisher sogenannten Wassergefässe im Sinne von Delle Chiaje sämmtlich als Theile des Venen-Systems erkannt wurden, auch die von v. Baer am Fusse der Anodonten vermutheten Öffnungen nicht vorhanden sind, brauchte eben nur eine Communication des Bojanus'schen Körpers mit der Vorhöhle gefunden zu werden, um auch für die Muscheln den Übertritt des Wassers bis in die Pericardialhöhle thatsächlich nachzuweisen.

Ich erwähnte bereits, dass, wenn durch die Öffnung des Kiemenganges Luft in die Vorhöhle eingeblasen werde, sich auch die Höhle des Bojanus'schen Körpers füllen lasse; es gelingt in der Regel auf diesem Wege auch in das Pericardium Luft einzublasen. Die angewendete Vorsicht liess kaum eine Verletzung der Wandungen vermuthen.

Um die Communications-Öffnung zwischen Vorhöhle und Bojanus'schen Körper zu finden, injicirte ich zuerst die Gefässe, die in den Wandungen des Bojanus'schen Körpers verlaufen, die Wandungen wurden dadurch prall gespannt, und Einrisse derselben leicht kennbar. Wird nun die Vorhöhle und der Körper der Länge nach aufgeschlitzt, so findet man dass die vorne in die Höhle nur hineinragenden Falten im kolbigen hinteren Ende desselben durchgreifen, dieses daher keine einfache Höhle, sondern ein durch zwei Zwischenwände in Abtheilungen geschiedener Raum ist; bald oben, bald unten sind an diesen Zwischenwänden Öffnungen bemerkbar, durch welche diese Abtheilungen mit einander in Verbindung stehen. Auch jene Wand, welche nach vorne das kolbige Ende des Bojanus'schen Körpers gegen die Vorhöhle abgrenzt, zeigt unten eine Spalte (Fig. 7, *a*) welche aussen in eine Öffnung führt. Durch diese, von Keber schon bemerkte, aber für ein Artefact gehaltene Öffnung communicirt die Vorhöhle mit den Abtheilungen des Kolbens vom Bojanus'schen Körper.

Es schien mir noch wünschenswerth, die Form dieses Labyrinthes in dem Kolben des Bojanus'schen Körpers genauer kennen zu lernen. Ich versuchte durch Injection vom Pericardium aus einen Abguss des ganzen Höhlensystems anzufertigen. Die Injectionsmasse erfüllte rückläufig auch die Vorhöhle, und trat durch die Vorhöhlenöffnung in den Kiemengang. Auch die Höhlen der anderen Seite erfüllten sich, und zwar nicht erst durch die Verbindungsöffnung der Vorhöhlen, sondern durch eine Communications-Öffnung, die unter der der Vorhöhlen die Hohlräume beider Bojanus'schen Körper mit einander verbindet. Nachdem die Weichtheile von der erstarrten Injectionsmasse entfernt wurden, zeigte es sich, dass das kolbige hintere Ende keineswegs eine Erweiterung des Bojanus'schen Schlauches ist, der grössere Umfang desselben hier vielmehr davon herrühre, dass das Rohr viermal auf und abwärts geschlungen ist. An der vorhin bemerkten Communications-Öffnung übergeht es unmittelbar in den Schlauch der Vorhöhle. Beide Höhlen gehören daher einem Schlauche an, der am hinteren Schliessmuskel geknickt, dann viermal geschlungen in zwei Schenkeln

sich über einander legt; hinten ausser Verbindung mit anderen Höhlen, mündet der obere Schenkel (Vorhöhle) in den Kiemengang, der untere (Bojanus'sche Körper) in das Pericardium. Die beiderseitigen Schläuche stehen ausserdem noch unter einander vor der Rückensehne des Fusses durch mediane Communications-Öffnungen in doppelter Verbindung, oben die beiden Vorhöhlen, unten die beiden Bojanus'schen Körper.

In den Figuren 3 und 4 sind die Abgüsse dieses Höhlensystems abgebildet, Fig. 3 von der linken Seite, Fig. 4 von unten; die Wandungen der Vorhöhle sind zurückgeschlagen, bei *a* ihre mediane Communications-Öffnung, *b* Öffnung die in die Höhle des Bojanus'schen Körpers führt, *F* der Fuss, *f* seine Rückensehne, die zwischen beiden Schläuchen durchtritt, *M* der hintere Schliessmuskel, *c* die mediane Verbindung beider Bojanus'schen Körper unter einander.

Die von Leydig (Müller's Archiv, 1855, pag. 59) beobachtete Form der Niere an jungen Individuen von *Cyclas cornea* ist mit der eben geschilderten Form des Bojanus'schen Schlauches bei *Anodonta* im vollkommensten Einklange, indem auch dort die Niere einen gewundenen Schlauch darstellt, dessen Ausführungsgang unter dem hinteren Schliessmuskel in den Sipho ausmündet. Der Theil, den Leydig Ausführungsgang nennt, dürfte der Vorhöhle entsprechen, beide unterscheiden sich von der Niere (eigentlichem Bojanus'schen Körper) darin, dass letztere Secret-Zellen in ihren Wandungen haben, erstere aber nicht. Ob die wiederholten Windungen, die der Bojanus'sche Schlauch bei Anodonten zeigt, ein generischer oder blos Altersunterschied ist, muss die Folge lehren. Gewiss steht auch bei *Cyclas* der Nierenschlauch mit dem Herzbeutel in Communication.

Was den Bau der Wandungen dieses Organes anbelangt, so hat schon Bojanus das gefässreiche Gewebe derselben gekannt und zugleich die Quelle richtig angegeben, von welcher aus dieses dichte Gefässgeflecht gespeist wird. Der zwischen beiden „Lungen" liegende Venenbehälter sendet in seinem ganzen Verlaufe seitlich dichte Gefässe ab, die in die Wandungen der Lunge eintreten, aussen aber in der Kiemenarterie (Bruthälter-Arterie von Bojanus) sich wieder vereinigen. Bojanus und auch Keber haben diese Netze mit Quecksilber erfüllt. Die Bojanus'schen Abbildungen geben auch ein ziemlich richtiges Bild dieses Gefässsystemes. Auch v. Hessling (histologische Beiträge zur Lehre von der Harnabsonderung, 1851, pag. 7) ist es gelungen, wenigstens theilweise die Netze des Bojanus'schen Körpers zu erfüllen, und die vorspringenden Falten und Blätter als Träger eines capillaren Gefässsystemes nachzuweisen. Er findet an diesen Capillaren „die grösste Ähnlichkeit mit den bekannten Gefässwindungen, Gefässknäueln in den Nieren höherer Thiere, da sich ein Zweig in eine grosse Menge von Windungen auflöst, die sich in einem kurzen Stämmchen sammeln, das nach kurzem Verlaufe abermals sich in einen Glomerulus ausbreitet". Diese Auffassung der Gefässbildung in den Netzen des Bojanus'schen Körpers ist offenbar nur einer theilweisen Erfüllung derselben entnommen; gelingt es aber das ganze Netz zu erfüllen, so ist das Bild ein anderes.

Um dieses Gefässsystem ganz zu erfüllen, mache ich die Injection durch die in Fig. 1 mit *t* bezeichnete Vene. Sie ist leicht zu finden, da sie ganz oberflächlich liegt, und an frischen, eben aus dem Wasser genommenen Muscheln bei eiliger Abnahme der Schale noch von Blut erfüllt, leicht erkannt wird. Sie liegt dicht hinter dem vorderen Schliessmuskel und verläuft am unteren Leberrande in die Tiefe zum Venenbehälter. Es füllt sich bei gelungener Injection vom Venensystem aus das Gefässsystem des ganzen Bojanus'schen Körpers, zugleich die Kiemenarterien, die hinteren Pericardial-Venen, die Venen des Mantelsaumes und des hinteren

Schliessmuskels. Wird dann nachträglich noch vom Pericardium aus das Höhlensystem des Bojanus'schen Körpers erfüllt, so ist damit der klärste Überblick seines Baues gewonnen.

Der obere Schenkel (Vorhöhle) hat vorne eine glatte Wand, der untere Schenkel (Bojanus'scher Körper) eine runzliche (Fig. 7), von welcher Falten in das Innere hineinragen. Wände und Falten sind Träger eines groben Gefässnetzes, welches durch zwei Reihen seitlicher Öffnungen aus dem Venenbehälter gespeist wird. Die obere Reihe feiner Öffnungen führt in die Wandung der Vorhöhle zu einem dichten Netz, dessen oberflächliche Lage nur mit einer Loupe sichtbare gewundene Gefässe mit engen Maschen (das Schwellnetz) zeigt. Die untere Reihe der grösseren Öffnungen führt in stärkere, mit unbewaffnetem Auge sichtbare Äste, die in parallelen Zügen quer über die obere Wand des Bojanus'schen Körpers nach aussen laufen, und durch kurze Queranastomosen vereinigt ein Netz darstellen, welches in Fig. 17 abgebildet ist. Man muss einen Theil der Wand spannen, um diese Form des Netzes zu sehen, weil durch die Buchtung der Wandungen alle Gefässe einen stark gewundenen Verlauf annehmen, der keine genaue Einsicht in ihre netzförmigen Verbindungen gestattet. Nach der Höhle zu laufen stärkere Stämmchen entlang der oberen Faltenränder, und bilden in ihnen ein ähnliches Netz, wie an der äusseren Oberfläche, das sich nach den unteren Faltenrändern zu wieder in grösseren Stämmchen sammelt. Die innere Oberfläche trägt somit die gröberen Gefässramificationen, während die Oberfläche des Körpers und die Falten die feineren Verzweigungen führen.

Jedes Grübchen der inneren Oberfläche sieht man von einer Gefässmasche eingesäumt; die Grübchen sind keine Drüsen, sondern nur Gefässlücken, die mit dem bekannten kurzhaarigen Epithelium und den Zellen mit grün-bläulichen Körnern überkleidet sind.

Da diese Gefässe des Bojanus'schen Körpers aussen in den Kiemenarterien wieder zu Stämmchen, stellenweise sogar zu einem Haupt-Arterienstamme der Kiemen sich sammeln, so glaube ich diese Gefässbildung mit dem Namen eines Wundernetzes, und zwar eines bipolaren bezeichnen zu dürfen. Die von v. Hessling abgebildeten Glomeruli geben beiläufig ein Bild von der Gefässverzweigung innerhalb einer Falte.

Die Gefässe am gewundenen rückwärtigen Theile sind stärker, in sie fallen die stärkeren Netze, die vom Mantelsaume kommen; sie bilden zwei starke Kiemenarterien, die zur äusseren Kieme das venöse Blut führen.

Der Hauptstrom des Blutes geht aus dem Bojanus'schen Körper in die Kiemen, der aus der Wand der Vorhöhle aber gegen den Vorhof.

Der das Herz und beide Vorkammern einschliessende Pericardialraum wird unten von der Vorhöhlenwand und dem Venen-Sinus gebildet, nach oben und vorne durch die Mantelhälften geschlossen, vorne insbesonders durch den rothbraunen Körper Keber's. Wird das parenchymatöse Netz der Pericardialwand zuerst durch den Venen-Sinus in seinen hinteren oberen Partien erfüllt, dann vom Vorhofe aus der rothbraune Körper, so bekömmt man jetzt, wegen der strotzenden Wandungen, eine genaue Übersicht der Pericardialwandungen. Rückwärts breiter, um das dickere Ende des Atriums aufzunehmen, verschmälert sich der Pericardialraum nach vorne trichterförmig gegen den Austritt der Aorta und den eintretenden Mastdarm. Hinten ist er vollkommen geschlossen; vorne unter der Aorta und dem Mastdarme zeigt er die besprochene Communications-Öffnung zur Höhle des Bojanus'schen Körpers.

In diesem Theile des Pericardiums hat Keber noch eine Reihe von Öffnungen wahrgenommen, die von hier aus in das parenchymatöse Gewebe des rothbraunen

Organes führen. Er findet (l. c. pag. 20, 24) „im Grunde des trichterförmigen vorderen Theiles des Pericardiums (er nennt diesen Theil eine Nebenhöhle) ein netzartig durchbrochenes Gewebe, welches durch seine Lücken in ein poröses rothbraunes Organ führt, das auf der Rückenseite der Teichmuschel befindlich, den Herzbeutel an seinem vorderen Ende umfasst und theilweise deckt, nach vorne in einige Fortsätze und ein langes, nach den Mundkiemen verlaufendes Horn ausläuft". Dieses rothbraune Organ liess sich durch Quecksilber und Luft erfüllen. Er vermuthet, „dass dieses rothbraune Organ, durch die Netze in den Fortsetzungen mit der äusseren Mantelschichte in Verbindung, den Schalen-Bildungsstoff aus dem Bojanus'schen Körper, der ihn secernirt, gewissermassen als Ausführungsgang an seinen Bestimmungsort leitet".

Mit Recht macht Keber auf den von ihm rothbraunes Organ genannten Theil des Mantelrückens aufmerksam, die dunkle Pigmentirung lässt ihn deutlich unterscheiden, doch lassen sich keine bestimmten Grenzen nachweisen, die eine Trennung desselben vom Mantel als selbstständiges Organ rechtfertigen würden, er ist ein integrirender Theil des Mantels, der durch die von Keber entdeckten Öffnungen ins Pericardium die Wasseraufnahme in das Blut des Thieres vermittelt.

Seitlich des ins Pericardium tretenden Mastdarmes liegen nämlich zwei halbmondförmige Falten, die mit ihrer Concavität gegen den Mastdarm gekehrt sind und flache Grübchen einschliessen. In der Tiefe dieser Grübchen sind kleinere Öffnungen zu sehen (Fig. 6, *b*, *b*), durch welche man ein dichtes parenchymatöses Netz aufblasen kann, dass sich, wie auch Keber beobachtet, bis in die seitlichen Mantelflächen erstreckt. Dasselbe parenchymatöse Netz ist aber auch von Seite des venösen Systems für Injectionen zugänglich. Das Netz, welches Keber als Horn des rothbraunen Organes gegen die Mundtentakeln sich vom Pericardium aus erfüllen sah, ist eben jenes Netz des centralen Manteltheiles, welches peripherisch mit der Kreisvene zusammenhängt und central in den Vorhof mündet. Keber sah auch gelegentlich durch das Netz des rothbraunen Organes Quecksilber in den Vorhof gelangen, hält aber diesen Übergang durch eine Zerreissung der Wandungen hervorgebracht. Nachdem aber die Erfüllung des venösen Mantelnetzes, das zum Vorhof geht, auch vom Pericardium aus möglich ist, sich daher die Idendität des von beiden Seiten erfüllten Netzes herausstellt, so ist an der Communication des Atriums mit dem Pericardialraume gar nicht zu zweifeln. Ich suchte auch direct die Sache sicher zu stellen; injicirte vom Atrium aus mit leicht flüssigen Stoffen das rothbraune Organ, und sah, doch nicht immer, diese Stoffe in den Pericardialraum herüber treten; brachte ferner durch den Bojanus'schen Körper Farbstoffe ins Pericardium, und bei vorsichtigem Drücken gelangten sie in das parenchymatöse Netz des rothbraunen Organes und gelegentlich auch in das Atrium; und wenn ich zuerst vom Pericardium aus, dann vom Atrium aus diese Netze mit verschieden gefärbten Stoffen injicirte, begegneten sich in dem Parenchyme des rothbraunen Organes und den Mantelnetzen beiderlei Farben. Es unterliegt daher gewiss keinem Zweifel, dass eine Verbindung stattfindet zwischen dem Vorhofe und dem Pericardialraume, nur geschieht die Verbindung nicht in der Art, dass ein grösserer Canal beide vereinigt, sondern durch das parenchymatöse Netz des Mantels. Nur vom Atrium aus treten grössere Gefässstämmchen in dieses Netz. Dass Injectionen nur gelegentlich aus einem in den andern Raum gelangen, erklärt sich aus dem Umstande, dass der Injectionsdruck beide Male gegen die Peripherie des Mantels gerichtet leichter dessen Netze erfüllen als rückgängig gegen Atrium oder Pericardium die Injectionsflüssigkeit treiben wird.

Nur an dieser Stelle ist das Gefässsystem nach aussen geöffnet und nur auf diesem Wege kann es Wasser aufnehmen und Blut ohne zu bersten entleeren.

E. DIE KIEMEN UND IHR KREISLAUF.

Bekanntlich besteht jede Kieme aus zwei Blättern, die am unteren Rande mit einander verwachsen sind, oben aber von einander abstehend den sogenannten Kiemengang begrenzen. Die einander zugewendeten Blätter des Kiemenpaares einer Seite vereinigen sich oben in einer Membrane, die die Scheidewand der beiden Kiemengänge bildet. Hinter dem Fusse vereinigen sich auch die innersten Blätter der rechten und linken inneren Kieme, ohne dass aber von diesem Vereinigungswinkel eine Scheidewand aufwärts ginge und die beiden inneren Kiemengänge trennen würde. Vorne sind diese Blätter mit ihrem oberen Rande frei; erst ganz nach vorne vereinigen sie sich wieder mit dem Fusse, schliessen hier den inneren Kiemengang ab, und decken sowohl die Geschlechtsöffnung als auch die oben besprochene Eingangsöffnung in die Vorhöhle des Bojanus'schen Körpers.

Der Raum je zweier Kiemenblätter einer Kieme wird in Querfächer getheilt, indem die Blätter entlang der querlaufenden Kiemenarterienäste mit einander verwachsen. Da diese Äste durch rechtwinkliche Ramification sich vermehren, so theilen sich diese Fächer gegen den unteren Rand dichtomisch, bis sie zu feinen Canälchen werden, welche zwischen den Papillen des unteren Kiemenrandes frei ausmünden. Nur an den querlaufenden Zweigen der Kiemenarterien geschieht diese Verwachsung der Blätter, nicht aber so lange sie in der Längsrichtung der Kieme gehen. Durch eine Injection der Fächer vom Kiemengange aus verschafft man sich Abgüsse derselben von der besprochenen Form.

Nach oben zu, wo die Blätter aus einander weichen, treten wirkliche schmale Scheidewände auf, deren freier Rand in den Kiemengang sieht. An der äusseren Kieme reichen aber die Scheidewände bis an den unteren Kiemenrand.

Gegliederte Knorpel-(Chitin-)Stifte bilden ein biegsames Gerüste, welches die Kiemenblätter gespannt erhält[1]). Die Stäbchen sind paarig angeordnet. Die Stäbchenpaare laufen parallel unter einander von der Basis bis zum freien Rande der Kieme, wo sich die letzten Glieder jedes Stäbchens sehr spitzig zugeschärft verlieren. Jedes gegliederte Stäbchenpaar schliesst einen Canal ein, dessen Wandungen, namentlich an den Gliederungen der Stäbchen deutlich wahrnehmbar sind, indem wegen der auswärts gerichteten Zuschärfung der vier hier zusammenstossenden Glieder ein rhombischer Raum erzeugt wird, den der cylinderische Canal diagonal durchläuft. Gelblich schimmernde Kernmassen liegen innerhalb dieser Canälchen.

An den Gliederungsstellen sind alle Stäbchenpaare durch gemeinschaftliche Längsbänder vereinigt, die wegen der ziemlich gleichen Länge der Glieder parallel mit einander nach der ganzen Länge des Kiemenblattes verlaufen. Die queren Stäbchenpaare und die Längsbänder bilden daher ein regelmässiges Gitterwerk, dessen enge viereckige Maschen mit ihrem längeren Durchmesser gegen die Ränder der Kieme gestellt sind. Werden die Epithelien nach Anwendung verdünnter Salpetersäure mit einem

[1]) Leider ist mir Todd's „Cyclopaedia" nicht zugänglich, um die auf Kiemenstructur beziehlichen Artikel einsehen zu können.

Pinsel abgestreift, so ist schon mit einer Loupe die Zeichnung dieses Gitterwerkes von aussen auszunehmen, darf aber nicht mit der netzförmigen Zeichnung verwechselt werden, die mit freiem Auge wahrnehmbar ist.

Eine die Lücken des Gitterwerkes schliessende Grundmembran fehlt; jedes Kiemenblatt ist daher siebförmig durchbrochen. Nach beiden Seiten jedes Stäbchenpaares reihen sich die Flimmerepithelialzellen an; die Flimmerhaare sind daher gegen die Lücken des Gitters gerichtet und bilden Flimmer-Rinnen, in deren Grunde die Lücken bemerkbar sind. Alder und Hankock (Ann. d. sc. nat. 1851, XV, pag. 384) fanden dieses siebförmige Durchbrochensein der Kiemenblätter auch bei *Pholas* und *Mya* und sehen darin einen gemeinschaftlichen Charakter der ganzen Ordnung der Lamellibranchiaten. Ich bin auf diese Eigenthümlichkeit zunächst dadurch aufmerksam geworden, dass Injectionsmasse, die durch Einriss der Gefässe in die Kiemenfächer extravasirte, durch die Kiemenflächen durchsickerte; an Abgüssen der Fächer sah ich dann, den Reihen der Lücken entsprechend, Reihen kleiner Höckerchen ausgeprägt. Die Richtung des Wasserstromes durch die Wände geht gewiss von innen nach aussen, wofür schon das Vorkommen der Eier des *Hydrochares Anodontae* in den unteren Enden der Fächer spricht, indem sie dort durch das siebförmige Gitterwerk festgehalten werden.

Die Vereinigung der beiden Kiemenblätter kommt dadurch zu Stande, dass von jedem Stäbchenpaare eines Blattes zu dem entsprechenden Stäbchenpaare des anderen Blattes über den freien Kiemenrand weg eine Schlinge läuft, welche als Papille vorspringt, an der äusseren Kieme aber, besonders wenn diese von Brut ausgedehnt ist, glatt über den Rand weggeht. Die Knorpelstäbchen selbst greifen nicht über den Rand hinweg, sondern endigen früher. Indem sie vor ihrem Ende etwas aus einander weichen, wird der Canal, den jedes Paar einschliesst, erweitert. Die Wand des Canales und das feine Ende des Stäbchens lassen sich nicht mehr von einander unterscheiden, so dass jedes Stäbchenpaar gegen den Kiemenrand zu in diesen Canal ausläuft. Dieser Canal ist es, welcher die Randschlingen der Kiemen bildet und die entsprechenden Stäbchenpaare beider Blätter mit einander verbindet. An der Erweiterung liegt das letzte Längsband, daher die Endschlinge frei wird und papillenförmig vorspringt. Wenn man durch einen geringen Grad von Maceration oder sehr verdünnte Salpetersäure die Epithelien ablöst, so sind diese Schlingen leicht nachweisbar.

Am oberen Kiemenrande bilden die ersten, stärksten Glieder jedes einzelnen Stäbchens mit dem nachbarlichen einen Bogen (Fig. 18), der in der Fläche des Kiemenblattes liegt, aber nicht die Stäbchen eines Paares vereinigt, sondern die angrenzenden je zweier Paare, wodurch der Raum eines Stäbchenpaares, in welchem der besprochene Canal liegt, oben wie teichterförmig mündet.

Denkt man sich die Stäbchen eines Blattes durch die Randschlingen in die Stäbchen des anderen Blattes fortgesetzt, die beiden Blätter dann von oben her entfaltet, so würden lang ausgezogene Ellipsen zu Stande kommen, die die Lücken des Kiemengerüstes und die Flimmer-Rinnen einschliessen. Die angrenzenden Schenkel je zweier Ellipsen bilden ein Stäbchenpaar und begrenzen den Canal, der die Randschlinge bildet. Der Zwischenraum je zweier Randschlingen fällt in die Ellipse und entspricht daher einer Lücke des Gitterwerkes.

Am oberen Kiemenrande sind die Bögen der Stäbchen in das parenchymatöse Gewebe eingetragen, welches die Kiemen-Venenstämme umgibt. Am äusseren Blatte der äusseren Kieme stecken sie im Mantel, die Stäbchen der beiden mittleren Blätter liegen in der

Scheidewand der Kiemengänge, an den inneren Blättern liegen sie in der Wand der randständig verlaufenden Vene. Trotz der Vereinigung dieser Blätter hinter dem Fusse, hat jede Kieme ihr eigenes System von Stäbchen.

Rücksichtlich der Circulations-Organe der Kiemen lassen sich zweierlei Gefässäste unterscheiden, Kiemen-Arterienzweige, die aus dem Bojanus'schen Wundernetze entstehen und das venöse Körperblut in die Kiemen führen, und Kiemen-Venenzweige, die das arterielle Blut durch die Vorkammer dem Arterien-Systeme überliefern. Beiderlei Gefässe haben innerhalb der Kiemen im Allgemeinen eine quere Richtung, laufen entlang der Dissepimente der Kiemenfächer vom oberen zum unteren Rande. Immer liegen die Arterien nach innen, den Fächern näher, während die Venen an der äusseren Oberfläche zu finden sind. Häufig decken sich beiderlei Gefässäste innerhalb der Fächerscheidewände, manchmal liegen sie aber neben einander, so dass die Verästelungen der Venen, die man aussen an der Kieme sieht, nicht immer denen der tiefer liegenden Arterien entsprechen. Ihre Vertheilung geschieht immer unter rechtem Winkel, wie dies Fig. 20 an der Kiemenarterie der inneren Kieme erläutert.

Werden die Kiemenarterien durch das Bojanus'sche Wundernetz injicirt, so füllt sich an der inneren Seite des Kiemengerüstes ein capillares, respiratorisches Netz, welches die innere Oberfläche der Fächer bildet und das venöse Blut direct dem Wasserstrome aussetzt, der von den Kiemengängen aus die Fächer durchstreicht.

Es besteht aus gröberen mit freiem Auge noch sichtbaren Zweigen, die in der Längsrichtung der Kieme liegen und die querlaufenden Arterienstämme unter einander verbinden. Bojanus (l. c. pag 47) nennt sie kammartige Anastomosen; Treviranus, der sie in Fig. 65 etc. seiner „Beiträge" schön abgebildet hat, nennt sie pag. 64 längslaufende Verbindungsgefässe. Ein etwas welliger Verlauf, eine lichtbräunliche Färbung, die gegen dunklen Hintergrund absticht, lässt sie, auch nicht injicirt, leicht erkennen. Stellenweise, unregelmässige gleich weite Anastomosen verbinden sie wieder unter einander, wodurch ein grobes Gitter zu Stande kömmt, das nach aussen durchscheint und jene Zeichnung erzeugt, die an der freien Kiemenfläche mit unbewaffnetem Auge wahrnehmbar ist.

Diese Längsanastamosen sind bis jetzt für die feinsten und alleinigen Zweige der Kiemengefässe, für das respiratorische Netz der Kiemen gehalten worden. Robin (Rapport pag. 111) sagt: *Les capillaires branchiaux qui en partent* (nämlich aus den Stämmchen der Kiemenarterien) *sont tout en paralleles au grand axe de la branchie et non verticau;* dann später: *On reconnait, que l'aspect d'un treillis de vaisseaux capillaires n'est q'une illusion.* Es wird aber wirklich ein gitterförmiges Netz erzeugt, indem diese gröberen längs-anastomosischen Aeste durch kurze, feine nach dem Querdurchmesser der Kieme gerichtete Ästchen wieder unter einander sich vereinigen, so dass zwischen je zwei gröberen Längsgefässen eine Reihe von runden oder eckigen Lücken erzeugt wird. Die Längsgefässe liegen auf den Längsbändern, welche die Stäbchen mit einander vereinigen; ihre kurzen Queranastomosen entsprechen ihrer Lage nach im Allgemeinen den Stäbchenreihen, wesshalb die Lücken des Gefässnetzes mit den Lücken des Kiemengerüstes correspondiren.

In Fig. 13 ist dieses respiratorische Gefässnetz abgebildet. Man sieht die Längsanastomose mit einem Kiemen-Arterienzweige in Verbindung. Die Queranastomosen sind stellenweise getheilt, wodurch das Regelmässige dieses Gitternetzes etwas gestört wird. Es ist dies die Form,

welche das Netz näher dem oberen Kiemenrande hat, dem freien Rande näher wird das Netz ganz regelmässig gitterförmig, doch immer mit mehr abgerundeten Maschen.

Man braucht nur ein Kiemenblatt quer zu durchschneiden und damit ein Kiemenfach der Länge nach zu spalten, so wird man dieses Netz auch nicht injicirt sehen. Die Längsanastomosen sind wegen einer stark Licht brechenden Körnermasse *(forme d'un détritus de granulations moléculaires*, wie sie Robin nennt) undurchsichtig, und geben ihnen bei auffallendem Lichte die bemerkte lichtbräunliche Färbung. Die feineren queranastomosischen kurzen Zwischenäste sind bei richtiger Einstellung des Mikroskopes gleichfalls gut auszunehmen. Senkt man dann das Mikroskop auf das Niveau der äusseren Kiemenfläche, so scheinen durch diese Äste die Stäbchen durch, und ganz in der Tiefe der Gefässmaschen sind die wimpernden Reihen der Epithelien genau auszunehmen. Fig. 12 ist eine Abbildung dieses nicht injicirten Netzes.

Treviranus hat die grösseren Queräste der Kiemengefässe alle für Kiemenvenen angesehen, und da er die längslaufenden Verbindungsgefässe des respiratorischen Netzes von diesem Gefässsysteme aus injicirte, so war er in Verlegenheit betreffs der zuführenden Gefässe der Kiemen; er vermuthete, dass die feinere Querstreifung, welche den Kiemenstäbchen entspricht und die er unter dem Namen engere Quergefässe (l. c. pag. 46) beschreibt, ein zuführendes arterielles Gefässsystem sei, und glaubt, dass diese mit einem, an den oberen Kiemenrändern verlaufenden Gefässstamme in Verbindung wären. Das auffallende Missverhältniss zwischen den engeren zuführenden Gefässen, die aus der vorderen Aorta her gespeist werden sollen, und dem ableitenden Gefässsysteme führte ihn zu der Annahme, es würden auch in den Kiemen aus dem Wasser Nahrungsstoffe aufgenommen (l. c. pag. 49).

Robin warnt jedoch wieder, die feineren Hornleisten der freien Oberfläche nicht etwa für Gefässe zu halten, obgleich sie nach Injectionen ebenfalls gefärbt erscheinen; mit einer Loupe erkenne man schon dass sie nur die Injectionsmasse durchscheinen lassen, welche die grossen Capillaren erfülle. Arterien und Venen liegen nach Robin alternirend in den Blättern und würden durch die Längsanastomosen mit einander vereinigt, und dadurch der Übergang aus dem arteriellen in das venöse System hergestellt.

Wie ich schon vorhin erwähnte, ist das respiratorische Netz, welches vom Bojanus'schen Wundernetze aus erfüllt wurde, nur an der inneren Oberfläche der Fächer zu sehen, kaum dass es von aussen, trotz seiner intensiven Färbung angedeutet ist. Werden dagegen die Kiemen vom Vorhofe her injicirt, was wegen der geringen Festigkeit der Vorhofswandungen mit einigen Schwierigkeiten verbunden ist, so macht sich an der äusseren Oberfläche der Blätter ein Netz bemerbar, das wieder von innen aus gedeckt ist. Dieser Umstand weist schon auf ein doppeltes Röhrensystem hin; volle Überzeugung aber von der Anwesenheit zweier Netze in einem Blatte gewinnt man erst dann, wenn es gelingt die Kiemennetze von beiden Seiten her, aber mit verschieden gefärbten Injectionsstoffen zu erfüllen.

Man sieht zwei Netze einander nahezu vollkommen congruent sich decken, ein äusseres und ein inneres. Das innere kann arterielles, das äussere venöses genannt werden. Auch das äussere Netz besteht aus Längsanastomosen, zwischen den querlaufenden Venenstämmchen und Queranastomosen, die die Längsanastomosen verbinden; sie decken sich genau, so dass an der Zeichnung der Kiemenblätter beide Netze Antheil haben. Nur durch die Lücken des einen ist theilweise das andere zu sehen. Am deutlichsten tritt die Selbstständigkeit des oberflächlichen Netzes an solchen Stellen hervor, wo die Kiemenarterie

nicht in Begleitung der Kiemenvene verläuft, und dann aussen von dem venösen Netze gedeckt wird, wie es in Fig. 9 abgebildet ist.

Jede Möglichkeit einer Täuschung entfiel, als es mir gelungen ist, auch nicht injicirt das äussere Netz unter dem inneren liegend nachzuweisen. Ich empfehle zu dieser Untersuchung kleine Exemplare von Anodonten zu wählen, bei denen die lichtbrechenden Körper an den Längsanastomosen noch nicht so zahlreich sind, dann die Epithelien nach Anwendung von verdünnter Salpetersäuere abzupinseln, und das Deckgläschen über dem Präparate zu verschieben; es gelingt durch diese Manipulation öfter, die feinen Queranastomosen zu verschieben und einzeln zur Ansicht zu bringen. Die Contouren des äusseren Netzes an den Längsanastomosen sind bei richtiger Focaleinstellung deutlich zu unterscheiden.

Der Grund, warum die injicirten Netze trotz der Zartheit ihrer Gefässwandungen an den entgegengesetzten Flächen nicht sichtbar sind, liegt in der Körnermasse, die gewissermassen als Scheidewand die beiden Gefässsysteme trennt. Erst wenn die Injection aus einem in das andere Gefässsystem herübertritt, wird sie an der anderen Seite sichtbar.

Eines dieser Netze ist also ein arterielles, das andere ein venöses. Zu dem Systeme der rückführenden Gefässe gehört aber noch eine Reihe feiner Canäle, welche an der äusseren Oberfläche der Kieme liegen, und unmittelbar in die Venenstämme einmünden, nämlich die Canäle, die innerhalb eines Stäbchenpaares vom freien Kiemenrande bis zum oberen Rande verlaufen. Ich konnte mich lange nicht entschliessen, auch dieses Röhrensystem zum Gefässsysteme zu zählen, bis es mir endlich gelungen ist, die injicirten Stoffe innerhalb der Canäle zu finden, und dann deren Zusammenhang mit den Kiemen-Venenstämmen nachzuweisen. Man kann sich wirklich leicht täuschen und die durchschimmernde Injectionsmasse der Queranastomosen des Netzes, die genau den Stäbchen entsprechen, für den Inhalt der Stäbchenröhren halten.

Es füllen sich bei Injection der Venenstämme noch nebst dem oberflächlichen respiratorischen Netze feine parallel neben einander liegende Gefässchen, die mit dem Kiemen-Venenstamme wie die Zähne eines Kammes vereiniget sind; ihre Lage entspricht genau den Stäbchenpaaren, und lässt man die Kiemen durch Maceration zerfallen, so kann man sich leicht überzeugen, dass die Injectionsmasse innerhalb der Canäle der Stäbchenpaare liegt. Durch einseitig angebrachten Druck kann man sie in den Canälen verschieben. Nicht allein von der Basis der Kiemen, auch vom respiratorischen Netze aus lassen sich diese Röhren stellenweise erfüllen. Hat man eine Injection des venösen Kiemennetzes vor sich, so lässt sich genau angeben, ob auch die Stäbchenröhren erfüllt sind oder nicht. In Fig. 9 sind die Stäbchencanäle nicht mit erfüllt gezeichnet, man sieht die Stäbchenpaare auf den Queranastomosen liegen. In Fig. 8 sind sie bei etwa dreimaliger Vergrösserung auf das venöse Gefässsystem des äusseren Kiemenblattes aufgetragen.

Gegen den freien Rand der Kieme füllen sich bei jeder gelungenen Injection auch des arteriellen Netzes stets die Stäbchencanäle mit, und sie sind es somit, die innerhalb der Randschlingen die Gefässnetze beider Blätter mit einander vereinigen. Wie es scheint, anastomosiren diese Stäbchenröhren an den Gliederungsstellen der Stäbchenpaare mit dem oberflächlichen Netze.

Da die Stäbchen am oberen Rande der Kieme in den Wandungen der Venenstämme liegen, diese Gefässröhren aber aus einem oberflächlichen parenchymatösen Netze sich entwickeln, das die Venenstämme äusserlich umgibt, und von ihnen

aus mit Blut erfüllt wird, so sind diese Röhrchen oben ausser Verbindung mit den Stäbchenpaaren, und hier lassen sie sich auch nicht injicirt ganz isolirt darstellen.

Man bemerkt an frischen noch flimmernden Kiemenblättern diese Röhrchen als bräunlich pigmentirte Streifen vom oberen Rande aus nach unten laufen. Die Epithelien bilden jederseits an ihnen eine Flimmerreihe; werden diese durch Maceration in Essig oder nach Zusatz von verdünnter Salpetersäure entfernt, so sieht man diese Röhrchen frei über den Stäbchen flottiren, wird das Deckglas verschoben, so kann man sie aus ihrer Lage bringen. Oben sieht man sie mit der musculösen Umgebung des Venenstammes zusammenhängen, nach unten treten sie dann, etwa bei der zweiten Gliederungsstelle des Stäbchenpaares, in dessen Zwischenraum hinein. Eine Abbildung dieses Verhältnisses gibt Fig. 18, wo auf einer Seite die Röhren im Zusammenhange mit den Flimmerreihen, an der anderen frei flottirend und etwas verschoben dargestellt sind. *V* ist ein Venenstamm, theilweise abgerissen, um die Bögen der Stäbchen zu zeigen.

Ich habe diese Röhren an allen vier Kiemenblättern durch Injection nachgewiesen. Sie stehen, wie gesagt, an den Gliederungsstellen der Stäbchen mit dem oberflächlichen venösen Netze in Verbindung. Dass auch das arterielle und venöse Netz in der Mitte der Kiemenblätter mit einander anastomosiren, ist aus dem Umstande ersichtlich, dass bei sehr gelungenen Injectionen des inneren arteriellen Netzes auch das äussere Netz und die Stäbchencanäle erfüllt werden, in welchem Falle dann auch die äussere Oberfläche gefärbt wird, und die Täuschung leicht möglich ist, die Injection der äussern Oberfläche für das nur durchschimmernde innere Netz zu halten.

Bei Injectionen mit verschieden gefärbten Stoffen sieht man die Farben in den Netzen sich begegnen, einmal im inneren, stellenweise im äusseren, je nachdem die eine oder andere Injection weiter vorgedrungen ist. Gewiss ist, dass diese Übergänge durch die kurzen Queranastomosen der Netze vermittelt werden, worauf die Injectionen schliessen lassen; ich gestehe aber, den Übergang einer Queranastomose aus dem oberen in das tiefere Netz mit Bestimmtheit nicht gesehen zu haben.

Noch ist das Verhalten der Gefässe am freien Kiemenrande zu besprechen. Die beiden respiratorischen Netze lassen sich bis dahin am freien Rande verfolgen, wo das letzte Längsband liegt. Das innere Netz bildet hier zwischen je zwei Längsanastomosen nur eine Reihe rundlicher Lücken und lässt sich auch nicht injicirt deutlich nachweisen. Dass die Stäbchencanäle als Schlingen über den Rand zum anderen Blatte sich herüber spannen, wurde früher schon besprochen. Diese Gefässschlinge vertritt hier allein das venöse Netz, bildet also eine Anastomose zwischen den beiden letzten Längsanastomosen des venösen Netzes. Auch das innere arterielle Netz geht in einer Bogenanastomose in das andere Blatt über. Man bemerkt nämlich, wenn an nicht injicirten Objecten die Epithelien gut entfernt wurden, ohne dass die Schlingen durch das Abpinseln leiden, dass in der Concavität der Stäbchenschlinge eine Membran gespannt ist, die mit den Wandungen des inneren Netzes zusammenhängt, wodurch also jede Papille ein halbmondförmiges Blättchen darstellt, in dessen convexem freien Rande die Stäubchenschlinge verläuft, und dessen concaver aber schmaler Rand den Kiemenfächern zugerichtet ist. Dass diese Blättchen hohl sind und mit dem inneren Netze in Verbindung stehen, beweisen Injectionen, namentlich mit Carmin, die auch histologisch untersucht werden können. Es schwillt, wenn die Injection das Netz reichlich erfüllt, das ganze Blättchen papillenförmig auf, ist aber nur wenig eingedrungen, so sieht man den Carmin

blos innerhalb der Concavität liegen. Wegen des scharfen Beugungswinkels, den die Injectionsmasse nehmen müsste, um in das andere Blatt rückläufig herüber zu treten, gelingt es nur manchmal diesen Übertritt zu Stande zu bringen, meistens bersten die Bläschen. Wird später von Seite der Vene mit verschieden gefärbtem Stoffe injicirt, so erfüllt sich das Blättchen am convexen Rande; es decken sich beide Farben. Ob nun in der Randschlinge beide Gefässnetze noch repräsentirt sind oder nicht, ist schwer zu entscheiden, man kann sich aber die beiden Kiemenblätter recht wohl als eines denken, welches, in einer Lückenreihe gefaltet, die länger gewordenen Queranastomosen beider Netze als Papillen vorspringen lässt.

Die Reihen der Längsanastomosen beider Netze bilden wegen ihrer regelmässigen Anordnung gleichsam Längsgefässe, die parallel mit dem oberen Rande der Kiemen verlaufen; da aber der Querdurchmesser der Kiemen nach vorne und hinten abnimmt, so bilden die Enden der Längsanastomosen gewissermassen Treppen, auf denen senkrecht, in der Richtung der Stäbchen die Papillen sitzen. Wahrscheinlich vereinigen sich hier die Längsanastomosen beider Blätter mit einander.

Am oberen Rande der Kiemenblätter, ihrer Länge nach verlaufend, liegen die grossen Blutgefässstämme der Kiemen. Über ihre Anordnung lässt sich im Allgemeinen nur so viel sagen, dass alle arteriellen Zweige aus dem Dissepimente der Kiemengänge zu den vier Blättern hingehen; dagegen das äusserste und innerste Blatt je einen, die beiden mittleren der Scheidewand entsprechend nur einen gemeinschaftlichen Venenstamm besitzen. Diese Venenstämme sind auch nicht injicirt wegen ihrer oberflächlichen Lage und wasserklaren Erfüllung schon ohne Präparation zu erkennen, und zwar im Vereinigungswinkel des äussersten Blattes mit dem Mantel, der beiden mittleren Blätter unter einander und am freien Rande der innersten Blätter. Die Venenstämme decken überall die Arterienstämme, die erst dann zum Vorschein kommen, wenn die Kiemengänge geöffnet werden.

Bojanus hat die Richtung des Blutstromes ganz gut erkannt; die „Lunge“ führt das Blut zu den „Bruthältern“, das venöse nimmt die Vorkammer auf. Nicht so Treviranus; er glaubte, dass die Arterien, die er für Venen hielt, durch den Bojanus'schen Körper das arterielle Blut aus den Kiemen in den Vorhof führen. Selbst Bojanus verkannte aber die Anordnung der grösseren Gefässe, namentlich der Venen, deren genauere Schilderung erst Robin (l. c. pag. 121) gegeben.

Die Scheidewand der beiden Kiemengänge enthält, wie der Mantel, ein engmaschiges parenchymatöses Blutgefässnetz, welches sich theils vom Vorhofe aus, theils vom Venen-Sinus aus erfüllen lässt. Durch dieses Netz verlaufen die Gefässstämme der Kiemen, dochnicht abgeschlossen, so dass Communication derselben mit dem Netze stattfindet, die aber deutlich nur durch Injection von Harzmassen sichtbar wird. Robin kennt dieses Verhältniss, indem er den da verlaufenden Kiemen-Venenstamm mit *beaucoup moins nettement limité* bezeichnet. Wie es in Fig. 10 an der Kiemenarterie dargestellt ist, lässt sich der Stamm so wie die Zweige in der Tiefe des Netzes, von ihm umgeben, mit der Loupe leicht verfolgen; stellenweise treten die Stämmchen an die Oberfläche und es sind hauptsächlich die Theilungswinkel, die von diesem Netze erfüllt sind. Das ganze Netz lässt sich bis zum Rande der Kieme verfolgen. Da nun theils zu-, theils ableitende Kiemengefässe da verlaufen und auch die Venen mit dem Netze communiciren, so ist eine Communication beider Blutgefässsysteme dadurch gegeben, die aber bei Injectionen nur mit sehr feinen Injections-

Massen eine Erfüllung, z. B. der Venenstämme von den Arterien aus veranlasst, in welchem Falle dann eine Täuschung bezüglich des Gefässverlaufes leicht möglich wird. In diesem parenchymatösen Netze befindet sich daher gemengtes Blut, welches aber, wie es scheint, nur gegen den Vorhof, wie der Mantel, seinen Ablauf hat. Ein Theil des Venenblutes, das durch das Bojanus'sche Wundernetz passirte, kann somit auf diesem Wege die Kiemen umgehen, was schon desshalb nichts Auffallendes hat, als ja auch die Scheidewand der Kiemengänge beiderseits von Wasser umgeben ist.

Die oben besprochenen Querstämmchen der Kiemenarterien entwickeln sich folgender Massen aus dem Bojanus'schen Wundernetze. Letzteres reicht nämlich nicht bis zum hinteren Ende der Kiemen, daher sich dort ein Längsstamm bilden muss, der bis ans Ende der Kieme reicht. Die groben Gefässnetze, die im geschlungenen Theile des Bojanus'schen Körpers liegen, setzen ihn zusammen; er ist in Fig. 7 mit 2 bezeichnet. Er verläuft längs dem Vereinigungswinkel der beiden mittleren Kiemenblätter, doch umfasst er den scharf an der Vereinigungslinie liegenden Venenstamm. Seine Äste gehen in zwei Reihen zu den zwei Kiemenblättern, die sich hier vereinigen.

Ein anderer Längsstamm geht vorwärts in der Scheidewand der Kiemengänge und entsteht gleichfalls aus dem geschlängelten hinteren Theile des Bojanus'schen Netzes, doch versorgt dieser Stamm nur die äussere, nicht die innere Kieme; er liegt der äusseren Fläche der Scheidewand näher, daher er bei Eröffnung des äusseren Kiemenganges sichtbar wird; so ist er auch in Fig. 7, 1 dargestellt, nach Hinweglassung des parenchymatösen Netzes der Scheidewand. Bojanus hat diese beiden Äste in seiner Fig. 3 mit *o*, *p*, in Fig. 9 mit *h*, *i* bezeichnet.

Nur die innere Kieme bezieht ihr Blut aus der vorderen nicht gewundenen Partie des Bojanus'schen Körpers und zwar ohne Vermittelung eines Längsstammes, indem unmittelbar aus Partien des Bojanus'schen Wundernetzes, welches mit dem parenchymatösen Scheidewandnetze in Verbindung ist, die einzelnen Querstämmchen sich bilden. Zwischen beide Astfolgen für die äussere und innere Kieme schiebt sich in der Winkelkante der venöse Stamm hinein.

Aus diesen Längsstämmen, oder unmittelbar aus dem Bojanus'schen Netze entstehen die Querstämmchen der Kiemenarterien, die innerhalb der Blätter verlaufen. Das äussere Blatt der äusseren Kieme und das innere Blatt der inneren Kieme haben keine besonderen Querstämmchen, sondern bekommen ihr Blut, da wo die Kiemenfächer durch wirkliche Scheidewände getrennt sind, also am oberen Rande der inneren Kieme und in der ganzen äusseren Kieme, durch Nebenäste zugeführt, die innerhalb dieser Dissepimente hinübertreten, wie in Fig. 11 an einem Stücke der äusseren Kieme dargestellt ist, oder manchmal durch Nebenäste, die am vorderen Kiemenrande in das andere Blatt umbeugen, wie in Fig. 7, 3.

An der inneren Kieme, wo unten die Fächer durch Verschmelzung der Blätter längs den Arterien gebildet werden, sind diese Querstämmchen beiden Blättern gemeinschaftlich, indem sie eine vierfache Reihe von Längsanastomosen dem respiratorischen Netze der beiden Wandungen je zweier angrenzender Kiemenfächer zuführen. Bei Eröffnung eines solchen Faches ist von der Kiemenarterie dann nichts zu sehen.

Von Venenstämmen beschreibt Robin (l. c. pag. 121) zwei grössere, deren einer längs dem oberen freien Rande vom inneren Blatte der inneren Keime liegt und nach Vereinigung

dieser Blätter beider Seiten hinter dem Fusse zu einem unpaaren, medianen Stamm verschmelzen; vorne biegt er jederseits gegen den Vorhof um; der andere, weniger deutlich begrenzt, folgt dem gemeinschaftlichen Anheftungsrande des inneren Blattes der äusseren, und des äusseren Blattes der inneren Kieme. Mit dem ersteren in Communication ergiesst er sich in den Vorhof durch Öffnungen, welche, wenn die Blätter der äusseren Kieme nicht durch Eier entfaltet sind, auch die Gefässe des Mantels und äusseren Blattes aufzunehmen scheinen. Ein *tronc collecteur* am Rande des äussersten Kiemenblattes sammelt das Blut des Mantels und dieses Kiemenblattes, um beide gleichfalls dem Vorhofe zuzuführen, was besonders dann deutlich wird, wenn das Thier Brut in seinen Kiemen trägt. Die Äste der Branchialarterien alterniren mit denen der rückführenden Gefässe.

Diesen im Allgemeemeinen richtigen Umrissen habe ich nur noch einige Details zuzufügen.

Der Vorhof des Herzens ist an seinem ganzen äusseren Rande an die Wand des sogenannten Herzbeutels befestiget, und verschmilzt da theils mit dem Mantel, namentlich mit dem von Keber „rothbraunes Organ“ genannten Theile, theils weiter einwärts mit der Scheidewand der Kiemengänge und dem Netze der Vorhöhlenwand, durch welche letztere Verbindnng einerseits die Vorhöfe mit dem *Sinus venosus*, andererseits vorne da unter sich in Verbindung stehen, wo die Vorhöhlenwände beider Seiten brückenförmig über deren Communications-Öffnung sich vereinigen (siehe den schematischen Durchschnitt des Muschelleibes Fig. 2).

An diesem äusseren Rande des Vorhofes entwickelt sich durch eine Menge von Muskelfäden ein Balkengewebe, dessen Räume mit den parenchymatösen Gefässnetzen der nachbarlichen Theile im unmittelbaren Zusammenhange stehen.

Nach vor- und rückwärts ragt vom Vorhofe in den Mantel eine Art schwammiger Fortsatz heraus, in dessen Mitte eine canalartige Fortsetzung der Vorhöhle liegt. In diesen Fortsatz fallen beiderseits die Mantelvenen-Netze.

Grössere Öffnungen im Seitenrande des Atriums führen in Venenstämme, die aus diesen nachbarlichen Organen und den Kiemen entstehen und das parenchymatöse Netz des Herzbeutels und der Scheidewand der Kiemengänge durchsetzen. Durch drei grössere Öffnungen münden die Kiemen-Venenstämme ins Atrium. Die grösste hintere Öffnung führt in einen Stamm, der entlang der Scheidewand der Kiemengänge verläuft und den oberen Rand der entsprechenden zwei Kiemenblätter bis zu ihrem hinteren Ende verfolgt (Fig. 8, 1). Er versorgt beiläufig in der halben Länge die beiden Blätter durch quere Zweige, welche mit denen der Kiemenarterien gleichen Verlauf haben. Ein ähnlicher Zweig, doch ohne besondere Längsausdehnung, liegt vor diesem und versorgt die mittlere Partie derselben Kiemenblätter; nach hinten und vorne steht er mit den Nachbarstämmen in Verbindung und ergänzt den Längsstamm, der im Vereinigungswinkel dieser Kiemenblätter liegt. Am vorderen Pericardialende entsteht ein dritter Stamm (Fig. 8, 2), der früher einen nach vorne gehenden, den mittleren Längsstamm ergänzenden Zweig abgibt, und dann über den vorderen Kiemenenden vor der Öffnung in die Vorhöhle gegen den Fuss zieht, am oberen Rande des innersten Kiemenblattes verläuft, mit dem der anderen Seite hinter dem Fusse zu einem unpaaren Stamm sich verbindet und eine Communication des linken und rechten Kiemen-Venensystemes vermittelt; auch diese Vene ist von einer Art parenchymatösem Netze umgeben.

Das äusserste Kiemenblatt am oberen Rande mit dem Mantel vereinigt, hat mit dessen Venen gemeinschaftliche Mündungen im spongiösen Gewebe des Vorhofsrandes; einzelne dieser

Äste sind gleichfalls in Fig. 8 angegeben. Drei Kiemenblätter, die unmittelbar an den Vorhof angrenzen, entleeren daher unmittelbar in einzelnen Canälen ihren Längsstamm in denselben; nur der randständige freie Längsstamm des innersten Blattes mündet auf Umwegen durch einen Canal in den Vorhof.

Das Randnetz des Vorhofes in Fig. 8 ist schematisch gehalten; die Stämme nach der Natur gezeichnet. Das venöse Netz des äussersten Blattes ist etwa 3mal vergrössert.

Zur besseren Übersicht der Blutvertheilung in dem Kiemen- und Körperkreislauf diene die schematische Durchschnittszeichnung des Muschelleibes Fig. 2. Der zu den Atrien gehende Blutstrom ist roth, der zu den Kiemen gehende ist blau gefärbt. Der Durchschnitt fällt auf die Mündung des hinteren Kiemen-Venenstammes, dessen Äste durch die Scheidewand der Kiemengänge zu den mittleren Blättern verfolgt werden können (Fig. 2, 3), im Vereinigungswinkel läuft er in einen Längsstamm aus. Die Arterien der inneren Kieme (Fig. 2, *b*) bilden da keinen Längsstamm, da sie einzeln aus dem Bojanus'schen Netze entstehen, der Längsstamm für die äussere Kieme ist quer durchschnitten (*a*). Das Schwellnetz der Scheidewand entleert sich in den Vorhof, sowie auch die Netze der Vorhöhlenwand, die aus dem Venen-Sinus entstehen.

F. DIE WASSERAUFNAHME.

Die Mollusken verdanken ihren Namen dem eigenthümlichen gelatinösen Aussehen ihrer Organe, namentlich des Mantels und Fusses an den Kiemen-Gasteropoden und Lamellibrachiaten. Diese Eigenthümlichkeit schwindet aber allmählich unter Entleerung einer grossen Menge wässeriger Flüssigkeit, wenn die Thiere längere Zeit ausser dem Wasser liegen, dabei sind kräftige und anhaltende Contractionen ihres Leibes bemerkbar. Es schien unwahrscheinlich, dass alle entleerte Flüssigkeit Blut sei, das überdies, bei den damals herrschenden Ansichten über die Kreislaufswege, durch eine Ruptur der Organe hätte entleert werden müssen, und man nahm endlich, um dieses Schwellvermögen zu erklären, ein „System von wasserführenden Gefässen“ an, welches neben den Blutgefässen in Netzen alle Gewebe des Leibes durchdringt und durch besondere Öffnungen nach aussen mündet. Die Sache wurde um so verwickelter, als Milne Edwards die bisher geltende Cuvier'sche Anschauung über das Blutgefässsystem dahin modificirte, dass dieses unvollständig sei, und das Blut in blossen Organen- und Parenchymlücken, nicht aber durch besondere Gefässmembranen abgeschlossen im Leibe sich vertheile. Die logische Consequenz führte endlich, als man beiderlei Gefässsysteme nun neben einander bestehend nicht mehr annehmen konnte und dennoch das Schwellvermögen des Molluskenleibes einer Wasseraufnahme zuschrieb, zu der Annahme, dass das Blutgefässsystem selbst durch besondere Öffnungen nach aussen münde.

Das vor Kurzem erst von Agassiz (Zeitschrift für wissensch. Zoologie VII, pag. 179) mitgetheilte Experiment, wo contrahirte Mollusken in graduirte Röhren gebracht, neuerdings aufquollen, sich wieder zusammenzogen und bewegten, ohne dass dadurch das neue Niveau der Wassersäule irgend geändert worden wäre, beweist zu schlagend, dass das Aufquellen des Molluskenleibes durch Wasseraufnahme geschehe. Die Erledigung dieser Angelegenheit dreht sich daher nur mehr um die Beantwortung folgender zwei Fragen:

1. Wird das aufgenommene Wasser durch Öffnungen, und zwar in der Art aufgenommen, dass es unmittelbar dem Blute zugeführt wird, oder

2. gibt es neben dem geschlossenen Blutgefässsystem noch ein System von Canälen, das, etwa dem Tracheensysteme der Insecten analog, als ein zweites Respirationssystem die Gewebe durchdringt und durch besondere Öffnungen Wasser in den Molluskenleib leitet?

Poli und Delle Chiaje haben zuerst im Mantel der Muscheln Netze dargestellt, welche namentlich der Letztere für ein System solcher Wassercanäle anspricht.

v. Baer war der Erste (Froriep's Not. 1826, Nr. 1, pag. 6), der den Wasserstrahl beobachtete, welcher an der Schneide des Fusses der Najaden hervorspritzt, wie diese Thiere aus dem Wasser gehoben werden. Er nahm da wenigstens drei solche Stellen an, durch welche Wassercanäle offen stehen sollten, die den Fuss durchziehen und das Aufschwellen des Fusses durch Wasseraufnahme verursachen. Einen Zusammenhang mit dem Gefässsystem scheint v. Baer nicht angenommen zu haben. Die von Delle Chiaje im Fusse von *Solen Siliqua* gefundene Öffnung, sowie die bei mehreren Gasteropoden am Fusse gefundene Öffnung schien v. Baer's Meinung zu bestätigen.

Vor Kurzem hat Agassiz (l. c. pag. 177) wieder bei *Pyrula carica* und *P. canaliculata* in der Mitte ihres Fusses eine Öffnung beobachtet, die sich im Fusse verästelt und frei durch eine Menge kleiner Zweige in die Bauchhöhle mündet. An *Mactra solidissima* strömt das Wasser aus deutlichen, mit blossem Auge wahrnehmbaren Poren heraus, die auch noch sichtbar bleiben, nachdem der Fuss schon ganz entleert ist. Sie stehen zu beiden Seiten des Fusses in schiefen Reihen und vereinigen sich zu immer weiteren Canälen und bilden im oberen Theile des Fusses eine geräumige Höhle, die durch eine dünne poröse Wand von der Bauchhöhle getrennt ist. Durch künstliche Injectionen gelingt es auch, das Gefässsystem zu erfüllen. Agassiz nimmt also auch ein Wassergefässsystem an, das am Fusse mündet und durch die Leibeshöhle mit dem Gefässsysteme in Verbindung steht. Doch kann sich das Gefässsystem und die Leibeshöhle theilweise wenigstens durch Contraction ihrer Wandungen vom Gefässsysteme abschliessen.

Auch Leydig findet bei *Cyclas cornea* (l. c. pag. 55) bei sehr starken Vergrösserungen am Rande des Fusses zwischen Büscheln längerer Wimperhaare helle Canäle von 0·0008‴ Durchmesser, theils einfach, theils verzweigt, welche in das Lückennetz zwischen der Fussmusculatur führen und nur bei gehöriger Ausstreckung des Fusses sichtbar sind. Diese Beobachtung würde im Wesentlichen mit der von Agassiz bei *Mactra* übereinstimmen, nur kommen die bedeutenden Grössenunterschiede in den Lücken, durch welche das Blutgefässsystem hier offen stände, in Betracht. Nach Agassiz würde noch ein System von Wassercanälen anzunehmen sein, nach Leydig würde das Blutgefässsystem des Fusses unmittelbar nach aussen münden.

Es liegen also nach Delle Chiaje Beobachtungen eines netzförmigen Wassergefässsystemes im Mantel, und nach Agassiz und Leydig im Fusse vor, doch kann ich mich nach den Ergebnissen von sorgfältig angestellten Injectionen des Mantels, die theils vom Vorhofe, theils von der Kreisvene, theils von Seite der Arterien unternommen wurden, und mit denen ich stellenweise eine vollkommene Schwellung des Mantels erzielte, nur dahin aussprechen, dass alle Abbildungen dieser Wassergefässe im Mantel, so weit mir solche zugänglich waren, genau mit Netzen übereinstimmen, die ich, mit der Vorkammer zusammenhängend, entschieden dem venösen Systeme zurechnen muss. Ich verweise auf die oben gegebene Darstellung dieser Netze der äusseren Oberfläche des Mantels, und muss wiederholt bemerken, dass dieses Gefässsystem doppelte anastomotische Verzweigungen habe, einmal in grösseren Ästen, die den gezeichneten Wassergefässen entsprechen und durch Aufblasen mit Glasröhrchen

dargestellt werden können, wenn diese auf gut Glück in den Mantel eingestochen werden. Das capillare feinere Netz in den Lücken dieses gröberen steht mit ihm in Zusammenhang. Gelingt es mit leicht flüssigen Farbestoffen die gröberen Netze zu erfüllen, so wird ein vorsichtiges Fortschieben der Injectionsmasse mit einem Scalpellhefte genügen, sie auch in die feineren Netze hinein zu treiben. Beide gehören einem und demselben Röhrensysteme an, und werden wegen ihres Zusammenhanges mit dem Atrium als Venen-Netze erkannt.

Ich habe keine anderen Muscheln zu meinen Arbeiten disponibel als die Najaden, kann aber für diese Gruppe der Beilfüsser rücksichtlich eines Wassergefässsystemes des Fusses mit Bestimmtheit behaupten, dass die Öffnungen, wie sie v. Baer bei Najaden gesehen, keine natürlichen, sondern durch Berstung zu Stande gebracht sind. Die starken Vergrösserungen, unter denen Leydig den Fussrand von *Cyclas* untersuchte, sind bei Anodonten der Grösse des Objectes und der kräftigen Contraction des Fusses willen nicht anwendbar.

Ich liess daher Muscheln in Essig absterben, und nahm sie erst dann zur Untersuchung vor, als jede Contractilität im Fusse erstorben war, breitete dann den Fuss auf eine Glastafel aus, konnte aber auch mit Loupen keine Spur irgend einer Öffnung wahrnehmen. An frischen Muscheln, wenn sie rasch aus dem Wasser gehoben werden, begegnet es dagegen sehr häufig, dass aus der Fusskante Wasserstrahlen herausspritzen; klemmt man einen noch strotzenden Fuss ein, so sieht man öfter eine solche durch Berstung hervorgebrachte Öffnung entstehen, kann aber an den unregelmässigen Rändern ihren Ursprung nicht verkennen. Einige Male gelang es mir, durch die vordere Aorta das arterielle System des Fusses unter Wasser so schnell zu injiciren, dass der Fuss erst dann stark sich contrahirte, als der harzige Injectionsstoff in ihn eingedrungen ist, es bildeten sich blasenartige Ausdehnungen an der Kante, die bei fortgesetzter Zusammenziehung barsten, und nebst wässriger Flüssigkeit auch Injectionsstoff entleerten. Ich halte es ausser Zweifel, dass jedes Herausspritzen eines Wasserstrahles aus der Fusskante nur einer Berstung des parenchymatösen Gefässnetzes zuzuschreiben ist, die eben nur durch schnell eintretende, heftige und unregelmässige Contractionen des Fusses bedingt wird. Wie Keber habe auch ich Blutkörperchen in der herausquellenden Flüssigkeit gefunden. Die von Agassiz beobachteten Verzweigungen der Injectionsmasse von den Poren gegen das Innere des Fusses, möchte ich für die Venenstämmchen halten, welche aus dem parenchymatösen Netze des Fussrandes entstehen und sich in geräumigen Stämmen sammeln (vergl. Fig 1).

Eine Bauchhöhle gibt es bei den Najaden nicht.

Auch Robin schreibt das Schwellvermögen des Mantels und Fusses der Gasteropoden und Lamellibranchiaten (Rapport pag. 103) nur der Anfüllung der venösen Netze und voluminösen Capillaren zu, die aber durch abwechselnde Contraction und Erschlaffung der Musculatur hervorgerufen werde, und bemerkt, dass diese von Delle Chiaje gut abgebildeten Netze des von ihm sogenannten Wassergefässsystemes eben nichts anderes als diese venösen Netze sind.

Nach dem oben Gesagten muss ich mich entschieden gegen die Anwesenheit irgend eines Wassergefässsystemes aussprechen, und glaube diese Ansicht um so mehr gerechtfertiget, als es mir bei der *Anodonta* gelungen ist, anderweitig die Wege nachzuweisen, welche das Blutgefässsystem dem Wasser zugänglich machen.

Ich habe bereits gezeigt, wie durch den Bojanus'schen Körper und seine Vorhöhle, welche beide eine continuirliche, aber gewundene Röhre bilden, das Wasser aus dem inneren

Kiemengange durch das von Bojanus sogenannte Athemloch bis in den Herzbeutel gelangen könne, habe ferner den Zusammenhang ermittelt, der zwischen dem Pericardium einerseits und dem parenchymatösen Netze des Mantels andererseits und dem Vorhofe besteht, und die Möglichkeit nachgewiesen, dass Wasser von aussen dahin gelangen könne. Schon van Beneden vermuthete „die Wasseraufnahme (Fror. n. Not. 1845, Nr. 727) ins Blut durch besondere Öffnungen, die ein im Innern der Gefässe selbst enthaltenes Organ (bei kopflosen Mollusken Anhängsel in dem Organ, das Bojanus für eine Lunge erklärt) durchsetzen". Leydig hat (Zeitschrift f. w. Z. II, pag. 176) einen Theil des Weges gefunden, den das Wasser nimmt. Der von ihm näher beschriebene Sack zwischen Mastdarm, Niere und Geschlechtstheilen bei *Paludina* ist wohl der Vorhöhle des Bojanus'schen Körpers der Muscheln gleich zu halten, er nimmt durch eine von Leydig entdeckte Öffnung Wasser aus der Kiemenhöhle auf und führt es durch eine oder zwei Öffnungen in das Innere der Nieren, den Bojanus'schen Körper. Wie das Wasser aus der Nierenhöhle in das Blut gelangt, hat Leukart (Zoolog. Untersuchungen III. Heft, pag. 57) und Gegenbauer (Zeitschrift f. w. Z. und Untersuchungen über Pteropoden und Heteropoden, 1855) bei den Pteropoden und Heteropoden gezeigt. Es geschieht durch den, dem Pericardium der Muscheln entsprechenden Pericardial-Sinus, der gegen die Kammern hin offen ist. Gegenbauer bemerkt schliesslich noch, dass das von Delle Chiaje beschriebene Wassergefässsystem auf diese geschilderten Thatsachen zu reduciren sein werde, dass solche dem Wassergefässsysteme angehörigen Gefässnetze und Canalverzweigungen nicht bestehen, und nur Theile des blutführenden Lacunensystemes seien. Er vermuthet, dass auch bei den Muscheln die Niere die Wasseraufnahme ins Blut vermitteln dürfte.

Betreffs des Mechanismus der Wasseraufnahme durch die Bojanus'schen Körper ist bemerkenswerth, dass nach den Beobachtungen von Gegenbauer die Niere der Pteropoden contractile Elemente enthält, und in rhythmischen Pulsationen das Wasser dem Pericardial-Sinus zuführt.

Ich habe am Bojanus'schen Körper und seiner Vorhöhle keine Contractionen gesehen, obgleich Fasern zugegen sind, die gewiss dem contractilen Gewebe angehören, und mache auf einen Mechanismus aufmerksam, der sehr wesentlich sein dürfte.

Es ist gewiss Jedermann aufgefallen, der sich viel mit Muscheln beschäftigte, dass nach Abnahme der Schale die Netze des Mantels oft mit Luft erfüllt gefunden werden. Manchmal ist es Leichensymptom, etwa durch Entweichen von Gasen aus dem Blute hervorgebracht, indem es häufiger bei Muscheln zu sehen ist, die im warmen Zimmer gehalten werden, als bei solchen, die beständig, wenn auch schon offen in der Kälte liegen. Doch geschieht es auch manchmal bei ganz frischen Thieren, wenn namentlich die Schalen von den Muskeln abgelöst werden. Es werden dadurch die Venennetze verletzt, und durch das gewaltsame Öffnen der Schalen Luft in diese Netze eingesogen. Man findet manchmal auch in der Vorhöhle und dem Bojanus'schen Schlauche Luftblasen. Dieser Umstand leitete mich auch auf einen Vorgang, der bei der Wasseraufnahme stattfinden dürfte. Es liegt ja der obere Theil des Muschelleibes, in welchem das Herz mit der Vorhöhle und dem Bojanus'schen Körper liegt, dicht an der Schale an, so dass das Öffnen und Schliessen derselben nothwendig mit einer Volumsänderung dieser Höhlen vor sich gehen muss. Schliessen der Schale presst deren Inhalt heraus, Öffnen derselben saugt Wasser durch das Athemloch in sie hinein, und es ist leicht denkbar, wie durch ein wiederholtes Öffnen der Schale, nachdem das einmal eingesogene Wasser in den Fuss durch die Arterien und in den Mantel seinen Ablauf genommen hat, das Thier Wasser förmlich in sich

hineinpumpen kann. Wie die obere Venenöffnung des Fusses, so scheint auch das Athemloch unter dem Willenseinflusse des Thieres zu stehen, und es damit in seiner Macht zu liegen, das Quantum der aufzunehmenden Wassermasse zu regeln.

Diese Saugwirkung der Schale kömmt andererseits auch dem Blutkreislaufe zu Gute, indem für den Fall, dass das Athemloch beim Öffnen geschlossen gehalten würde, der nun erweiterte Pericardialraum dadurch erfüllt wird, dass aus allen den Organen, die ihr Blut in das Atrium abliefern, also aus den Kiemen und dem Mantel, das Blut dahin strömen wird. Eine folgende gleichförmige Zusammenziehung des Fusses erfüllt wieder die Kiemengefässe. Dadurch gewännen die Bewegungen der Schale und des Fusses zugleich die Bedeutung von respiratorischen Bewegungen. Jene heftigen, plötzlich eintretenden und ungeregelten Contractionen des Fusses, welche dann bemerkt werden, wenn das Thier seinem heimischen Elemente entzogen wird, sind eben aussergewöhnliche, abnorme, die wegen des Widerstandes, den das abfliessende Blut an der gleichzeitig sich schliessenden oberen Venenöffnung findet, zu den besprochenen blasigen Auftreibungen und Berstungen der Fusskante führen.

Aus den bezeichneten Wegen ist ersichtlich, dass es der arterielles Blut führende Kreislaufsschenkel ist, der direct mit Wasser gespeist wird. Die Art der Verbindung, die nicht durch grössere Canäle, sondern durch ein feineres Netz, nämlich das des rothbraunen Organes, geschieht, erklärt auch, warum die Entleerung des Blutes beim Schliessen der Schale oben nur eine allmähliche ist, und warum, was auch Keber bemerkte, nur wenige Blutkörperchen im Pericardialraume sich finden. Durch dieses parenchymatöse contractile Sieb ist daher auch das Blutgefässsystem, wenigstens was Abfluss der Blutkörperchen betrifft, einigermassen nach aussen isolirt und geschützt.

Substanzlücken am Herzen und der Vorkammern, wie sie von Huxley bei den Firolen beobachtet wurden, habe ich nicht wahrgenommen, auch keinen Durchtritt von Luft oder Injectionsstoff durch ihre Wandungen bemerkt. Das parenchymatöse Netz des rothbraunen Organes dürfte der einzige Weg sein, auf welchem das Blutgefässsystem nach aussen offen steht; dasselbe aber als ein Convolut von Wassergefässen aufzufassen, dürfte desshalb nicht angehen, da es ja einerseits dem Blute durch die Arterien zugänglich ist, andererseits mit den Vorkammern durch einen grösseren Stamm in Verbindung steht. Der einzige Unterschied, der aber auch keine bestimmte Abgrenzung gegen den Mantel als besonderes Organ zulässig macht, ist, dass sich in seiner Substanz ähnliche Zellen mit bräunlichen Kernen finden, wie sie in den Wandungen des Bojanus'schen Schlauches vorkommen. Gegen den eigentlichen Mantel werden diese Zellen immer seltener, und verschwinden allmählich aus dem Parenchyme.

Bemerkenswerth ist, dass in diesem rothbraunen Organe manchmal weissgelbliche Flecken sich finden, die theils als Gruppen von Entozoen-Eiern, theils als Eier von *Hydrochares Anodontae* sich ausweisen. Es darf dies um so weniger überraschen, als es ja eben jener Theil des Muschelleibes ist, der dem äusseren Wasserstrome am zugänglichsten ist. Die in der Substanz des Mantels liegende *Hydrochares*-Brut dürfte nur von der Mantelhöhle aus darin eingebettet werden, wofür auch das narbige Aussehen dieser Fläche spricht.

Filippi hat nachgewiesen, dass den meisten Perlen Entozoen-Eier als Kern zu Grunde liegen. Als weiteren Beitrag zur Perlenbildung kann ich hinzufügen, dass ich einige Male theils grössere, theils kleinere Perlen in den Anodonten gefunden, sie aber immer frei innerhalb der Canäle des Mantels getroffen habe, die den venösen Netzen angehören.

Welche Bedeutung die Wasseraufnahme in das Blut der Mollusken für den Nutritions-Process hat, dürfte sich vor der Hand noch nicht mit Sicherheit bestimmen lassen, doch glaube ich, sie mit der Schalenbildung in Zusammenhang bringen zu sollen, da das Wasser zunächst dem Mantel, selbst in seiner Peripherie, zugeführt wird, der ja gerade das schalenbildende Organ ist. Vielleicht werden die grösseren Mengen von Kalk, die das Thier behufs seiner Schalenbildung umsetzt, leichter mit dem einströmenden Wasser auf diesem Wege als durch den Darm aufgenommen.

Indem die Aufnahme des Wassers in den Leib der Mollusken deren Gewebe rareficirt, ihre Dichtigkeit der des Wassers näher bringt, wird sie wohl auch auf das Schwimmvermögen nicht ohne günstigen Einfluss sein.

G. NACHWEISE DER GEFÄSSWANDUNGEN.

Um sich von der Abgrenzung der Blutgefässe durch selbstständige, von den Geweben der Nachbarorgane verschiedene Wandungen zu überzeugen, kann man betreffs der grösseren Gefässstämme die von Keber benützte Methode mit Vortheil in Anwendung bringen. Arterien sowohl als Venen lassen aufgeschlitzt eine Membran als Wandung erkennen, die durchscheinend nur theilweise die Umgebung des Gefässes deckt. Besonders deutlich wird sie, wenn durch eine früher gemachte Injection die Organe der Umgebung erfüllt sind, und die Wandung mit chromsaurem Kali gefärbt und aufgequellt wird. Wo Äste abgehen, sind genau begrenzte Öffnungen derselben wahrzunehmen; in den Venen des Fusses sind auch dicht stehende kleine Lücken bemerkbar, die in das parenchymatöse Netz der Umgebung führen. Wo grössere Venenstämme sich vereinigen, springt die Gefässmembran bei collabirtem Fusse faltenartig vor und erschwert dadurch nebst der Contraction des Fusses die Erfüllung dieser Gefässe durch Injection. In diesen Falten liegen Muskelbündel, die dem Trabeculargewebe des Fusses angehören.

Schwieriger ist es, die Gefässmembranen isolirt vom Nachbargewebe darzustellen. Zu dem Ende machte ich Injectionen mit zäher Wachsmasse, präparirte das Gefäss möglichst rein heraus, schlitzte es, entfernte das Wachs, und breitete dann die Membran auf Glas aus. Durch dieses Manöver gelingt es, namentlich an den Arterien des Fusses und im freien Mantelsaume, wo sie durch das zähe Fasergewebe der Musculatur gehen, sie zu isoliren und eine *Tunica propria vasorum* darzustellen. Sie ist etwas granulirt, und wie es scheint ganz structurlos, indem die feinen Fasern, die unregelmässig der Länge nach verlaufen, wohl nur Faltungen derselben sind; doch ist in der Umgebung grösserer Stämme noch ein zweites Fasersystem zu bemerken, das durch Zusatz von sehr verdünnter Salpetersäure deutlicher wird, sich zwar wesentlich von den breiten Muskelfasern des Fusses und Mantelsaumes unterscheidet, aber schon desshalb dem contractilen Gewebe zugerechnet werden kann, als dieselben Fasern im centralen, entschieden auch contractilen Theil des Mantels vorkommen. Eine innere Epithelialauskleidung habe ich nicht gesehen.

Die Gefässmembran der *Arteria coronaria* des Mantelsaumes habe ich auch auf diese Weise dargestellt, dass ich ein Stückchen Mantelsaum über Nacht in etwas weniger verdünnter Salpetersäure maceriren liess. Die Muskelfaserung wurde dadurch gelockert und konnte abgeschabt werden. Die Arterie mit einigen Zweigen war dann neben den Nervenfäden deutlich als zusammengefaltetes Rohr zu unterscheiden.

Nur wenige Gefässe laufen isolirt in der Art, dass sie nicht in das Organenparenchym eingegraben wären, und diese die Blutbahn vorzeichnen würden. Selbst die Aorta ist gleich an ihrem Ursprunge von Keber's rothbraunem Organ umgeben; wird sie herauspräparirt, so sieht man stellenweise ein Bläschengewebe ihr aufgelagert, das aber nicht der Aorta eigenthümlich, sondern Theil des Mantelparenchymes ist, indem diese Bläschen im ganzen centralen Manteltheile zu finden sind.

Wo Gefässe isolirt gehen, nehmen sie grössere Mengen der feinen contractilen Fasern auf; so der Venen-Sinus und die Kiemenvene des innersten Kiemenblattes. Am ersteren bilden die Muskelfasern ein Trabeculargewebe, das an der inneren Oberfläche sichtbar ist und bis auf die Gefässe des Bojanus'schen Körpers sich fortsetzt; an letzterer sieht man dichte Lagen Längsfasern, und in der Höhle desselben gleichfalls ein Balkengewebe, dessen Fasern eine quere Richtung einhalten, und in welchem die oberen Stäbchenbögen eingeschaltet liegen.

Schwieriger ist es die Continuität der Gefässmembran an den feinen Vertheilungen der Arterien und Venen darzustellen; es gelingt auch nur indirect darüber Aufschluss zu bekommen. Ich mache Carmin-Injectionen, lege die injicirten Organe in Essig, und bis die Contractilität derselben erstorben ist, werden sie bei durchfallendem Lichte untersucht. Überall, bis in die feinsten Zweige sieht man den Carmin von der allgemeinen Gefässhaut eingeschlossen und gegen die Organgewebe abgegrenzt. Nirgends, ausser bei nachweisbaren Einrissen der Wandung, sind Extravasationen des Carmins in die Gewebe zu sehen. Im Mantelsaume, im Darmcanale, in den Tastläppchen, am Fussrande konnte ich diese feinen Arterienzweige bis in die Capillaren verfolgen, und stellenweise selbst von diesen mir solche Bilder verschaffen, dass an blosse Parenchymlücken, in die der Injectionsstoff sich ergossen hätte, nicht gedacht werden kann. Selbst trockene und ganz durchsichtige Präparate dieser Art zeigen dieselbe begrenzte Blutvertheilung, was gewiss nicht sein könnte, wenn die Gefässmembran geschwunden und der Injectionsstoff sich eben nur von der Aggregation der Organengewebe geleitet, vertheilt hätte.

Isolirte Capillargefässe zu beobachten gelingt nur an den Kiemen und bei den einfachen Structurverhältnissen der Gefässe, überhaupt können diese Gefässe als Muster für die Gefässmembran im ganzen Gefässsysteme angesehen werden.

Oben wurde schon bemerkt, dass sich die Wandungen des doppelten respiratorischen Netzes einwärts des Kiemengerüstes deutlich nachweisen lassen. Die feineren queranastomotischen Äste, wenn es gelingt sie durch Verschiebung des Deckgläschens von einander und möglichst vom Stäbchenpaare zu isoliren, zeigen eine glashelle, bei Zusatz von verdünnter Salpetersäure wenig körnige Membran, die durch die Spannung etwas gefaltet, daher scheinbar gestreift erscheint. Stellenweise sind einzelne Kerne auf ihr gelagert. Die Längsanastomosen dagegen zeigen ein lockeres Gefüge jenes feinfaserigen contractilen Gewebes, welches auch im Mantel und in der Umgebung grösserer Gefässe zu finden ist. Eine Epithelialschicht lagert auf diesen Gefässnetzen aussen auf, ist durch Zusatz von verdünnten Säuren darstellbar, und kann mit einem Pinsel entfernt werden. Einen inneren Epithelialüberzug habe ich auch hier nicht gefunden. Durch das feine Fasernetz scheinen die respiratorischen Gefässe an das Kiemengerüst befestiget zu sein. Die stark lichtbrechenden Körnermassen der Längsanastomosen gehen auch in die grösseren Queranastomosen über; sie brausen durch Zusatz von Säuren auf, unter Rücklassung von feinen Granulationen, welche die Gefässe stellenweise trüben, und grösseren Körnern, welche die ausgelaugten Kalkkörner selbst zu sein scheinen. Die feine moleculare

Granulation ist gewiss durch die Säure aus dem Blute ausgeschiedener organischer Stoff, vielleicht Albumin aus dem zersetzten Kalkalbuminate des Blutes. Die Kalkkörner sind kein loser Inhalt der Längsanastomosen, da sie sich sonst auch zahlreicher in den Queranastomosen finden müssten; sie scheinen daher Ablagerungen und zwar an jener Wand beider Netze zu sein, mit der diese an einander grenzen, da sie nach aussen die Injection des inneren Netzes, nach innen die des äusseren Netzes decken. Bemerkenswerth rücksichtlich ihres Vorkommens ist ferner, dass sie am dichtesten an der Kiemenbasis sich finden, gegen den freien Kiemenrand dagegen allmählich verschwinden, daher dort die Längsanastomosen ganz durchsichtig sind. An ganz kleinen, jungen Muscheln sind sie auch minder zahlreich.

Die Gefässwand der Stäbchencanäle ist ganz structurlos, mit feinen und gröberen Körnchen erfüllt (siehe Fig. 18). Wenn man durch sehr verdünnte Salpetersäure die Epithelien lockert, sie dann mit einem Pinsel abstreift und die Kalkkörner ausgelaugt hat, gewinnt man die instructivsten Präparate für die histologischen Verhältnisse der Kiemen.

Überall also, wo sich die Gefässmembran genauer untersuchen liess, hat sie sich als eine structurlose, manchmal körnige Haut mit wenig eingestreuten Kernen gezeigt; grössere Gefässe besitzen ein Netz lockerer, feiner contractiler Fasern, die sich an grösseren Stämmen verdichten und ein Trabeculargewebe bilden. Ein solches liegt dem parenchymatösen Netze zu Grunde, welches die innerste Kiemenvene einsäumt.

So bestimmt Injectionen eine begrenzte und regelmässige Blutvertheilung im Mantel anzeigen, so ist es mir doch nicht gelungen, in ihm mit Sicherheit Gewebe zu finden, die als Gefässmembranen angesprochen werden könnten. Wird das innere flimmernde Epithelium des Mantels durch Zusatz von verdünnter Salpetersäure kenntlich gemacht, so zeigen sich in der ganz gleichförmigen Zellenschichte Lücken, die wie Mündungen von Drüsen-Crypten aussehen, ohne dass sich aber wirklich Drüsen nachweisen liessen; übrigens habe ich auch ähnliche Lücken gelegentlich im inneren Epithel der Kiemen gefunden. Das Epithelium ist, wenn der Mantel auf Glas ausgebreitet und entleert ist, in Falten gelegt, wodurch an frischen Präparaten oft Bilder zu Stande kommen, die groben Gefässnetzen täuschend ähnlich sind. Zusatz von Säure und dadurch bewirkte Coagulation in den Zellen ergibt den wahren Sachverhalt.

Werden die Epithelien nach Säurezusatz abgestreift, so sieht man ein dichtgeschlungenes Strickwerk jener feinen Fasern, die dem contractilen Gewebe angehören; andere Gewebselemente sind nicht sichtbar. Legt man aber ein Stück frischen, noch nicht collabirten Mantels, am besten so unter das Mikroskop, dass man einen Querschnitt des noch aufgequollenen Gewebes zwischen den beiden Epithelialschichten mit einem Deckgläschen fixirt, so findet man noch in dem besprochenen Fasergewebe gerundete helle Blasen von verschiedenen Grössen, die durch nachträglichen Zusatz von verdünnter Salpetersäure ihre Contouren beibehalten. Zellenkerne haben sie keine, und da sie stellenweise auch mit einander verschmelzen, so können sie kaum für Zellen gehalten werden. Ich muss gestehen, dass mir diese Gebilde räthselhaft geblieben sind. Manchmal zeigen sie eine solche Anordnung, dass man sie für Canäle halten könnte, die gewunden und verflochten sind. In diesem Falle würden sie die Wandungen des Schwellnetzes sein; doch ist diese Annahme in so lange nicht zulässig, als nicht ihre Erfüllung durch Injection constatirt werden kann.

Wenn es mir nun auch nicht gelungen ist, überall die Wandungen der Organen-Netze so isolirt darzustellen, wie bei den Cephalopoden, deren Capillaren durch H. Müller später bestätiget wurden, so glaube ich in der mikroskopischen Untersuchung durchsichtiger Präparate eine

solche Controle der Ergebnisse der Injectionen geübt zu haben, dass ich trotz des „*Nimium ne crede colori*“ für diese volle Glaubwürdigkeit in Anspruch nehmen kann.

Dass bei *Anodonta* ein vollkommen geschlossenes, d. i. in dem Organen-Kreislauf begrenztes Blutgefässsystem vorkomme, glaube ich als entschiedene Thatsache hinstellen zu können, um so mehr, als auch Robin nach eigenen Untersuchungen zu demselben Resultate gelangt ist.

Ich hatte bis jetzt nicht die Gelegenheit, diese Untersuchungen auf andere Familien der Lamellibranchiaten auszudehnen, doch lässt sich die gegründete Vermuthung aussprechen, dass im Wesentlichen derselbe Gefässbau bei allen sich finden werde. Die generischen Verschiedenheiten bedingen wohl manche Modification in der Anordnung der grösseren Gefässstämme und in dem Wasseraufnahms-Apparate, aber das Geschlossensein des peripherischen Kreislaufes und die Wasseraufnahme durch den Bojanus'schen Schlauch und den Pericardialraum, die Wasserzufuhr zum Mantel werden wohl durchgängig sich nachweisen lassen. Weiteren Untersuchungen muss es überlassen bleiben, darüber zu entscheiden, wie weit eine Degradation des Gefässsystemes bei anderen Mollusken Platz greift.

II. ÜBERSICHTLICHE SCHILDERUNG DER KREISLAUFSVERHÄLTNISSE DER ANODONTA.

1. Die Richtung des Blutlaufes lässt sich folgender Massen bestimmen: das arterielle Blut des Ventrikels nimmt durch die Verzweigungen einer vorderen und hinteren Aorta seinen Lauf in den ganzen Leib, mit Ausnahme der Kiemen (und der Scheidewand der Kiemengänge). Das venöse Blut geht durch den Bojanus'schen Körper in die Kiemen, und durch deren rückführendes Gefässsystem in den Vorhof des Herzens.

Der venöse Sinus zwischen den Bojanus'schen Körpern ist der Sammelplatz für das Körper-Venenblut. Er wird umgangen durch die hinteren Venen des Mantelsaumes, welche in das Gefässnetz des Bojanus'schen Körpers selbst fallen, doch ohne den Kreislauf zu umgehen. Das Venenblut des mittleren Manteltheiles, von seiner Anheftung am Fusse und den beiden Schliessmuskeln bis zur Anheftung an der Schale, umgeht den Kiemenkreislauf, indem die ausführenden Venennetze unmittelbar in den Vorhof fallen. Die Venen des rothbraunen Körpers münden gleichfalls in den Vorhof. An den Schliessmuskeln anastomosiren beiderlei Venensysteme unter einander.

Da der hintere Theil des Pericardiums und die dem Magen und der Leber entsprechende Oberfläche des Leibes in den Venen-Sinus das Blut abführen, so stellen sich an der Oberfläche des Muschelleibes vier Bezirke von Venenstämmen heraus, die sich schichtenweise nach vorne gerichtet decken. Die Venen des Pericardiums decken die Venen des rothbraunen Organes, diese decken vorne die Venen der Magen- und Lebergegend, seitlich die des mittleren Manteltheiles, letztere wieder den Mantelsaum. In ihren Netzen stehen alle Bezirke mit einander in Verbindung; auch mit dem parenchymatösen Netze der Kiemengang-Scheidewand, daher wohl alle nur als topographisch zu unterscheidende Theile eines und desselben Gebildes zu betrachten sein werden.

Die Mundtentakeln bekommen arterielles Blut, haben daher nur insoferne respiratorische Bedeutung, als sie ihr Blut durch Anastomosen mit den centralen Manteltheil-Venen den Vorkammern des Herzens direct zuführen können.

Auch aus dem Venen-Sinus gelangt einiges venöse Blut durch die Vorhöhlenwand des Bojanus'schen Körpers mit Umgehung der Kiemen in die Vorhöfe. Der arterielle und venöse Kreislaufsschenkel sind daher nicht gänzlich geschieden.

2. Das Gefässsystem des Bojanus'schen Körpers ist ein venöses Wundernetz; welches nach Art eines Pfortadersystemes das Körper-Venenblut in die Kiemen leitet.

3. Die Kiemen haben nicht allein ein doppeltes Blutgefässsystem in den zu- und ableitenden grösseren Stämmchen; sondern auch ein doppeltes respiratorisches Netz, dessen bisher nicht bekannte queranastomotische Zweigchen die Verbindung beider Systeme vermitteln.

4. Das Gefässsystem ist in seinen peripherischen Verzweigungen ein vollkommenes, das heisst durch besondere Gefässmembranen gegen die Organe und Gewebe begrenztes, daher das Blut in regelmässigen und constanten Strömen zu- und abfliesst, und nicht blos als Infiltrat die Organen- und Gewebelücken erfüllt. Es lassen sich mit Bestimmtheit Capillargefässe unterscheiden, die einerseits mit den arteriellen, andererseits mit den venösen Stämmen in unmittelbarer durch Continuität der Wandung vermittelter Verbindung stehen. Es lassen sich die Formen der Übergangsgefässe auf zwei Arten zurückführen. Die eine Form findet sich im Darmcanale, den Geschlechtsdrüsen und den Mundtentakeln. In diesen Organen übergehen die Arterien durch dendritische Ramification allmählich in das feine Netz der Oberfläche, welches insbesondere mit dem Namen Capillarnetz bezeichnet werden kann; die innere Oberfläche des Darmes, die Riffen der Mundtentakeln sind die Träger solcher Netze, die direct aus den feinen Arterienzweigchen gespeist werden. Rückläufig entstehen aus diesen feinen Netzen gröbere Netze, die theilweise schon zu dem Venensysteme gerechnet werden können, und betreffs des Gefässsystemes des Darmes mit dem allgemeinen Schwellnetze des Fusses sich vereinigen, ohne mehr eine Oberfläche zu gewinnen. An den Mundtentakeln übergeht das capillare Netz der Riffen, welches sich gewissermassen an das capillare Netz des Darmes am Munde anschliesst, gegen die äussere glatte Oberfläche in das Schwellnetz des Mantels, wo ein Netz anderer Art auftritt, aus dem unmittelbar die Venenstämmchen sich entwickeln. Auch dieses Netz hängt unmittelbar mit den Arterien zusammen, bildet aber bereits ein Schwellnetz.

Diese Schwellnetze bilden die zweite Form von Übergangsgefässen, und finden sich namentlich am Fusse, in dem Mantel, wie auch an seinen Fortsätzen. Sie sind Bestandtheile eines ganzen Schwellgewebes, welches die genannten Organe in allen ihren Dimensionen durchzieht; dieses körperliche parenchymatöse Netz zeigt in seinen Gefässen verschiedene Durchmesser; im Innern der Organe wird es von gröberen Gefässen gebildet, die mit freiem Auge noch sichtbar sind; nach der Oberfläche jedoch wird es von capillaren Gefässchen gebildet, die gut gefüllt dem unbewaffneten Auge eine gleichförmig gefärbte Fläche erscheinen lassen und nur mit Loupen aufgelöst werden können. Diese capillaren Oberflächennetze gehören in so ferne schon dem venösen Systeme an, als sie nicht unmittelbar mit den Arterienzweigchen in Verbindung sind, diese vielmehr in die gröberen Netze des Inneren der Organe übergehen, so dass die letzten Arterienenden in netzförmig vereinigte Gefässe münden, die grösser als sie selbst sind. Es ist dies dasselbe Verhältniss, wie es auch an den erectilen Organen der Wirbelthiere beobachtet wird. Die Oberfläche des Fusses zeigt allseitig nach gelungener Injection ein solches venöses, gleichförmiges, capillares Schwellnetz; ein ganz gleichgeformtes zeigt auch die innere Oberfläche des Mantels; da aber an der

äusseren Oberfläche desselben auch die Venenstämmchen und zwar netzförmig sich sammeln, so ist dieses Oberflächennetz seines Schwellgewebes hier durch die Netze der grösseren Venenstämmchen unterbrochen, und füllt nur die Lücken des letzten aus. Das Schwellgewebe des Fusses und Mantels wird von den Arterien aus gespeist, aber das Schwellnetz der Scheidewand der Kiemengänge, da keine Arterien dahin eintreten, ist blos Erzeugniss des venösen Gefässsystems, es wird vom Bojanus'schen Wundernetze und vom Schwellgewebe des Mantels aus erfüllt.

5. Das Schwellvermögen dieser Thiere ist durch Erfüllung des Blutgefässsystems zu erklären.

Ein Wassergefässsystem im Sinne Delle Chiaje's gibt es nicht, da die als solche bezeichneten Gefässe des Mantels und Fusses dem venösen Systeme angehören. Das Blutgefässsystem ist peripherisch geschlossen; unregelmässige, plötzlich eintretende Contractionen des Fusses können Berstungen desselben und Herausspritzen des Blutes bewirken; wie ja auch Holothurien, aus dem Wasser gehoben, sich so heftig zusammenziehen, dass sie ihre Eingeweide herauspressen.

6. Wasseraufnahme in das Blut findet Statt.

Der Bojanus'sche Schlauch vermittelt dessen Übergang bis in den Pericardialraum, aus welchem es durch Öffnungen, die seitlich vom Mastdarme liegen, in das Schwellgewebe des Mantels und in die Vorkammer des Herzens gebracht werden kann. Es ist der arterielles Blut führende Kreislaufsschenkel, der das Wasser aufnimmt. Zweck dieser Aufnahme scheint unter anderen auch die unmittelbare Zufuhr von Kalk zum Mantel zu sein, der mit Umgehung des Darmcanales direct in das Blut aufgenommen wird.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

TAFEL I.

Fig. 1. Das Venen-System des Fusses, mit seinen Anfängen am Darmcanale. *t.* der Venenast, in welchen die Netze des Mantelsaumes und theilweise die der Tentakeln fallen.

„ 2. Schematische Durchschnittszeichnung des Muschelleibes zur Übersicht der Blutvertheilung. Der zum Vorhofe des Herzens gehende Blutstrom ist roth, der zu den Kiemen gehende ist blau gefärbt. Der Durchschnitt fällt auf die hintere Mündung des Kiemenvenenstammes (vergl. Fig. 7, 8) der beiden mittleren Kiemenblätter, sein Durchschnitt ist mit 2 bezeichnet; 1. ist der Längsstamm des äusseren Blattes, 3. der Längsstamm des inneren Blattes quer durchschnitten; *a.* der quer durchschnittene Arterienstamm der äusseren Kieme; *b.* Kiemenarterien-Äste der inneren Kieme, die unmittelbar aus dem Bojanus'schen Wundernetze entstehen. In der Mitte der Querdurchschnitt des Venen-Sinus mit den seitlich abgehenden Gefässen des Bojanus'schen Wundernetzes (blau) und den Gefässen der Vorhöhlenwand (roth).

A. Pericardialhöhle; *B.* Höhle des Bojanus'schen Körpers; *C.* Vorhöhle; *D.* äusserer, *E.* innerer Kiemengang.

„ 3. Abguss des Höhlen-Systems des Bojanus'schen Körpers der linken Seite von aussen, die Wand der Vorhöhle zurückgeschlagen; *a.* ihre mediane Communications-Öffnung; *b.* Communications-Öffnung, die in die Höhle des Bojanus'schen Körpers führt; *F.* der Fuss; *f.* seine Rückensehne; *M.* hinterer Schliessmuskel.

„ 4. Dasselbe von unten; *c.* Communication der Bojanus'schen Höhlen unter einander.

„ 5. Der Venen-Sinus von oben gespalten, seitlich mit den Bojanus'schen Körpern und der vorderen Partie des Pericardiums; *a.* Mündung der Fussvenen und die Keber'sche Klappe; *b.* Communication der Bojanus'schen Höhle mit dem Pericardium; *M.* der zurückgeschlagene Mastdarm.

„ 6. Vordere Partie des Herzbeutels mit dem Mastdarm, die beiden Vorhöhlen eröffnet; *a.* Eingang in den Bojanus'schen Körper; *b. b.* Eingänge in Keber's rothbraunes Organ; *c.* Athemloch. Nach einem Präparate mit erfüllten Schwellnetzen des Mantels.

TAFEL II.

Fig. 7. Der arterielle Kiemenkreislauf mit dem Bojanus'schen Wundernetze der linken Seite, die Vorhöhle eröffnet mit ihrer medianen Communications-Öffnung und dem Athemloch. Der Mantel ist grösstentheils abgetragen, der äussere Kiemengang geöffnet; *a.* die Communications-Öffnung der Vorhöhle mit dem Bojanus'schen Schlauche; 1. der vordere Arterienstamm für die äussere Kieme; 2. der hintere gemeinschaftliche Stamm für die äussere und innere Kieme; 3. ein Übergangsast in's äussere Blatt; 4. hintere Pericardial-Venen; 5. Vene des Mantelsaumes, die in den gewundenen Theil des Bojanus'schen Körpernetzes übergeht.

„ 8. Das Herz, sein Vorhof mit den in ihn mündenden Venen. Der äussere Rand des Vorhofes parenchymatös (mehr schematisch gehalten), der hintere Fortsatz des Vorhofes mit seinen Gefässen, die theils vom Mantel, theils vom äusseren Kiemenblatte kommen; 1. hinterer Venenstamm der beiden mittleren Kiemenblätter; 2. vorderer Venenstamm, der zum innersten Kiemenblatte geht; 3. die vorderen Netze vom centralen Manteltheil; 4. vom rothbraunen Körper.

Ein Stück des äussersten Kiemenblattes mit seinem Längsstamm in Verbindung deckt den dritten Venen-Canal zum mittleren Längsstamm. Sein Venen-System dreimal vergrössert aufgetragen.

„ 9. Die beiden respiratorischen Netze eines Kiemenblattes, das arterielle Netz und ein Arterienstämmchen vom venösen äusseren Netze gedeckt, die Stäbchen äusserlich aufgetragen, nicht injicirt. Vergrösserung 15.

„ 10. Das parenchymatöse Netz in der Kiemengang-Scheidewand, in den Theilungswinkeln der äusseren Kiemenarterie. Vergrösserung 3.

„ 11. Arterielle Übergangszweige in das äussere Blatt der äusseren Kiemen.

TAFEL III.

Fig. 12. Das respiratorische capillare arterielle Netz eines Kiemenblattes nahe dem oberen Rande mit den Kalkkörnern in den Längsanastomosen und den grösseren Queranastomosen, und mit dem äusseren Epithelium. Vergrösserung 120.

„ 13. Dasselbe Netz injicirt. Vergrösserung 25.

„ 14. Drei Riffen der Mundtentakel mit ihren injicirten Capillaren. Vergrösserung 25.

„ 15. Capillaren des Anfangs-Darmes zwischen den Wülsten. Vergrösserung 25.

„ 16. Schwellnetz der glatten Tentakelfläche mit Venenanfängen, injicirt. Vergrösserung 25.

„ 17. Oberflächliches Netz des Bojanus'schen Körpers, injicirt. Vergrösserung 15.

„ 18. Stück eines Kiemenblattes von aussen, nahe dem oberen Rande, mit den noch frei verlaufenden Stäbchen-Canälen, diese um ein Stäbchenpaar nach rechts verschoben und mit dem Venenstamme in Verbindung; links zwischen ihnen die Flimmerrinnen, unten die Bögen der Knorpelstäbchen. Vergrösserung 120.

„ 19. Venöses Schwellnetz und Anfänge der Venen an der äusseren Oberfläche des Mantels, aus der Nähe der Kreisvene, injicirt. Vergrösserung 15.

„ 20. Ramificationsweise der Kiemenarterien in den Blättern. Vergrösserung 3.

Fig. 1.

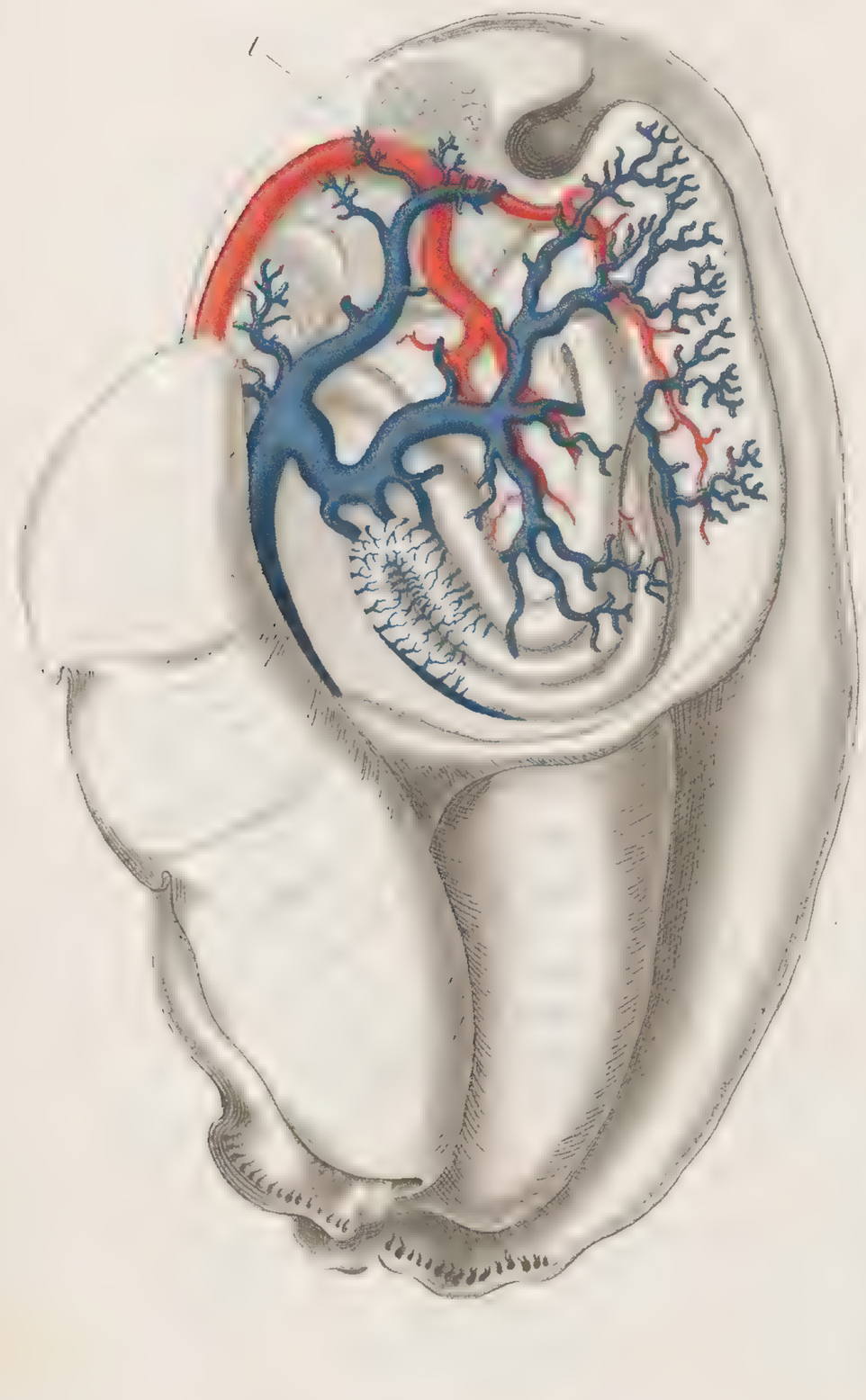


Fig. 2.

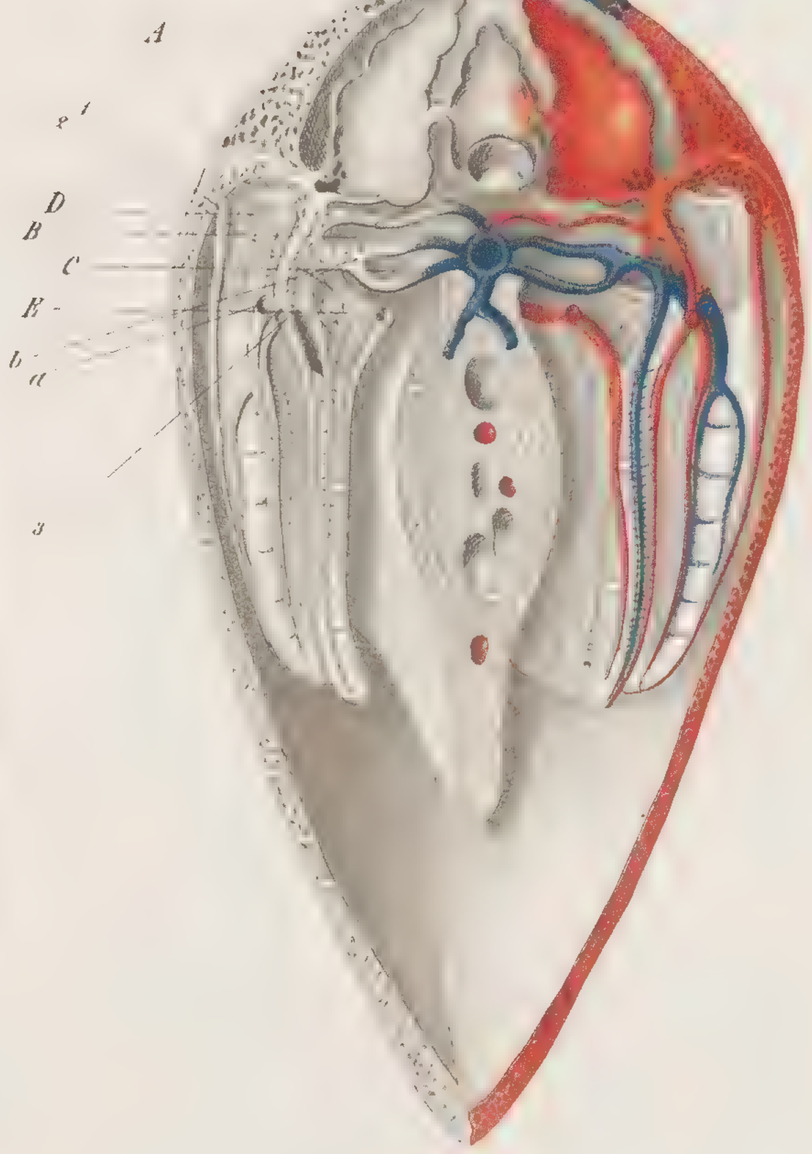


Fig. 3.

Fig. 5.

Fig. 6.

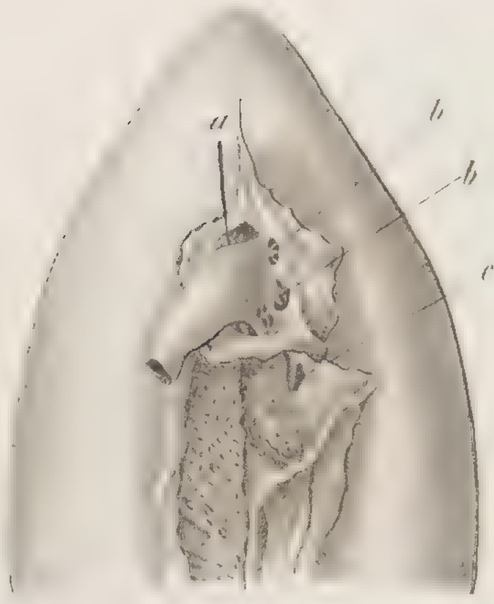


Fig. 4.

Kurz u. Hentzmann

Lith. u. d. Farb. gedr. d. k. k. Hof- u. Staatsdr.

Fig. 7.

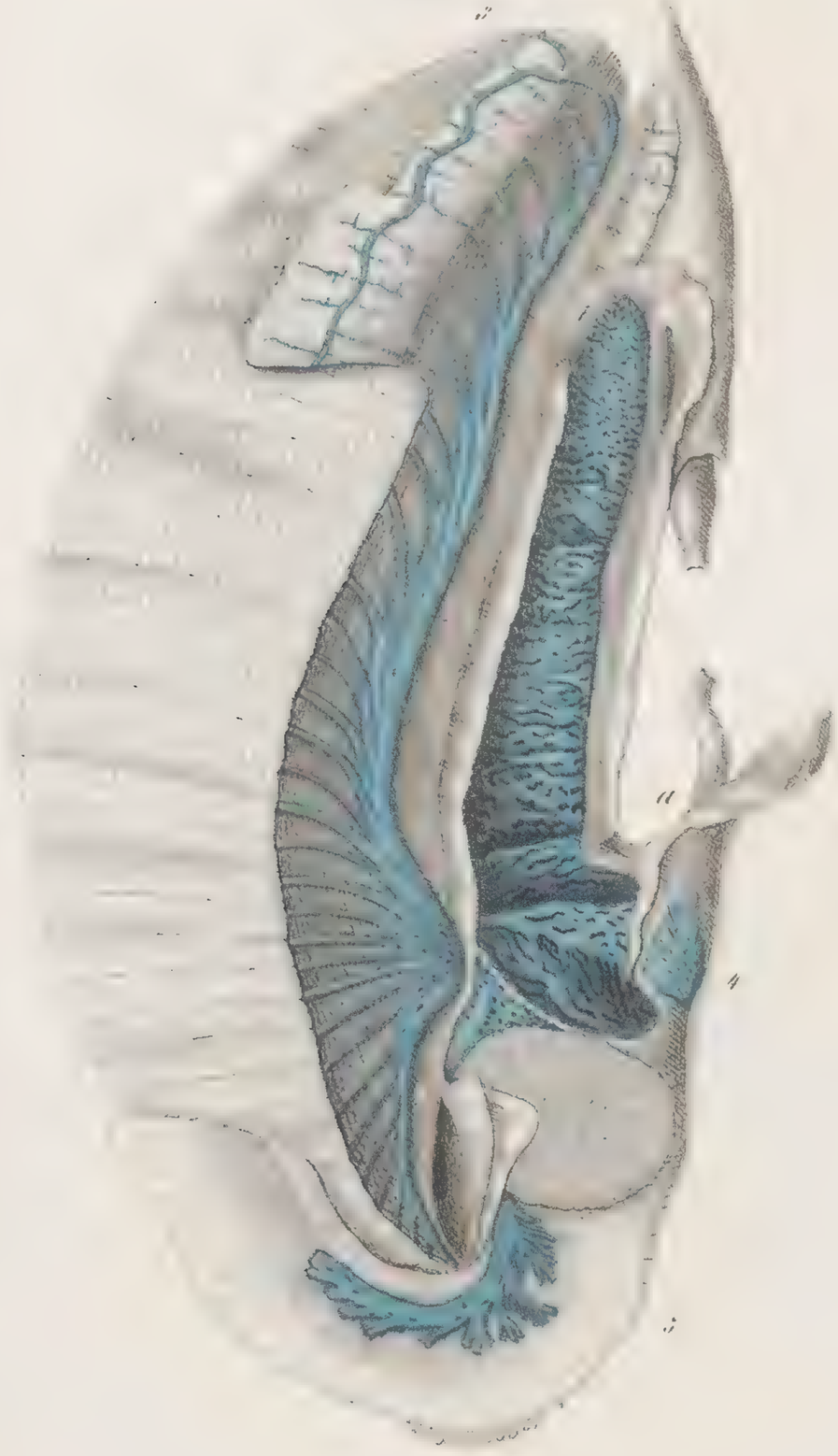


Fig. 8.

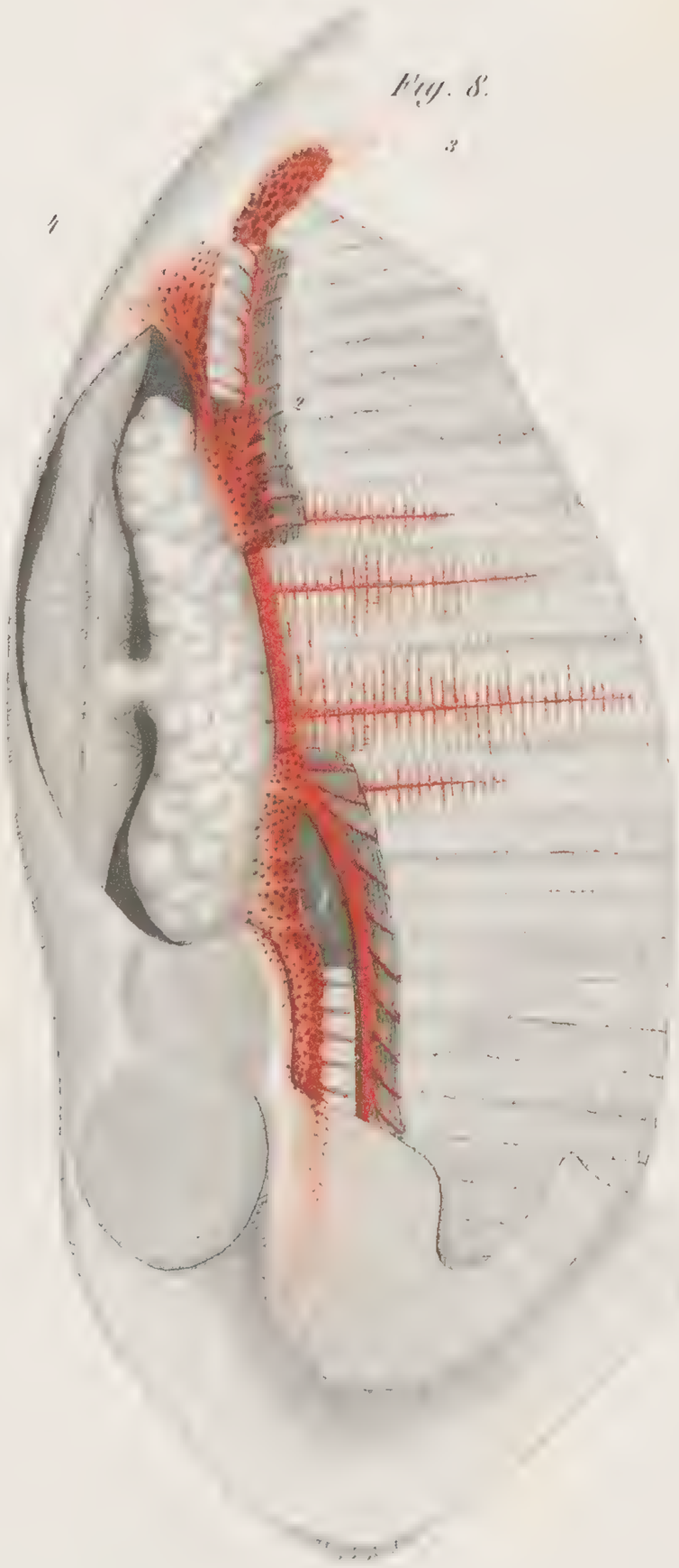


Fig. 9.

Fig. 10.

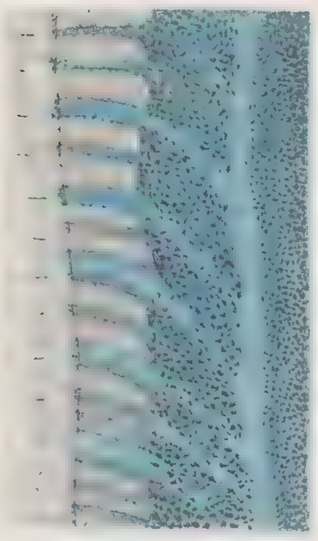


Fig. 11

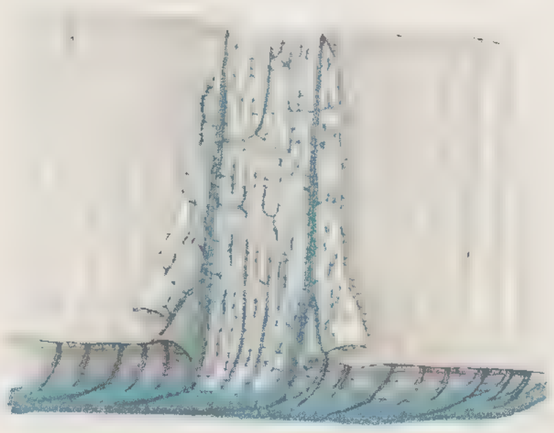


Fig. 14. 25/1

Fig. 12. 120/1

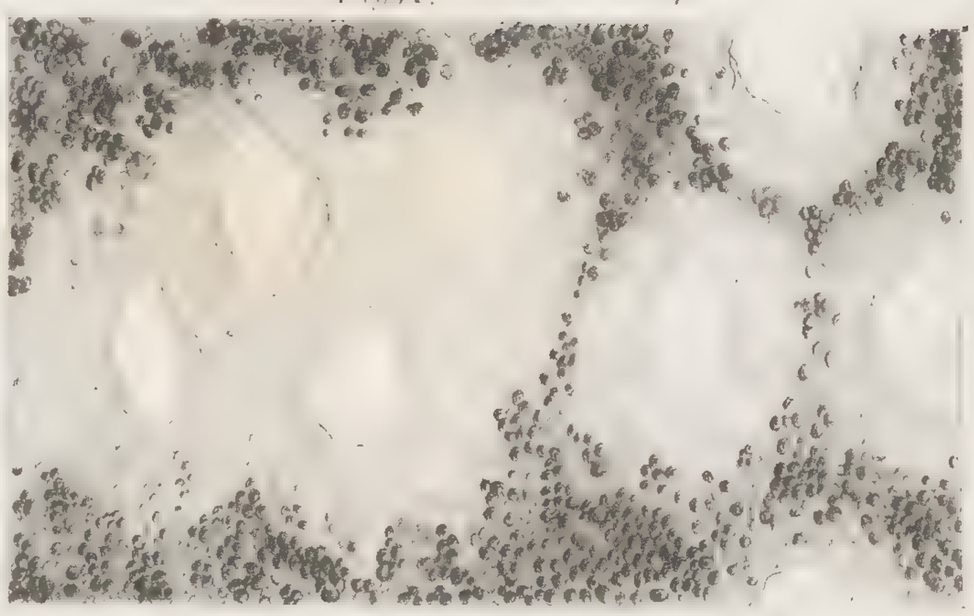


Fig. 15. 35/1

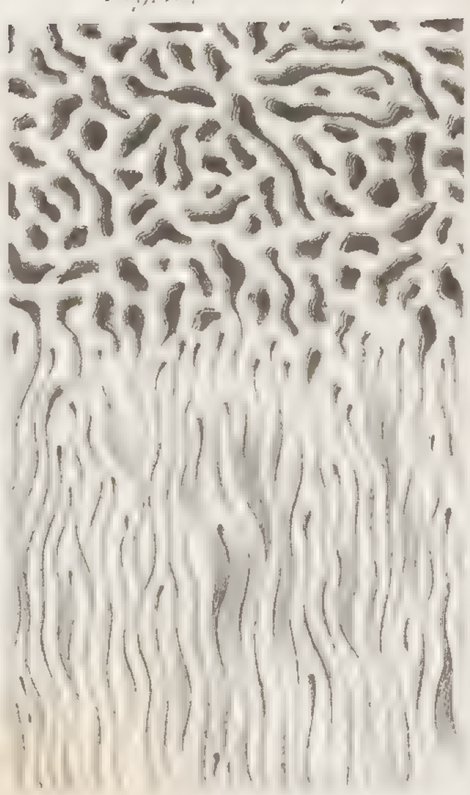


Fig. 16. 25/1

Fig. 13. 25/1

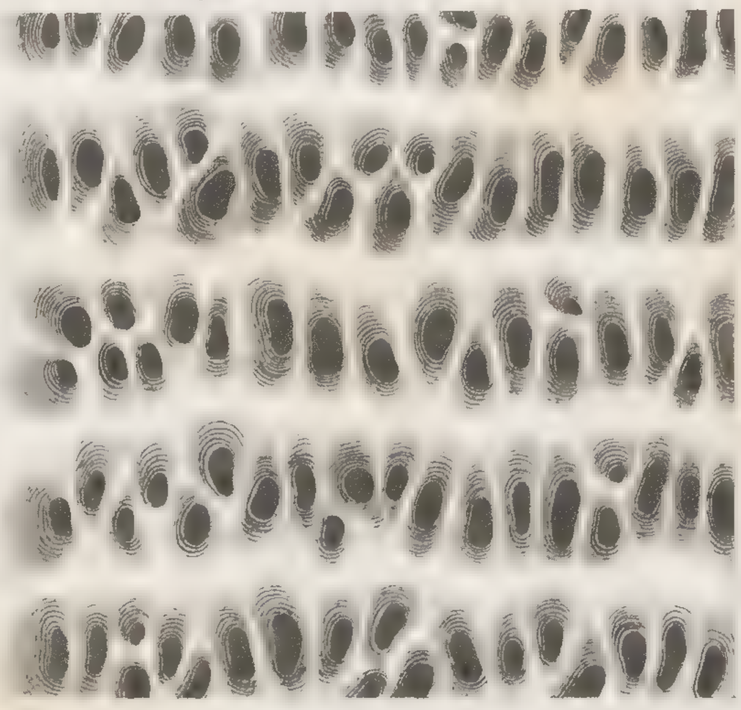


Fig. 17. 15/1

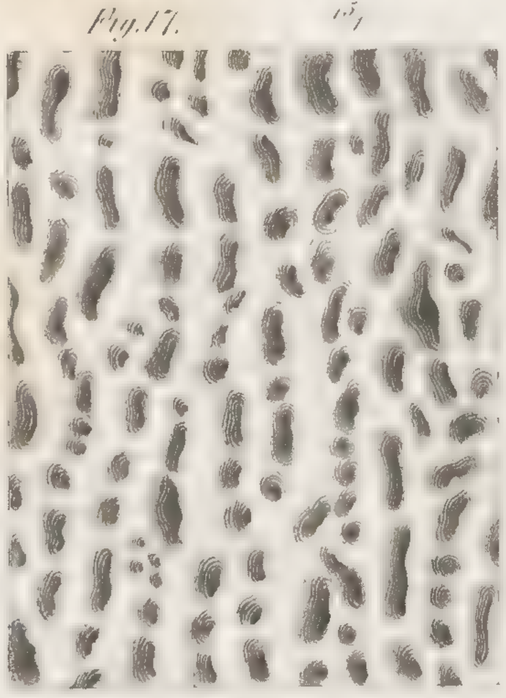
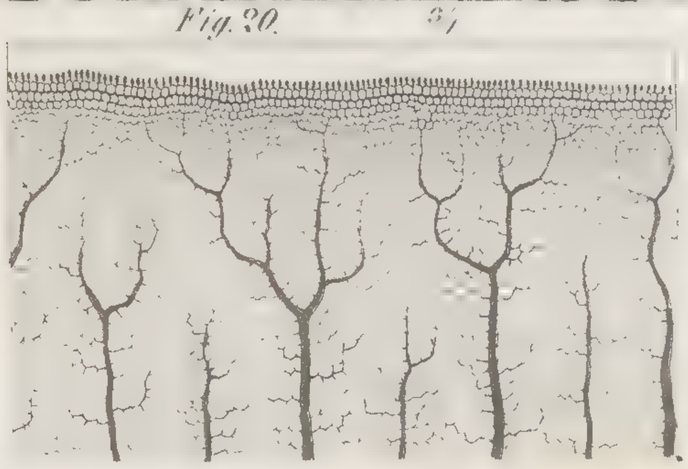


Fig. 18. 120/1

Fig. 19. 15/1

Fig. 20. 3/1



DIE FORAMINIFEREN

AUS DER

ORDNUNG DER STICHOSTEGIER

VON OBER-LAPUGY IN SIEBENBÜRGEN.

VON

J. LUDWIG NEUGEBOREN.

Mit 5 Tafeln.

ANGENOMMEN IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 31. JÄNNER 1856.

Die häufige Erwähnung der Örtlichkeit „Ober-Lapugy“ in dem unter Mitwirkung des Herrn P. Partsch, Directors des k. k. Hof-Mineralien-Cabinets, von Herrn Dr. Moritz Hörnes verfassten Werke: „die fossilen Mollusken des Wiener Tertiär-Beckens“ hat derselben bereits eine Bedeutung vor dem paläontologischen Publicum gegeben; die vorweltlichen Funde, die namentlich seit dem Jahre 1852 daselbst gemacht wurden, werden ihr, sobald sie bekannt gemacht sind, einen europäischen Ruf vindiciren, und es ist voraussichtlich, dass bei einer nachhaltigen Ausbeutung sie durch Artenreichthum den reichsten Fundstätten Europa's gleich kommen wird. Ober-Lapugy repräsentirt, was seine Gasteropoden anbelangt, wenigstens jetzt schon das ganze grosse Wiener Tertiär-Becken; aber auch in Ansehung der Foraminiferen steht es demselben nicht nach. Schon die kleinen Notizen, welche die „Berichte über die Mittheilungen der Freunde der Naturwissenschaften in Wien“ (Bd. II, S. 163 und später Bd. III, S. 256) über das Vorkommen der Foraminiferen im Tegel von Lapugy brachten, konnten hinreichen, die Aufmerksamkeit des Paläontologen in der bezeichneten Richtung der benannten Örtlichkeit zuzuwenden; ein unausgesetztes fast achtjähriges Sammeln hat einen köstlichen Schatz von Material angehäuft und derselbe enthält des Neuen mehr als vermuthet werden konnte. In einem kleinen Aufsatze habe ich in der eilften Nummer der „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“ des Jahres 1850 versucht, den Gehalt des Lapugyer Tegelthones an Foraminiferen annähernd anzugeben; andere kleine Aufsätze desselben und der späteren Jahre haben einzelne Genera behandelt, soweit eben das Material damals dazu Veranlassung darbot. Unterdessen vermehrten sich durch Untersuchung des zugewachsenen Materiales die Vorkommnisse; es wurden theils bis dahin noch nicht vorgekommene

Arten des Wiener Beckens aufgefunden, theils neue Formen entdeckt, welche mit bereits publicirten Arten nicht vereinigt werden konnten. Die folgenden Blätter liefern eine Zusammenstellung der Stichostegier d'Orbigny's, welche ich bis jetzt in dem Tegel von Lapugy aufgefunden habe. Es schien mir nothwendig, bei dieser Gelegenheit meine früheren kleinen Aufsätze über Foraminiferen dieser Localität einer Revision zu unterwerfen; in Folge derselben sind manche meiner früheren Arten eingegangen, da ich auf meinem jetzigen Standpunkte Formen vereinigen zu müssen glaubte, die ich ehedem als besondere Arten betrachtete. Jenen Arten, welche nach vorgenommener Revision und nach Vereinigung des Gleichartigen in meinen Publicationen als selbstständig von mir beibehalten wurden, glaubte ich kurze lateinische Diagnosen beifügen zu sollen; die erst in den letzten Jahren von mir aufgefundenen neuen Arten erhielten ausführliche Beschreibungen. Die Abbildungen, welche diesen Aufsatz begleiten und mit Hilfe eines guten Plössel'schen Mikroskopes von mir ausgeführt worden sind, liefern ausser den neuen Formen auch noch bemerkenswerthe Varietäten von bisher schon bekannt gewesenen Arten.

Obgleich ein Feind der Wiederholung dessen, was schon publicirt vorliegt, glaube ich doch aus meinem oben angeführten kleinen Aufsatze eine Stelle, die sich auf die Beschaffenheit der Tegel-Ablagerung bei Ober-Lapugy bezieht, hier beisetzen zu sollen, zumal da die „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften", die zunächst unter den siebenbürgischen Landeskindern die Kenntniss des eigenen Vaterlandes in naturwissenschaftlicher Beziehung verbreiten und anregend wirken wollten, manchem Leser dieses Aufsatzes unbekannt geblieben sein dürften.

„Ober-Lapugy liegt am linken Marosch-Ufer, $1^1/_2$ Stunde vom Flusse und $2^1/_2$ Stunden von der Poststation Dobra entfernt, am oberen Ende eines engen Thales ganz in dem Tegelgebilde. In allen Wasserrinnen rechts und links kündigt sich dem Besucher des Ortes der Tegelthon durch seine aschgraue, im feuchten Zustande fast schwarze Farbe an; ich glaube mit Zuverlässigkeit annehmen zu dürfen, dass das Gebilde eine Höhe von 300 Wiener Fuss, von der Thalsohle gerechnet, erreiche. In der oberen Region des Gebildes mischen sich in das Aschgraue seiner Färbung gelbliche und blassröthliche Thontheile, die aufsteigend an Menge zunehmen, so dass ich es in dem obersten Theile einer der am höchsten hinaufreichenden Wasserrinnen schmutzig röthlichgelb fand. Die abgelagerte Masse ist feinerdig, sehr fest und dicht, nur sehr wenig sandige dünne Streifen unterbrechen nicht selten das Homogene derselben. Diesen sandigen Streifen oder Schnüren sieht man gewöhnlich viele kleine Fragmente von sehr zarten Conchylien beigemengt, — sie führen dann immer auch ganz kleine Schnecken in nicht geringer Quantität; der nicht mehr graue Tegel der oberen Region, worin ich einzelne, etwa fingerdicke Sandsteinschichten mit in dieselben eingebackenen Conchylien zu bemerken Gelegenheit hatte, ist weniger fest, wird an der Luft sehr rissig und daher bei dem Hinzutritte des Regens in Menge abgewaschen, worauf er sich an weniger steilen Stellen tiefer unten wieder anhäuft."

„In diesem Gebilde liegen zahlreiche Geschlechter und noch zahlreichere Arten von Schalthieren und Polyparien einer früheren Schöpfung eingeschlossen, die ersteren häufig beschädigt und nur als Fragmente, oft mürbe und daher bei dem Herausnehmen sehr zerbrechlich, häufig aber noch so frisch, dass sie nicht nur den Glanz recenter Conchylien, sondern wohl auch noch die Färbung haben, durch die sie sich auszeichnen, als die Thiere lebten, welche sie bewohnten. Die Foraminiferen-Gehäuse finden sich von unten bis hinauf durch das ganze Gebilde; doch bieten sich uns hier sehr bemerkenswerthe Erscheinungen dar sowohl in Bezug

auf den Gehalt solcher Gehäuse überhaupt, als in Bezug auf die Verbreitung und die Menge gewisser Geschlechter“ [1]).

Was der Örtlichkeit „Ober-Lapugy“ das meiste Interesse gibt, ist unstreitig der Umstand, dass sie die Einschlüsse des Miocen und Pliocen in ihren Straten, die durchaus nur einer und zwar ganz ruhigen ununterbrochen fortgeschrittenen Bildungs-Epoche angehören, in einer Weise beherbergt, wie es sonst kaum irgendwo der Fall ist, und somit die Vereinigung beider Tertiär-Ablagerungen unter dem Namen des Neogen vollkommen rechtfertigt.

GLANDULINA D'ORBIGNY.

Je geringer noch die Arten dieses Geschlechtes zur Zeit der Abfassung und der Herausgabe des d'Orbigny'schen classischen Werkes über die Foraminiferen des Tertiär-Beckens von Wien waren, um so erfreulicher war es für mich, in dem Tegel von Ober-Lapugy bald nach dem Erscheinen des genannten Werkes noch in den Vierzigerjahren Formen aufgefunden zu haben, die offenbar zu denselben gehörten. Gleichzeitig mit Herrn Dr. Aug. Em. Reuss, der in seinen „neuen Foraminiferen aus den Tertiär-Schichten des österreichischen Bekens“ in dem ersten Bande der Denkschriften der kaiserlichen Akademie zwei neue Arten, die eine aus dem Tegel von Grinzing *(Gl. rotundata)*, die andere aus dem Tegel von Ober-Lapugy *(Gland. discreta)* publicirte, hatte ich Gelegenheit, in den „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“ die von mir aufgefundenen, mit den Wienern mir unvereinbar scheinenden Formen bekannt machen zu können. Seit dem Jahre 1850 habe ich durch meine Forschungen neuerdings Formen aufgefunden, auf welche sich neue Arten gründen liessen.

1. ***Glandulina laevigata*** d'Orb.

Taf. I, Fig. 3 und 4.

Gland. Haidingerana. Neugeb. Foraminiferen von Felsö (Ober-) Lapugy, 1. Artikel (Glandulinen) in den Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften, Jahrg. I, Seite 48 und Fig. 2 der dazu gehörigen Tafel.
Gland. incisa. Neugeboren. An demselben Orte, Seite 52 Fig. 7, *a* und *b*.

Von dieser Art sind in dem Tegelbilde von Lapugy Formen vorgekommen, welche von der d'Orbigny-schen Abbildung nach Exemplaren aus dem Wiener Becken in der Weise abweichen, dass einige gedrängter

[1]) Nachdem ich anfänglich ausser den im Tegel überhaupt häufiger vertretenen Foraminiferen-Geschlechtern als seltenere Vorkommnisse einzelne Exemplare aus den Geschlechtern *Lingulina, Spirolina, Asterigerina, Dimorphina, Virgulina, Bolivina* und *Articulina* bereits erhalten hatte: löste ich, um zu erfahren, in welcher Weise die Geschlechter in dem Tegelgebilde von Lapugy beiläufig vertheilt seien, von allen Tegelsorten, die ich selbst an Ort und Stelle gesammelt hatte, Quantitäten von doppelter Wallnussgrösse aus der oberen, mittleren und unteren Partie der Ablagerung von drei verschiedenen aufgeschlossenen Punkten durch Aufguss von Wasser auf, schlämmte die Auflösung und untersuchte den getrockneten, theils thonigen, theils sandigen Rückstand nach Entfernung der ganz feinen Theilchen durch Anwendung eines sehr feinen Siebes mit der Loupe, wobei sich nachstehendes Resultat ergab:

1) Durch das ganze Gebilde zeigten sich vertheilt: *Orbulina, Nodosaria, Dentalina, Marginulina, Cristellaria, Robulina, Polystomella, Rotalina, Globigerina, Bulimina, Uvigerina, Heterostegina, Textularia, Triloculina, Quinqueloculina, Adelosina;*
2) nur in der unteren Partie desselben wurden gefunden: *Dendritina, Orbiculina;*
3) nur in der unteren und mittleren Partie wurden angetroffen: *Alveolina, Amphistegina;*
4) in der unteren und oberen: *Glandulina, Guttulina;*
5) ausschliesslich in der mittleren: *Amphimorphina, Anomalina, Rosalina, Polymorphina;*
6) aus der mittleren und oberen stammte: *Frondicularia, Nonionina, Operculina, Biloculina, Spiroloculina;*
7) ausschliesslich aus der oberen: *Vaginulina, Globulina.*

andere dagegen mehr in die Länge ausgedehnt sind. Ein Individuum der gedrängteren Form hatte ich im Jahre 1850 unter dem Namen *Gl. Haidingerana* in den „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“ beschrieben und abgebildet; die verlängerte Form bringt dieser monographische Versuch unter Fig. 3 auf Taf. I. Zu erwähnen sind noch zwei von mir aufgefundene monströse Formen dieser Art; die erstere hatte ich unter dem Namen *Gl. incisa* an demselben Orte bekannt gemacht, die zweite ist unter Fig. 4 auf Taf. I abgebildet; die Monstrosität besteht darin, dass die letzte Kammer die vorletzte nur wenig umfasst und sich von derselben durch eine ziemliche Einschnürung trennt. Exemplare dieser Art sind im Tegel von Lapugy selten.

2. ***Glandulina abbreviata*** m.

Taf. I, Fig. 1 und Foraminiferen von F. Lapugy, 1. Artikel Fig. 1 *a* und *b*.

Testa laevigata, subsphaerica, postice vix vel aliquantulum modo acuminata, antice praecisa; loculis tribus vel quatuor complanatis, primis admodum humilibus, ultimo majorem partem testae comprehendente; suturis linearibus; apertura parva, radiis circumdata. — Long. = 1 mm. Rara.

Von dieser im ersten Jahrgange der „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“ S. 48 beschriebenen und auf der dazu gehörigen Tafel unter Fig. 1 abgebildeten Art sind mir erst einige wenige Exemplare vorgekommen. Später aufgefundene Exemplare, deren ich eines unter Fig. 1 auf Taf. I dieses Versuches abgebildet habe, weichen von der in den „Verhandlungen und Mittheilungen“ gegebenen Abbildung nur in so weit ab, dass sie unten etwas zugespitzt sind. Die sehr grosse Öffnung des hier abgebildeten Exemplares mag darin ihren Grund haben, dass die höchst zarte glasige Spitze mit dem daran befindlich gewesenen Strahlenkranze weggebrochen ist.

3. ***Glandulina ovalis*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 1. Artikel Fig. 3.

Testa laevigata, ovali, postice rotundata, antice praecisa; loculis tribus complanatis, primo et secundo humilioribus, ultimo maximo; suturis linearibus; apertura parva, rotunda et radiis circumdata, in circulo vitreo. — Long. = 1·5 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“ 1. Jahrgang, Seite 48 und 50 und Fig. 3 auf der hierzu gehörigen Tafel.

4. ***Glandulina neglecta*** m.

Taf. I, Fig. 2.

Testa abbreviato-ovali, non glabra, postice rotundata, antice aliquantulum acuta; loculis duobus convexis, sutura incidenti divisis, primo minimo, secundo vero maximo; apertura minima, radiis et circulo vitreo parvulo circumdata. — Long. = 1 mm. Rara.

Die Schale, kurz-oval, etwas rauh und daher von mattem Ansehen, ist unten abgerundet, während sie oben einige Zuspitzung zeigt, gebildet aus zwei Kammern, welche durch eine etwas einschneidende Nath abgegrenzt werden. In Folge dieser Einschnürung ist die unten abgerundete sehr niedrige erste Kammer etwas convex, und die zweite sehr grosse, welche $\frac{4}{5}$ der Schale einnimmt, über die erste etwas vorspringend. Die kleine centrale Mündung ist mit einem Strahlenkranze und glasig glänzendem Hofe umgeben.

Diese Art, die allerdings Ähnlichkeit mit *Gl. rotundata* R. hat, unterscheidet sich von derselben nicht nur durch ihr rauhes Ansehen, sondern auch noch dadurch in genügender Weise, dass die erste Kammer unten bestimmt heraustritt und zwischen ihr und der zweiten eine, wenn gleich geringe Einschnürung stattfindet, was bei *Gl. rotundata* durchaus nicht der Fall ist.

5. ***Glandulina discreta*** Reuss.

Reuss: Neue Foraminiferen aus den Tertiärschichten des österreichischen Beckens (im ersten Bande der Denkschriften der kaiserl. Akademie) Taf. I (XLVI), Fig. 3.

Gl. nodosa Neugeb. Foraminiferen von F. Lapugy, 1. Artikel in den Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften, Jahrg. I, S. 52 und Fig. 8 und 9 der dazu gehörigen Tafel.
Gl. cylindrica Neugeb. An demselben Orte S. 53 und Fig. 10.

Diese Art gehört in den Straten von Lapugy zu den grössern Seltenheiten. Auch das Herrn Reuss vorgelegene Exemplar stammte von Lapugy.

6. ***Glandulina elegans*** m.

Taf. 1, Fig. 5.

Testa laevigata, nitidissima, subcylindrica, inferne conica, acuminata; loculis septem, — tribus prioribus admodum humilibus, complanatis, saturis linearibus, — reliquis convexis et latis, suturis profundis divisis, — ultimo sphaerico vel subovato aliquantulum apiculato; apertura minima, radiata, circulo vitreo circumdata. — Long. = 1 mm. Rara.

Die sehr glänzende, fast vollkommen cylindrische Schale geht nach unten in einen sehr regelmässigen Kegel aus und wird von sieben Kammern gebildet; die vier ersten Kammern formiren den unteren kegelförmigen Theil der Schale, die drei untersten sind sehr niedrig, vollkommen plan, nur durch glasige Nathlinien angezeigt, die vierte so wie alle folgenden sind convex, etwas breiter als hoch, durch tief einschneidende Näthe getrennt, — die letzte ist kugelig oder doch nur sehr kurz-oval und geht in eine nur sehr wenig hervortretende glasig glänzende Spitze aus, woran die sehr kleine Mündung von zahlreichen höchst zarten Strahlen und einem kleinen glasigen Hofe umgeben.

Diese Art hat Ähnlichkeit mit *Gl. discreta* R., unterscheidet sich jedoch von derselben durch stärkere Einschnürungen zwischen den Kammern des cylindrischen Theiles ihrer Schale, durch die Form der letzten Kammer, welche im ganzen niedriger aber doch nicht abgestutzt ist, und durch den kleinen glasigen Hof um den Strahlenkranz der Mündung.

7. ***Glandulina Reussi*** m.

Taf. I, Fig. 6.

Testa conico-cylindrica, laevigata, antice aliquantulum incrassata; loculis quinque, — primo mucronato, subsequente conico, humili, tribus reliquis majoribus convexis, suturis incidentibus divisis, ultimo conice exeunte, apiculato; apertura minima, radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = 1 mm. Rara.

Die konisch-cylindrische Schale ist im unteren Theile minder dick als im oberen und wird von fünf Kammern sehr verschiedener Höhe gebildet. Zwischen den drei letzten Kammern, die zugleich durch Höhe sich auszeichnen und Wölbung haben, findet einige Einschnürung Statt; die erste geht in eine Spitze aus, welche minder oder mehr hervortritt, — die zweite ist stets niedriger als die erste und dritte, vollkommen

plan, dabei oben auffallend breiter als unten, — die letzte geht in einen kurzen Kegel aus, woran die Mündung von Strahlen und einem glasigen Hofe umgeben.

Diese Form unterscheidet sich von *Gl. discreta* R. durch die Beschaffenheit des spitzen unteren Theiles der Schale, welche ganz anderer Art ist und dazu noch nur durch eine Kammer gebildet wird, auch ist die letzte Kammer nicht abgestutzt, was bei jener in so entschiedenem Grade stattfindet; — von *Gl. nitida* N. durch ihre durchaus schmälere Gestalt und das Spitzausgehende der letzten Kammer; der *Gl. nitidissima* N. entgegen gehalten, ist sie in der Mitte auffallend dicker und hat sie anfänglich niedrigere Kammern.

8. ***Glandulina nitidissima*** m.

Foraminiferen von Felsö-Lapugy, 1. Artikel Fig. 11.

Testa laevigata, polita, ditidissima, cylindrico-conica, aliquantum elongata, antice posticeque conice acuminata; loculis quinque, primo conico et secundo complanatis, reliquis convexiusculis, apertura in circulo vitreo parva, rotunda et radiis ciscumdata. — Long. excedit. 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissensch.“ 1. Jahrg. Seite 53 und Fig. 11.

9. ***Glandulina nitida*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 1. Artikel, Fig. 4.

Testa laevigata, nitida, subconica, postice mucronata; loculis quatuor, primo rotundato et inferne mucronato ut et secundo humilioribus, vix convexiusculis, duobus reliquis altioribus convexiusculis, ultimo praeciso; apertura radiata. — Long. = 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissensch.“ 1. Jahrg. Seite 51 u. Fig. 4.

10. ***Glandulina conica*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 1. Artikel, Fig. 5, *a* und *b*.

Testa laevigata, nitida, conico-ovali, antice acuminata, postice rotundata; loculis quatuor, primo et secundo complanatis, suturis linearibus divisis, humilioribus, reliquis convexiusculis altioribus, ultimo antice acuminato; apertura parva, rotunda, radiata in circulo vitreo magno. — Long. = 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissensch.“ 1. Jahrg Seite 51 und Fig. 5, *a* und *b*.

11. ***Glandulina nucula*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 1. Artikel, Fig. 5, *a* und *b*.

Testa non penitus glabra, subconica, postice rotundata, antice acuminata; loculis duobus vel tribus, primo inferne rotundato, glandiformi, reliquis convexiusculis, ultimo antice acuminato; apertura parva, rotunda, radiata, in circulo vitreo maximo. — Long. = $^2/_3$ ad 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissensch.“ 1. Jahrg. Seite 51 und 52 und Fig. 6, *a* und *b*. Das von mir auf der zu diesem Genus gehörenden Tafel abgebildete Exemplar ist ein Jugendstand dieser Art, da von mir später noch einzelne Exemplare mit drei Kammern aufgefunden worden sind.

NODOSARIA LAMARCK.

Der Tegel von Lapugy hat eine Menge von Formen geliefert, welche bei all ihrer Mannigfaltigkeit doch diesem Genus einverleibt werden konnten; er steht hierin um Vieles vor dem Tegel des Wiener Beckens, soweit dessen Foraminiferen bis jetz bekannt gemacht worden sind. Von den 13 Arten, welche d'Orbigny aus dem Wiener Becken durch die Bemühungen des Herrn Vice-Präsidenten Joseph Ritter von Hauer kannte und beschrieb, habe ich nur 4 Arten noch nicht aufgefunden; ungleich grösser ist die Anzahl der neuen Arten, welche auf Formen begründet werden konnten, die aus dem Wiener Becken noch nicht bekannt zu sein scheinen. Ich hatte einen grossen Theil der mir neu zu sein scheinenden Formen bereits in dem Jahre 1852 in den schon öfter erwähnten „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“ bekannt gemacht; auch seit dem Jahre 1852 waren die Resultate meiner Forschungen in Bezug auf dieses Geschlecht die erfreulichsten.

A. GLATTE GEHÄUSE.

1. ***Nodosaria ambigua*** m.

Taf. I, Fig. 13, 14, 15 und 16.

Testa laevigata, cylindrico-conica, elongata; loculis vel numerosis (6 ad 12), plerumque convexis omnibus, nonnunquam singulis priorum complanatis, dense superpositis, plus minus depressis ad suturas plus minus strangulatis, — primo rotundato, aut sphaeroidico aut inferne hemisphaerico, — ultimo plerumque sphaeroidico, non acuminato; apertura centrali, parva, rotunda, nuda. — Long. = 1 ad $1^4/_5$ mm.

Die glatte, etwas verlängerte, cylindrisch - konische Schale ist im Verhältnisse zu ihrem Anfange oben mehr oder minder verdickt und wird aus convexen, perlschnurartig an einander gereiheten, dicht gedrängten, sich stark bedeckenden, aber nicht umfassenden Kammern gebildet, deren Anzahl (6 bis 12) davon abhängt, ob dieselben minder oder mehr zusammengedrückt sind; — die Kammern bilden daher bald oben und unten abgestutzte Ellipsen (Fig. 16), bald sehr platte Sphäroide (Fig. 13—15), in manchen Fällen sind einzelne der ersten Kammern plan, wie solches bei Fig. 14 und 15 nachgebildet ist; — die erste Kammer ist entweder ein sehr flaches Sphäroid (Fig. 13) oder eine Halbkugel (Fig. 14, 15 und 16), die letzte geht von der Form eines flachen Sphäroides bis in Kugelform (Fig. 16) über, ist jedoch niemals zugespitzt oder mit einem Halse versehen. In den Näthen findet eine mehr oder minder starke Zusammenziehung Statt. Die centrale Mündung ist klein und rund, ohne Strahlenkranz.

Nodosaria ambigua und die weiter unten aufgeführte *N. multicosta* stehen unter den übrigen bei Lapugy aufgefundenen Formen ganz vereinzelt da, indem ihnen ein Hals oder auch nur eine Zuspitzung an der jüngsten Kammer gänzlich fehlt; eine Analogie bietet nur noch die gegenwärtig an den Küsten von Cuba lebende *Nodosaria rugosa* d'Orbigny dar. Fig. 16 wurde mit den übrigen abgebildeten Formen in eine Species aus dem Grunde vereinigt, weil der Übergang aus der unter Fig. 15 dargestellten Form in diese keine Schwierigkeiten bietet.

2. ***Nodosaria Beyrichi*** m.

Taf. I, Fig. 7, 8 und 9.

Testa nitida, postice cylindrica vel subcylindrica, antice conica; loculis quatuor vel quinque, primo rotundato hemisphaerico, duobus vel tribus sequentibus convexiusculis, ultimo maximo et latissimo apicato; apertura minima, radiis et circulo vitreo circumdata. — Long. = 1 mm.

Die glänzende Schale ist im unteren Theile fast cylindrisch, im oberen konisch, gebildet aus vier bis fünf convexen Kammern, von welchen die ersteren niemals höher als breit, in manchen Fällen dagegen wohl breiter als hoch sind; die erste ist unten vollkommen halbkugelig zugerundet, die letzte überwiegt manchmal durch Dicke und Höhe und geht in eine mehr oder minder eminente Spitze aus, woran die kleine centrale Mündung von Strahlen und einem glasigen Hofe umgeben.

Nodosaria Beyrichi ist eine sehr gut charakterisirte Art, bei welcher nicht leicht eine Verwechselung mit andern verwandten Arten eintreten wird.

3. ***Nodosaria incerta*** m.

Taf. I, Fig. 10 und 11.

Testa subcylindrica, laevigata, nitida, antice aliquantulum incrassata; loculis quinque, primo ovato-rotundato vel hemisphaerico, — secundo vel etiam tertio conicis planis, — reliquis altioribus, convexiusculis, ad suturas strangulatis, ultimo ovato-sphaerico, mammillato; apertura minima, radiata, area vitrea circumdata. — Long. = 1 mm. Rara.

Die glatte und glasig glänzende, etwas konisch-cylindrische Schale ist oben ein wenig verdickt und wird aus fünf Kammern von verschiedenen Höhenverhältnissen gebildet; die erste ist vollkommen oval oder halbkugelig gerundet, die zweite oder auch die dritte konisch und fast ganz plan und niedrig, die übrigen sind gewölbt, durch ziemlich tiefe Näthe getrennt; die letzte ist oval und geht in eine glasig glänzende bald etwas abgerundete, bald deutlich gespitzte Zitze aus, woran die kleine centrale Mündung von Strahlen umgeben.

Nodosaria incerta unterscheidet sich von *Nodosaria Beyrichi* sehr gut dadurch, dass ihre ersten Kammern plan und nur durch Nathlinien äusserlich abgegrenzt sind, während bei *Nod. Beyrichi* zwischen allen Kammern Einschnürungen stattfinden.

4. ***Nodosaria Geinitzana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 1 und 2.

Nodos. glandulinoides Neugeb. Foraminiferen von F. Lapugy. 4. Artikel (Nodosarien) in den Verhandlungen und Mittheilungen etc. Jahrg. III, Seite 37 und Taf. I, Fig. 2.

Testa laevigata, parum elongata, recta, cylindrica; loculis tribus vel quatuor sphaericis vel ellipticis ad suturas plus vel minus constrictis, — primo inferne non mucronato, — ultimo apicato; apertura terminali et centrali parva, radiis circumdata. — Long. = $1^3/_5$ mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissensch.“ 3. Jahrg. Seite 37 und Fig. 1 und 2 auf der zu diesem Aufsatze gehörigen Tafel. Die von mir unter dem Namen *Nodos. glandulinoides* beschriebene und abgebildete Form ist zu wenig von *N. Geinitzana* verschieden, als dass sie länger von derselben getrennt bleiben könnte.

5. ***Nodosaria mammilla*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 3.

Testa laevigata, parum elongata, recta, inferne aliquantulum incrassata ideoque conico-cylindrica; loculis quinque, ultimo ovali excepto, complanatis, depressiusculis, — primo inferne mucronato, — ultimo apicato et mammillato, sutura profunda a praecedente diviso; apertura terminali parva et radiis circumdata. — Long. = 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissensch.“, 3. Jahrg. Seite 37 und 38 und die oben angeführte Abbildung.

6. ***Nodosaria inversa*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 5, *a* und *b*.

Testa laevigata et nitida, elongata, recta, cylindro-conica, inferne incrassata, superne attenuata; loculis quatuor vel pluribus elongato-ovalibus, — primo adhuc ignoto, — ultimo in siphonem exeunte; suturis linearibus; apertura radiata. — Long. = 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissensch.“, 3. Jahrg. Seite 38 und die dazu gehörige oben angeführte Abbildungen.

7. ***Nodosaria inconstans*** m.

Foraminiferen v. F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 6 und 7.

Testa laevigata et nitida, modice elongata, recta, cylindro-conica, superne incrassata; loculis quatuor vel quinque, plus minus sutura incidente divisis, — duobus primis sphaericis, reliquis vel sphaericis vel ellipticis, — primo mucronato, — ultimo maximo, pyriformi, in collum producto; collo tenui, transversim annulato. — Long. = 1 mm.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissensch.“, 3. Jahrg. Seite 38 und 39 und die dazu gehörigen oben angeführten Abbildungen.

8. ***Nodosaria stipitata*** Reuss.

Dr. A. E. Reuss, neue Foraminiferen aus den Schichten des österreichischen Tertiär-Beckens, Fig. 4 der ersten zu diesem Aufsatze gehörigen Tafel.

Siehe „Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften, mathematisch-naturwissensch. Classe“, Bd. I, Seite 366 und 367, und „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“, 3. Jahrg. Seite 39.

9. ***Nodosaria Hauerana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 8—12.

Nod. lagenifera N. Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel in den Verhandlungen und Mittheilungen etc. Jahrg. III, Seite 39 und 40 und Taf. I, Fig. 10, 11 und 12.

Testa valde elongata, laevigata nec tamen nitida, superne modice incrassata; loculis quatuor vel etiam pluribus, ovalibus, plus minus inflatis, superne in collum cylindriforme vel in siphonem protractis, primo mucronato. — Long. excedit 3 mm. Non rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 39 und 40 und Fig. 8 bis 12. Die Unterscheidungsmerkmale, welche mich ehedem bestimmten die erwähnten Formen zu trennen, sind jedenfalls zu gering, als dass darauf hin die Trennung derselben in zwei Arten weiter festgehalten werden konnte.

10. ***Nodosaria Brukenthalana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 13 und 14.

Testa valde elongata, laevigata nec tamen nitida, superne modice incrassata; loculis quatuor vel etiam pluribus, longo-ovalibus, superne conice decrescentibus. — Long. excedit 1 mm. Non frequens.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 40 und Fig. 13 und 14. Bei der grossen Zerbrechlichkeit der Schalen sind drei- oder vierkammerige Exemplare schon sehr selten.

11. ***Nodosaria Orbignyana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 15—18.

Nodos. Buchana Neugeb. Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel in den „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“ Jahrg. III, Seite 41 und Tafel I, Fig. 16.

Nodos. Acknerana Neugeb. Ebendaselbst, Seite 41, Fig. 17 und 18.

Testa longissima, laevigata nec tamen nitida, superne modice, nonnunquam vix incrassata; loculis tribus vel quatuor altissimis, inferne modice tantum inflatis, superne sensim sensimque decrescentibus ideoque in longum collum projectis. — Long. = 3 ad 4 mm. Non frequens.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 40 und 41 und Fig. 17 und 18. Auch diese von mir früher dreien verschiedenen Arten zugewiesenen Formen glaube ich unter der Benennung *Nod. Orbignyana* in eine Art vereinigen zu müssen. Auch nur dreikammerige Exemplare sind schon eine grosse Seltenheit.

12. ***Nodosaria irregularis*** d'Orb.

Die wenigen aufgefundenen Exemplare sind nur drei- bis vierkammerige Fragmente.

13. ***Nodosaria longiscata*** d'Orb.

Die von dieser Art aufgefundenen Bruchstücke zeigen an den Enden der Kammern nicht so starke Verengungen, als sie nach d'Orbigny's Zeichnung in dessen „fossil. Foraminiferen des Tertiärbeckens von Wien“ anzunehmen sind.

14. ***Nodosaria Roemerana*** m.

Foraminiferen von Felső-Lapugy, 4. Artikel, Fig. 19.

Testa longissima, laevigata et nitida, superne vix incrassata; loculis quinque vel etiam pluribus, altis, inferne et superne sensim sensimque decrescentibus, ad suturas non strangulatis. — Long. = 4 mm.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 42 und die dazu gehörige oben angeführte Abbildung.

15. ***Nodosaria nodifera*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 20 und 21.

Testa longissima, laevigata nec tamen nitida, superne modice incrassata; loculis tribus vel pluribus altissimis, inferne cylindricis, superne sensim sensimque decrescentibus ac demum rursus laxatis et quodammodo in suturis nodos imitantibus. — Long. exemplarium trium loculorum excedit 5 mm.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 42 und Fig. 20 und 21. Bei der grossen Zartheit und Zerbrechlichkeit der Schale sind Exemplare mit drei Kammern schon eine grosse Seltenheit.

16. ***Nodosaria exilis*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 22—26.

Nodos. capillaris Neugeb. Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel in den „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, Jahrgang III, Seite 50 und 51, und Taf. I, Fig. 22—24.

Testa admodum elongata, filiformi vel capilliformi, antice vix incrassata, laevigata; loculis tribus vel pluribus altissimis, vel penitus planis et cylindricis vel ad suturas paululum strangulatis. — Long. = 3 ad 4 mm.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. S. 50 und 51 und Fig. 22—26. Da die Schalen bei ihrer grossen Zartheit äusserst zerbrechlich sind, so werden gewöhnlich nur einzelne Theile derselben gefunden. Aus diesem Grunde habe ich denn auch die Form der ersten Kammer bei dieser Art eben so wenig zu beobachten Gelegenheit gehabt als bei *Nod. Orbignyana, Roemerana* und *nodifera.*

17. ***Nodosaria gracilis*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 27—29.

Testa valde elongata, antice paululum incrassata, laevigata; loculis 10 ad 12, inde a primo admodum crescentibus, — primis ovalibus, reliquis subcylindricis, novissimis denique cylindricis inferne et superne ad suturas strangulatis, ultimo in siphonem tenuem protracto; apertura minima, nuda. — Long. = 3 mm.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. S. 51 und Fig. 27—29. Die grosse Zerbrechlichkeit der Schale ist Ursache, dass vollständige Exemplare nur höchst selten aufgefunden werden.

18. ***Nodosaria Bronnana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 30—37.

Nod. Czjżekana Neugeb. Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel in den „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, Jahrgang III, Seite 52 und Taf. I, Fig. 30.
Nod. Haidingerana Neugeb. An demselben Orte, S. 52, Fig. 31 und 32.
Nod. Bielzana „ An demselben Orte, S. 53, Fig. 36 und 37.

Testa elongata, cylindrico-conica, antice incrassata, laevigata, saepe etiam nitida; loculis 14 ad 15 altitudine et forma differentibus, — primo sphaerico magnitudine nonnunquam praevalente, — sequentibus, sphaeroidicis, sphaericis vel ovalibus, novissimis altioribus conicis, ovalibus vel

etiam ellipticis, ad suturas plus minus strangulatis, ultimo in siphonem tenuem projecto; apertura minima, nuda. — Long. = 2 ad 3 mm. Non rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. S. 52 und 53 und Fig. 30—37. In jüngster Zeit aufgefundene Mittelformen fordern um so mehr die Vereinigung dieser von mir ehedem aufgestellten Arten in eine einzige, als dieselben überhaupt nicht grosse Unterschiede darboten.

19. ***Nodosaria clavaeformis*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 38.

Testa elongata, cylindrico-conica, inferne incrassata superne attenuata, laevigata; loculis tribus vel pluribus elongatis, pari fere altitudine, cylindrico-conicis, complanatis, primo maximo inferne rotundato non mucronato, ad suturas quodammodo nodos imitantibus. — Long. excedit 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlnngen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 53 und die oben erwähnte dazu gehörige Abbildung.

B. RAUHE GEHÄUSE.

20. ***Nodosaria conica*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 4.

Testa elongata, conica, antice admodum incrassata, compressiuscula, scabra; loculis octo, inde a primo altioribus, primo sphaerico, sequentibus planis, tribus novissimis convexiusculis, ultimo ovali in breve collum vel siphonem exeunte. — Long. ad 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.,“ 3. Jahrg. S. 54, Fig. 4 der zu diesem Genus gehörigen Tafel.

21. ***Nodosaria hispida*** d'Orb.

Selten im Tegel von Lapugy.

22. ***Nodosaria rudis*** d'Orb.

Nodos. Fichtelana Neugeb. Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel in den „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, Jahrg. III, Seite 54 und Taf. I, Fig. 39.

Obgleich die von mir *Nod. Fichtelana* benannte Form nicht so körnig rauh wie *Nod. rudis* d'Orb. ist, so dürfte sie doch nur eine Varietät dieser Art sein.

23. ***Nodosaria asperula*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 40 und 41.

Testa elongata, antice paululum incrassata, scabra; loculis 4 — 5 globularibus, primis dense superpositis, — novissimis breviter stipitatis. — ultimo rostrato. — Long. accedit ad 2 mm. Non rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 54 und 55, und Fig. 40 und 41.

C. WARZIGE GEHÄUSE.

24. ***Nodosaria verruculosa*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 43.

Testa elongata, antice incrassata, papillis vel verruculis conferta; loculis 4 vel 5, dense superpositis, ultimo excepto sphaericis, — primo inferne mucronato, — novissimo ovali vel elliptico in siphonem projecto. — Longit. accedit ad 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“; 3. Jahrg. Seite 55 und Fig. 43.

D. GERIEFTE GEHÄUSE.

25. ***Nodosaria Scharbergana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 42.

Testa elongata, antice incrassata, subcanaliculata, loculis 5 vel 6, dense superpositis tribus prioribus sphaericis vel sphaeroidicis, reliquis ovalibus, — primo mucronato, — ultimo maximo in collum producto; collo longo et tenui transversim annulato, suturis plus minus constrictis. — Long. accedit ad 2 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 55 und Fig. 42.

E. BEWEHRTE GEHÄUSE.

26. ***Nodosaria armata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 44.

Testa elongata, antice admodum incrassata, aculeis conferta; loculis 4 vel 5 sphaericis, partim dense superpositis, partim collo divisis vel breviter stipitatis, — primo mucronato. — ultimo maximo, ovati, collo longo et tenui ornato. — Long. excedit 1 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 56 und Fig. 44.

27. ***Nodosaria spinosa*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 45.

Testa elongata, antice admodum incrassata, spinosa, spinis seriebus longitudinalibus in costarum modum dispositis; loculis quinque, — primis sphaeroidicis vel sphaericis, — duobus novissimis ovalibus dense superpositis, — primo mucronato, ultimo maximo in collum prolongato; collo longo et tenui, transversim annulato; suturis constrictis, — Long. = 1 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 56 und Fig. 45.

F. GERIPPTE GEHÄUSE.

28. ***Nodosaria multicosta*** m.

Taf. I, Fig. 12 [1]).

Testa cylindrico-conica, costulis numerosis ornata; loculis sex depressis, convexis, suturis profundis inter sese divisis, — primo sphaeroidico, non mucronata, — ultimo sphaerico; apertura minima, rotunda, centrali. — Long. = 1 ad $1^2/_5$ mm. Rara.

Die cylindrisch-konische Schale, aus 6 niedrigen convexen Kammern gebildet, erhält durch die zahlreichen feinen Rippen, die in der Längenrichtung von der ersten bis zur letzten Kammer hinlaufen, ein sehr zierliches Ansehen; die erste Kammer ist platt-kugelig, die letzte fast kugelig; die Einschnürungen zwischen den Kammern sind sehr tief und scheinen im obern Theil der Schale die Rippchen zu unterbrechen. Die centrale Mündung ist klein und rund.

Da diese Form Ähnlichkeit mit *N. Badenensis* d'Orb. hat, so war ich bemüht, besonders die letzte Kammer sehr genau zu untersuchen; es zeigte sich an den mir vorliegenden Exemplaren nicht die mindeste Spur davon, dass ein Hals vorhanden gewesen, und so hat sie denn von *N. Badenensis* getrennt werden müssen. Als jeder Verlängerung an der letzten Kammer entbehrend, gehört sie mit *N. rugosa* d'Orb. und der von mir oben beschriebenen *N. ambigua* in eine Gruppe.

29. ***Nodosaria Boueana*** d'Orb.
30. ***Nodosaria spinicosta*** d'Orb.
31. ***Nodosaria Badenensis*** d'Orb.
32. ***Nodosaria bacillum*** d'Orb.
33. ***Nodosaria affinis*** d'Orb.
34. ***Nodosaria elegans*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 53.

Testa elongata, subcylindrica, antice modice incrassata, longitudinaliter costata; loculis sex dense superpositis, ad suturas modice strangulatis, — quatuor prioribus sphaeroidicis, — duobus novissimis ovalibus, — primo rotundato, non mucronato, — ultimo in collum vel rostrum breve et nudum projecto; costulis 12 vel 14, ad suturas interruptis, numero constantibus. — Long. = 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 57 und Fig. 53.

35. ***Nodosaria Reussana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 46.

Testa elongata, antice admodum incrassata, postice mucronata, costata, verruculosa; loculis quinque dense superpositis, — tribus prioribus sphaericis vel sphaeroidicis, — quarto vel sphaerico vel elliptico, — novissimo denique ovali in collum prolongato, collo non verruculoso sed transversim annulato; costulis numerosis, multis verruculis vel papillis ornatis; suturis constrictis. — Long. excedit 1 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 58 und Fig. 46.

[1]) Um der Deutlichkeit der Abbildung nicht Abbruch zu thun, sind die sehr dichtstehenden zarten Rippchen nicht mit Doppelstrichen gegeben worden, was der geneigte Leser bei der Vergleichung der Abbildung mit der Beschreibung gütigst berücksichtigen möge.

36. ***Nodosaria Ehrenbergana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 47—52.

Nodos. variabilis Neugeb. Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel in den „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, Jahrg. III, Seite 58, Fig. 47—49.

Testa elongata, antice plus minus incrassata, postice mucronata, costata; loculis quinque plerumque sphaeroidicis et dense superpositis, — novissimo maximo, ovali in collum prolongato; collo transversim annulato; costulis saepe numerosis (20 et pluribus), non nunquam in medio loculo vanescentibus. — Long. excedit 1 mm.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 3. Jahrg. Seite 58 und 59. — Fig. 50, 51 und 52 sind offenbar nur minder vollkommen ausgebildete Formen der Art, welche in Fig. 47 und 49 ihre völlige Vollendung gefunden hat.

37. ***Nodosaria compressiuscula*** m.

Taf. II, Fig. 1—7, und Foraminiferen von F. Lapugy, 4. Artikel, Fig. 54—56.

Testa elongata, laevi, antice plus minus incrassata ideoque conica vel subconica, compressiuscula vel tota vel tantum in superiore parte, costata, inferne rotundata, superne apiculata; loculis 8, 10 vel etiam pluribus, — inferioribus humilioribus compressis, complanatis; saepe parum distinctis, — superiorioribus vel compressiusculis vel teretibus et convexiusculis, — ultimo ovali, apicato; costulis principalibus sex continuis, secundariis nonnunquam totidem. Long. = 2—3 mm. Non rara.

Von dieser im dritten Jahrgange der „Verhandlungen und Mittheilungen“ Seite 59 von mir bereits beschriebenen und dort unter Figur 54, 55 und 56 auch abgebildeten Art, welche durch ihre anfänglich stets breitgedrückte Form und niedrigen und planen Kammern gut charakterisirt ist, habe ich höchst interessante Varietäten aufzufinden Gelegenheit gehabt, welche ich auf Tafel II, Fig. 1—7 abbildete. Die früher unter Fig. 54 in dem dritten Jahrgange der „Verhandlungen und Mittheilungen“ und jetzt unter Fig. 1 gegebenen Formen bilden den Ausgangspunkt der Art; sie dürften, da sie beide eine geringere Höhe als die übrigen haben, noch Jugendformen sein. Das unregelmässige Auftreten der Haupt- und Nebenrippen verursacht die Mannigfaltigkeit der Formen dieser Art; die Zunahme der Rippen mit dem Alter der Schale ist insbesondere die Veranlassung des Überganges der plattgedrückten Form in das Stielrunde, wie es bei den Abbildungen 6—10 dargestellt ist.

DENTALINA D'ORBIGNY.

Von den aus den Tertiärschichten des Wiener Beckens durch die Herren d'Orbigny, Reuss und Czjžek bekannt gemachten Dentalinen sind von mir bis jetzt neun Arten, also ein Drittel, in dem Tegel von Lapugy entdeckt worden; drei Arten haben diese Straten mit dem Septarien-Thone der Umgegend von Berlin gemeinschaftlich. Ungleich grösser ist die Anzahl solcher Formen, welche bis jetzt aus dem Wiener Becken von keine Fachmänner bekannt gemacht worden sind. Diese Formen bieten derartige Verschiedenheiten dar, dass 27 Arten darauf gegründet werden konnten.

A. GLATTE GEHÄUSE.

1. ***Dentalina perversa*** m.

Taf. II, Fig. 8.

Testa elongata, parum arcuata, laevigata, antice attenuata; loculis 4 vel 5 rectis, inde a primo altitudine crescentibus, — primo depresso, inferne rotundato, non mucronato, — duobus sequentibus complanatis, — reliquis convexiusculis, — ultimo longissimo in siphonem brevem attenuato; suturis inferioribus linearibus, superoribus vero constrictis; apertura minima, nuda. — Long. = 1 ad $1^1/_5$ mm. Rarissima.

Das glatte Gehäuse ist wenig gebogen, im unteren Theile bedeutend dicker als oben; 6 bis 7 Kammern, die nach oben an Höhe zunehmen, — die erste Kammer ist unten kugelig gerundet, nicht gestachelt, — die zweite und dritte cylindrisch, alle drei nicht durch vertiefte Näthe, sondern nur durch glasig glänzende Nathlinien geschieden, — die folgenden Kammern wölben sich immer deutlicher und haben etwas einschneidende Näthe, — die letzte ist besonders verschmälert und geht allmählich in eine kurze Röhre aus, woran die kleine Mündung ohne Strahlenkranz.

Diese Art unterscheidet sich von *D. dispar* Reuss, mit der sie allerdings durch ihre Form viele Ähnlichkeit hat, auf das Bestimmteste dadurch, dass die erste Kammer nicht gestachelt und die letzte viel geringer gewölbt und mehr in die Länge gezogen ist; auch erscheint die Mündung weniger excentrisch.

2. ***Dentalina dispar*** Reuss.

Zeitschrift der deutschen geologischen Gesellschaft 1851, Heft I, Taf. 3, Fig. 7.

Schalen dieser Art, welche Herr Dr. Aug. E. Reuss zuerst in dem Septarien-Thone der Umgegend von Berlin aufgefunden hatte, sind bei Lapugy äusserst selten.

3. ***Dentalina pygmaea*** m.

Taf. II, Fig. 9.

Testa elongata, vix arcuata, laevigata; loculis 4 vel 5 obliquis et convexis, primo aliquantulum majore mucronato, — ultimo maximo, subsphaerico, in collum vel siphonem spinis minimis armatum producto; suturis vitreis, vel arcuatis vel inflexis; apertura minima, nuda. — Long. = $^4/_5$ ad 1 mm. Rarissima.

Die nur sehr wenig gebogene glatte Schale wird aus 4 bis 5 convexen Kammern gebildet, die auf der Axe schief stehen; die erste Kammer geht unten in einen langen Stachel aus und ist etwas dicker als die nächstfolgende, — die letzte Kammer ist stark kugelig, dicker als die vorhergehenden und geht rasch in einen dünnen langen Hals aus, woran sich ganz kleine Dornen befinden. Die Näthe sind glasig glänzend, theils nur gebogen, theils S-förmig gekrümmt und erscheinen unter dem Mikroskope als sehr schmale Binden.

Diese Art unterscheidet sich von *D. cingulata* Czjzek, mit der sie einige Ähnlichkeit hat, dadurch, dass die erste Kammer in einen Stachel und die letzte in einen Hals ausgeht, während bei jener die erste Kammer vollkommen abgerundet ist und die letzte eine kurze, stark seitliche Spitze mit einer von Strahlen umgebenen Mündung hat.

4. ***Dentalina globuligera*** m.

Taf. II, Fig. 10.

Testa brevi, vix arcuata, laevigata, antice vix incrassata; loculis 6 vel 7, duobus prioribus sphaericis, reliquis ovalibus, — primo non mucronato, — ultimo apiculato; suturis profundis; apertura minima, radiata. — Long. = 1 mm. Rara.

Die im Verhältnisse zu ihrer Dicke wenig verlängerte, glatte, kaum gebogene Schale ist in ihrem oberen Theile nur sehr wenig dicker als unten und wird aus wenigen (4 bis 5) kugeligen Kammern gebildet, welche an ihren Enden durch tief einschneidende Näthe von einander getrennt werden. Nur die zwei letzten Kammern sind etwas höher als breit, — die oberste geht in eine ganz kleine, etwas zitzenartig aussehende Spitze aus, woran die kleine Mündung von Strahlen umgeben, — die erste ist kugelrund, ohne die geringste Spur eines Dornes oder Stachels.

Diese Art unterscheidet sich von *D. antennula* d'Orb., mit welcher sie ihrer Form nach allerdings Ähnlichkeit hat, durch mehr kugelige Kammern, durch tiefer einschneidende Näthe, durch den Mangel an kleinen Falten an dem unteren Theile der Kammern und des Dornes am unteren Ende der Schale, endlich durch den Strahlenkranz um die Mündung.

5. ***Dentalina conferta*** m.

Taf. II, Fig. 11.

Testa aliquantulum elongata, parum arcuata, laevigata, antice incrassata, postice attenuata et rotundata; loculis 11 ad 12 obliquis, planis, compressis, ultimo magnitudine praevalente convexo, marginaliter acuminato; suturis omnibus obliquis et arcuatis; apertura minima, radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = 1 ad $1^1/_5$ mm. Rara.

Die nur wenig verlängerte glatte Schale nimmt nach oben an Dicke bedeutend zu, ist unten etwas spitzlich abgerundet und wird aus zahlreichen (11 bis 12) ziemlich schiefen, niedrigen, sehr dicht gedrängten Kammern gebildet, die mit Ausnahme der letzten oder auch der vorletzten nicht die mindeste Wölbung zeigen. Die letzte Kammer ist gewölbt, durch Grösse und Dicke überwiegend und geht in eine fast randständige kurze aber ausgezeichnete Spitze aus, woran die umstrahlte Mündung von einem glasig glänzenden Hofe umgeben. Die Näthe erscheinen als schiefe gebogene Linien.

Diese Art unterscheidet sich von ihr ähnlichen Formen, die weiter unten beschrieben werden sollen, durch die vielen, sehr niedrigen Kammern, welche durchaus nur halb so hoch als breit sind.

6. ***Dentalina Haueri*** m.

Taf. II, Fig. 12.

Testa elongata, parum arcuata, laevigata, postice attenuata; loculis 5 ad 7 admodum obliquis, — primis complanatis, novissimis altioribus, in dorso convexiusculis, — primo obtuso et rotundato, — ultimo maximo acuminato, apice laterali; suturis curvatis; apertura minima circulo vitreo circumdata. — Long. = $1^1/_5$ ad $1^2/_5$ mm. Non rara.

Die glatte verlängerte, nicht stark gekrümmte Schale ist unten abgerundet, nimmt von unten nach oben an Dicke beträchtlich zu und hat 5 bis 7 Kammern, welche sämmtlich schief sind; die ersten, sehr schiefen Kammern zeigen immer zugleich S-förmig gewundene Näthe, was bei manchen Exemplaren selbst noch bei den letzten Kammern der Fall ist, — die jüngeren Kammern zeigen besonders an der Rückenseite deutliche

Anschwellungen; die letzte geht in eine nach der Bauchseite randständige Spitze aus, woran die Mündung von Strahlen und einem glasig glänzenden Hofe umgeben.

Diese Art unterscheidet sich von *D. Badenensis*, welche ebenfalls sehr schiefe Kammern hat, durch niedrigere Kammern, durch die Randständigkeit der Spitze der jüngsten Kammer und durch die umstrahlte Mündung.

7. ***Dentalina Roemeri*** m.

Taf. II, Fig. 13—17.

Testa elongata, parum arcuata, laevigata, postice attenuata; loculis 9 vel 10 obliquis omnibus, — primis humilibus complanatis, novissimis altioribus in dorso praesertim convexiusculis, — primo obtuso et rotundato, — ultimo maximo, in apicem lateralem acuminato; suturis obliquis, arcuatis; apertura in circulo vitreo radiata. — Long. = $1^1/_5$ ad $1^2/_5$ mm. Non rara.

Die verlängerte glatte Schale ist mehr oder minder deutlich gebogen, nimmt an Dicke von unten nach oben nicht auffallend zu, ist unten meistentheils unregelmässig zugerundet und hat bis 10 schiefe, nach aufwärts an Höhe beträchtlich zunehmende Kammern mit gebogenen Näthen; die untersten Kammern haben keine Anschwellung und ihre Näthe erscheinen daher nur als gebogene Linien, — die letzte ist überwiegend dick und verlängert sich in eine seitenständige Spitze, woran die Mündung von Strahlen und einem glasig glänzenden Hofe umgeben. Fig. 17 ist wohl nur eine gedrängtere Form dieser Art, mit zwar sehr stark gebogenen aber minder schiefen Näthen.

Diese Art unterscheidet sich von *D. Haueri* durch weniger schiefe Kammern und stets nur gebogene, nie aber S-förmig gewundene Näthe, sowie durch die längere Form und die zahlreicheren Kammern; von *D. Badenensis* d'Orb. durch ihre im Ganzen gedrängtere Form, durch niedrigere Kammern und durch die umstrahlte Mündung.

8. ***Dentalina inornata*** d'Orb.
9. ***Dentalina pauperata*** d'Orb.
10. ***Dentalina Orbignyana*** m.

Taf. III, Fig. 1—3.

Testa elongata, aliquantulum arcuata, laevigata, postice attenuata, rotundata; loculis 10 ad 12 obliquis, inferioribus complanatis, plus minus compressiusculis, superioribus altioribus convexis, — ultimo magnitudine praevalente, lateraliter acuminato; suturis primis non arcuatis; apertura in circulo vitreo radiata. — Long. = $1^3/_5$ mm. Non rara.

Die glatte verlängerte, mehr minder gebogene Schale nimmt von unten nach oben an Dicke beträchtlich zu. Die Anzahl der Kammern, welche mit seltenen Ausnahmen alle schief sind, steigt bis auf 12; bis zur fünften, nicht selten bis zur siebenten Kammer ist die Schale plan und ohne Einschnürungen, und die Näthe erscheinen als einfache schiefe Linien; die drei bis fünf letzten Kammern zeigen besonders an der Rückenseite zum Theil beträchtliche Anschwellungen und haben in der Seitenansicht zugleich gebogene Näthe. Die Kammern nehmen an Höhe nach oben beträchtlich zu, bei manchen Exemplaren sind die untersten sehr niedrig und gedrängt; die erste ist ziemlich regelmässig abgerundet, — die letzte, oft durch ihre Dicke überwiegend, geht ohne beträchtliche Verlängerung in eine stark seitenständige Spitze aus, woran die Mündung von Strahlen und einem glasig glänzenden Hofe umgeben. Unter Fig. 3 wurde als notable Varietät eine Schale dieser Art abgebildet, bei welcher die Mittel-Kammern nicht schief, sondern senkrecht auf der Axe stehen.

Diese Art unterscheidet sich von *Dent. inornata* d'Orb. durch die ganz ebenen Kammern im untern Theile der Schale und durch die umstrahlte Mündung im glasig glänzenden Hofe, von *D. Haueri* und *Roemeri* durch die einfach schiefen Näthe in dem unteren Theil der Schale, während jene Arten von allem Anfange an gebogene schiefe Näthe wahrnehmen lassen.

11. ***Dentalina subtilis*** m.

Taf. III, Fig. 4.

Testa longa, gracili, parum arcuata, laevigata, postice attenuata, obtusa et rotundata; loculis numerosis (vel 16), obliquis, — prioribus, complanatis compressiusculis, — reliquis altioribus, magnitudine crescentibus, in dorso convexiusculis, — ultimo maximo, lateraliter acuminato; suturis obliquis partim arcuatis partim incurvis, apertura radiata. — Long. = $2^3/_5$ mm. Rara.

Die Schale ist glatt, nur wenig gebogen, schlank, lang, oben doppelt so dick als unten und wird aus sehr zahlreichen (wohl bis 16) Kammern gebildet, die nicht nur schief und zum Theile sehr schief auf der Axe stehen, sondern noch dazu zum Theil sehr gebogene Nathlinien haben. Die Kammern der unteren Schalenhälfte sind dicht gedrängt, nicht höher als breit, ohne Anschwellung, jene der oberen dagegen etwas gewölbt, hauptsächlich an der Rückenseite, und nehmen sofort an Höhe beträchtlich zu; die erste ist regelmässig abgerundet — die letzte geht in eine stark seitenständige, etwas abgestutzte Spitze aus, woran die Mündung von Strahlen umgeben.

Diese Art unterscheidet sich von allen mir bekannten schiefkammerigen Arten durch ihre sehr schmächtige Form und von *D. Roemeri* noch besonders durch die grössere Anzahl der Kammern und den Mangel des glasigen Hofes um die Mündung.

12. ***Dentalina Partschi*** m.

Taf. III, Fig. 5.

Testa longa, vix arcuata, laevigata, gracili, postice aliquantulum attenuata, rotundata; loculis 10 ad 13 obliquis omnibus, — 5 vel 6 inferioribus complanatis, plus minus compressiusculis, reliquis altitudine crescentibus convexiusculis, ovalibus, — novissimo maximo acuminato; suturis vitreis; apertura radiata, plerumque circulo vitreo circumdata. — Long. = $2^2/_5$ ad $2^4/_5$ mm. Rara.

Die glatte schlanke Schale ist im oberen Theile beträchtlich dicker als im unteren und wird aus 10 bis 13 etwas schiefen Kammern gebildet, welche durch glasig glänzende stark sichtbare Näthe geschieden sind. Die erste Kammer ist unten regelmässig gerundet, — die nächst folgenden (4 bis 6) sind cylindrisch, nur wenig höher als breit, — die übrigen wölben sich besonders an der Rückenseite der Schale und nehmen zugleich an Höhe immer mehr zu, die letzte endlich geht in eine stark excentrische Spitze aus, woran die Mündung von Strahlen und bei gut erhaltenen Exemplaren auch von einem glasigen Hofe umgeben.

Diese Art unterscheidet sich von *D. subtilis* zunächst durch die glasigen Näthe, dann aber noch dadurch, dass diese Näthe nicht gebogen und die Kammern überhaupt weniger schief als bei *D. subtilis* sind.

13. ***Dentalina mucronata*** m.

Taf. III, Fig. 8—11.

Testa elongata, laevigata, plus minus arcuata, postice attenuata, mucronata; loculis 6 ad 12 obliquis omnibus, inferioribus complanatis et compressiusculis, superioribus convexiusculis et altioribus, — primo postice in spinam dorsalem transeunte, ultimo maximo, convexo, ovato, lateraliter saepe etiam marginaliter acuminato; suturis obliquis arcuatis, novissimis constrictis, nonnunquam etiam flexis; apertura radiata in circulo vitreo. — Long. = 1 ad 2 mm. Non rara.

Die glatte, mehr oder minder gebogene, bei einzelnen Exemplaren sogar in Folge der dornartigen Spitze an der convexen Seite ein wenig S-förmig gekrümmte Schale wird aus Kammern gebildet, welche stets schief auf der Axe stehen und deren Anzahl von 6 bis auf 12 steigt, je nachdem sie bei dem einzelnen Individuum deutlich höher oder zum Theile wenigstens auffallend niedriger sind. Die erste Kammer geht nach unten in eine rückenständige Spitze aus, die oft ausgezeichnet ist; nur die drei oder vier obersten Kammern sind deutlich convex und zwar an der Rückenseite am stärksten; die ihnen vorangehenden bilden einen Theil eines schmalen, etwas gekrümmten Kegels; die letzte ist oft überwiegend gross und geht in eine stark excentrische, oft ausgezeichnet vorragende Spitze aus, woran die kleine Mündung in einem glasig glänzenden Hofe von Strahlen umgeben. Die Näthe stellen theils einfach gebogene, theils S-förmig gewundene Linien dar.

Die Extreme der Formen dieser Art würde man leicht als besondere Arten betrachten können; ich habe jedoch so viele Mittelformen aufgefunden, dass eine Zertheilung in zwei oder drei Arten aufgegeben werden muss.

14. ***Dentalina Badenensis*** d'Orb.
15. ***Dentalina subulata*** m.

Taf. III, Fig. 13.

Testa longa, laevigata, arcuata, gracili, postice aliquantulum attenuata; loculis 7 vel 8 admodum obliquis, primis complanatis pari fere altitudine et latitudine, — recentioribus oblongis, convexiusculis, — primo nonnunquam majore in spinam transeunte, — ultimo maximo, convexo, tandem in rostrum attenuato; suturis obliquis arcuatis, ultimis tantummodo constrictis; apertura in circulo vitreo radiata. — Long. = 2 ad $2^2/_5$ mm. Rara.

Die glatte, sehr verlängerte, gebogene Schale nimmt von unten nach oben nur wenig an Dicke zu, und wird aus 7 bis 8 sehr schiefen Kammern gebildet, die an Höhe mehr und mehr zunehmen. Die bei manchen Exemplaren etwas verdickte erste Kammer geht in einen Dorn aus, — die drei letzten haben einige Convexität, — die letzte geht in eine lange, stark seitenständige Spitze aus, woran die kleine Mündung von Strahlen und einem glasig glänzenden Hofe umgeben. Die Näthe bilden schiefe gebogene Linien.

Diese Art unterscheidet sich von *D. Badenensis* d'Orb. durch die plane Beschaffenheit des unteren Theiles der Schale und durch die umstrahlte Mündung.

16. ***Dentalina elegans*** d'Orb.
17. ***Dentalina tenuis*** m.

Taf. III, Fig. 14.

Testa longa, laevigata, parum arcuata, gracili, postice aliquantum attenuata; loculis numerosis (vel 14), rectis, — primis complanatis, — recentibus altioribus magis magisque crescentibus, convexiusculis, — primo magnitudine praevalente, mucronato, — ultimo maximo convexo, ovali rostrato, obtuso; suturis primis planis, — reliquis aliquantulum constrictis; apertura radiata. — Long. = $2^1/_5$ ad $2^2/_5$ mm. Rarissima.

Die Schale ist glatt, sehr schlank, nur wenig gebogen, von unten nach oben nur sehr wenig verdickt und wird aus zahlreichen (bis 14) zum Theil cylindrischen, zum Theil gewölbten Kammern gebildet, welche auf der Axe senkrecht stehen. Die erste Kammer ist etwas convex, gross, dicker als die nächstfolgende und geht unten in eine ziemlich lange Spitze aus, — die fünf folgenden sind etwas höher als breit, cylindrisch, ohne einschneidende Nathlinien, die übrigen nehmen an Höhe immer zu und sind schwach gewölbt, an den Näthen etwas eingeschnürt, die letzte, dicker und höher als eine der vorhergehenden, verjüngt sich nach oben und geht in einen abgestutzten Schnabel über, woran die umstrahlte Mündung; die Strahlen laufen an dem Schnabel hinab.

Diese Art unterscheidet sich von *D. elegans* d'Orb. durch bedeutendere Schlankheit, durch den etwas abgestutzten Schnabel der letzten Kammer und durch die um die Mündung vorhandenen Strahlen; von *D. Partschi* vornehmlich durch den Dorn an der ersten Kammer und durch die Stellung der Kammern.

18. ***Dentalina Reussi*** m.

Taf. III, Fig. 6, 7 und 17.

Testa laevigata, elongata, arcuata, postice aliquantulum attenuata; loculis 10 ad 12 non obliquis, inferioribus humilioribus plerumque complanatis, — reliquis aliquantum oblongis et convexiusculis, primo rotundato, mucronato, — ultimo maximo, ovali, apiculato; suturis vitreis, recentioribus saltem aliquantulum constrictis; apertura in mammilla vitrea radiata. — Long. = 2 mm.

Die ziemlich schlanke glatte Schale ist mehr oder minder gebogen, oben nur wenig dicker als unten und wird aus 10 bis 12 Kammern gebildet, welche senkrecht auf der Axe stehen und anfänglich gewöhnlich nur cylindrisch, dann etwas convex sind und durch stark hervortretende glasig glänzende Näthe getrennt werden. Die erste Kammer rundet sich unten anfangs ab und geht dann in einen Dorn aus, die sechs folgenden sind cylindrisch, in seltenen Fällen etwas gewölbt, und von ihnen die drei ersten nicht höher als breit, die übrigen sind immer gewölbt und nehmen an Höhe zu, so das die vorletzte fast doppelt so hoch als breit ist, — die letzte überwiegt durch Höhe und Dicke und geht in eine glasig glänzende Zitze über, woran die kleine Mündung von Strahlen umgeben. Ich betrachte Fig. 17 als die typische Form; bei Fig. 6 und 7 dürfte nur durch Zufall der Stachel abgebrochen sein als der Bewohner der Schale noch lebte.

Diese Art ist minder schlank als *D. tenuis,* hat ferner nicht die überwiegend grosse erste Kammer derselben; auch fehlen jener die stark hervortretenden glasigen Näthe, welche diese Art in der Weise auszeichnen, dass man sie unter dem Mikroskope betrachtet für Nathbinden anzusehen versucht wird.

19. ***Dentalina Haidingeri*** m.

Taf. III, Fig. 12.

Testa longa, laevigata, aliquantulum arcuata, postice attenuata; loculis 9 ad 12 non obliquis, inferioribus praesertim compressiusculis et complanatis, — 3 vel 4 novissimis convexiusculis, primo rotundato, spina armato, — ultimo maximo et altissimo convexo, acuminato, apice laterali; suturis vitreis; apertura in circulo vitreo radiata. — Long. = $1^3/_5$ ad 2 mm.

Die Schale ist glatt, etwas gebogen durch zahlreiche niedrige Kammern von gedrängtem Ansehen und nimmt von unten nach oben an Dicke nur allmählich zu. Die Kammern, durch glasige Näthe getrennt, belaufen sich auf 9 bis 12 und stehen senkrecht auf der gebogenen Axe; die erste Kammer ist halbkugelig, geht jedoch unten mehr oder minder rasch in eine meistentheils mittelständige Spitze aus, auf ihr folgen 5 bis 7 niedrige cylindrische Kammern ohne die mindesten Einschnürungen an ihren Enden, niemals so hoch als breit, die übrigen erreichen höchstens die Höhe ihrer Breite und sind schwach gewölbt, sie zeigen daher einige Einschnürung an den Näthen, die letzte überwiegt die vorhergehende an Höhe, ist nach aussen (an der Rückenseite) oft stark convex und geht in eine in den meisten Fällen deutlich seitenständige, nie ausgezeichnet hinaustretende Spitze aus, woran die Mündung von einem Strahlenkranze umgeben; oft ist dieselbe auch noch mit einem glasigen Hofe versehen.

Diese Art hat wohl einige Ähnlichkeit mit *D. pauperata* d'Orb., unterscheidet sich aber von ihr auf das Bestimmteste durch die glasigen Näthe und die von Strahlen umgebene Mündung.

20. ***Dentalina consobrina*** d'Orb.

Taf. III, Fig. 15.

Von dieser Art habe ich unter der angeführten Figur eine Varietät abgebildet, die sich von den durch d'Orbigny aus dem Wiener Becken veröffentlichten Formen dadurch unterscheidet, dass der untere Theil der Schale fast vollkommen plan ist und die Näthe hier nicht einschneiden; es sind übrigens auch die von d'Orbigny mitgetheilten Formen von mir in dem Tegel von Lapugy aufgefunden worden. Selten.

21. ***Dentalina spinigera*** m.

Taf. III, Fig. 16.

Testa longa, gracili, laevigata, parum arcuata, postice aliquantulum attenuata; loculis 4 vel 5 oblongis, subcylindricis vel convexiusculis, — primo altissimo, postice rotundato et spina longa armato, ultimo acuminato, obtuso; suturis aliquantulum constrictis; apertura longis radiis circumdata. — Long. = $2^2/_5$ ad 3 mm. Rara.

Die glatte schmale Schale ist nicht stark gebogen, im oberen Theile nur um ein Geringes dicker als unten und wird aus 4 bis 5 sehr hohen, einander ziemlich gleichkommenden, fasst cylindrischen, an den Näthen jedoch ein wenig eingeschnürten Kammern gebildet, deren Breite zur Höhe wie 1:5 bis 6. Die erste Kammer hat unten einen langen starken selbstständigen Stachel, der gleichsam der embryonale Anfang der Schale ist; die letzte ist etwas convexer als die übrigen, verdünnt sich nach oben, und erscheint sodann abgestutzt. Die Mündung ist von Strahlen umgeben, die tief herablaufen.

Obwohl diese Art mit der von mir abgebildeten Varietät von *D. consobrina* d'Orb., was den oberen Theil der Schale betrifft, grosse Ähnlichkeit hat, so bieten sich dagegen im unteren Theile auffallende Verschiedenheiten dar; dahin gehört, dass sie hier dünner ist als oben und deutliche Einschnürungen an den Enden der Kammern zeigt, wozu noch der verhältnissmässig sehr grosse und starke Stachel kommt, der an die erste Kammer nur angesetzt zu sein scheint.

22. ***Dentalina abbreviata*** m.

Taf. III, Fig. 18.

Testa laevi, brevi, parum arcuata; loculis 4 vel 5 non obliquis, — inferioribus compressis, duobus novissimis oblongis et convexis, — primo obtuse rotundato et mucronato, — ultimo ovali et mammillato; sutura prima complanata, reliquis constrictis; apertura in mammilla vitrea radiata. — Long. = 1 mm. Rara.

Die glatte Schale ist nur wenig verlängert, wenig gebogen, im oberen Theile nicht dicker als unten und wird aus 4 bis 5 Kammern gebildet, die zum Theil nicht höher, zum Theil nur wenig höher als breit sind. Die erste Kammer ist unten ziemlich kugelig abgerundet, geht dann in einen kurzen Stachel aus und ist von der zweiten nur durch eine Nathlinie getrennt, alle übrigen haben Einschnürungen zwischen einander und sind convex, die letzte geht in eine glasig glänzende, bestimmt hervortretende, etwas excentrische Zitze aus, woran die kleine Mündung von Strahlen umgeben.

Diese Art unterscheidet sich von *D. dispar* Reuss auf das Bestimmteste dadurch, dass sie im oberen Theile nicht dünner ist als im untern, und in eine glasige Zitze mit umstrahlter Mündung sich endigt.

23. ***Dentalina trichostoma*** Reuss.
24. ***Dentalina Boueana*** d'Orb.

Beide Arten scheinen nicht selten zu sein, doch findet man gewöhnlich nur Fragmente derselben.

25. ***Dentalina Scharbergana*** m.

Taf. IV, Fig. 1 bis 4.

Testa elongata, gracili, laevigata, arcuata, postice attenuata; loculis 8 ad 16 rectis, prioribus compressiusculis plerumque complanatis, nonnunquam convexiusculis, reliquis altitudine crescentibus, convexis, primo majore rotundato et mucronato, — novissimo maximo vel subsphaerico vel ovali in collum prolongato; — suturis vel omnibus vel inferioribus tantum vitreis; apertura magna, varice circumdata. — Long. = $1^3/_5$ ad 3 mm. Frequens.

Die Schale ist glatt, deutlich gebogen, oft sehr verlängert, im Ganzen schlank, oben etwa doppelt so dick als unten und wird aus zahlreichen (8 bis 16) auf der Axe senkrecht stehenden Kammern gebildet, welche in der untern Hälfte der Schale gar keine oder doch nur so wenig Wölbung zeigen, dass sie etwas oval erscheinen, in der obern dagegen manchmal sehr stark gewölbt sind; die erste Kammer überwiegt durch ihre Dicke stets die nächstfolgende, ist abgerundet, geht aber in einen bald ganz geraden, bald rückwärts oder vorwärts gekrümmten Stachel aus, die letzte verlängert sich in einen mehr oder minder dünnen Hals und biegt dann auswärts um, so dass die Mündung von einer Wulst umgeben erscheint. Die untern Kammern sind stets durch glasig glänzende Näthe geschieden. Als eine Missbildung ist es anzusehen, wenn die letzte Kammer von ungewöhnlicher Höhe ist und um die Mitte einige Einschnürung zeigt, ohne dass Spuren von einer Nath an dieser Stelle entdeckt werden können. Das matte Ansehen mancher Schalen rührt wohl nur von ihrer minder guten Erhaltung her. Die unter Fig. 4 abgebildete Form, von welcher ich etliche Exemplare aufgefunden habe, stimmt, die völlige Abrundung der ersten Kammer ausgenommen, in allen übrigen Eigenschaften so vollkommen mit der oben beschriebenen Art überein, dass man annehmen kann, der fehlende Stachel sei weggebrochen als der Bewohner der Schale noch lebte, so dass sich die Schale vollständig verwachsen konnte.

B. RAUHE UND GERIEFTE GEHÄUSE.

26. ***Dentalina scabra*** Reuss.

So häufig grössere und kleinere Fragmente dieser Art sind, so selten sind dagegen wohlerhaltene Exemplare.

27. ***Dentalina subcanaliculata*** m.

Taf. IV, Fig. 5 und 6.

Testa elongata, parum arcuata, fragili, subtiliter canaliculata, antice incrassata; loculis numerosis (ad 18) inaequalibus, — inferioribus complanatis, compressiusculis, — reliquis altitudine crescentibus, subsphaericis vel convexiusculis, — primo rotundato, non mucronato, ultimo maximo in collum projecto; apertura magna, simplici; suturis superioribus constrictis. — Long. = 2 mm.

Die verlängerte nur wenig gebogene Schale ist auf ihrer ganzen Oberfläche gerieft (d. i. der Länge nach mit kurzen, oft sehr dicht stehenden rinnenartigen Vertiefungen versehen) und wird aus zahlreichen (bis 18), im untern Theile cylindrischen, im obern dagegen gewölbten Kammern gebildet, von denen die untern bei manchen Exemplaren nicht einmal die Höhe ihrer Breite haben, während die obern an Höhe immer mehr zunehmen und manchmal doppelt so hoch als breit sind; die erste Kammer ist unten vollkommen zugerundet, ohne irgend eine Spur eines Dornes, die letzte geht in einen längern oder kürzern Hals aus, was von der mehr verlängerten oder aber gedrängtern Form dieser Kammer abhängt.

Diese Art unterscheidet sich von *D. scabra* Reuss dadurch, dass sie nicht mit länglichen Rauhigkeiten überhaupt bedeckt, sondern ganz bestimmt gerieft ist, — dass die Kammern im untern Theile der Schale cylindrisch und plan sind, — endlich dass die erste Kammer nicht die mindeste Spur einer Spitze oder eines Dornes aufzuweisen hat.

28. ***Dentalina subspinosa*** m.

Taf. IV, Fig. 7, *a*, *b* und *c*.

Testa elongata, arcuata, fragili, antice incrassata; loculis 12 vel 15 inaequalibus, — inferioribus compressiusculis, sphaericis et subsphaericis, subtiliter canaliculatis, novissimis oblongis, ovalibus, spinis minimis armatis, — primo sphaerico, non mucronato; suturis profundis, inferioribus vitreis; apertura? — Long. = 2 ad $2^2/_5$ mm. Rara.

Die verlängerte sehr zerbrechliche Schale ist deutlich gebogen, im untern Theile gerieft, im obern mit ganz feinen und kleinen Stacheln dicht besetzt und wird aus 12 bis 15 Kammer gebildet, von welchen die untern kugelig, die oberen dagegen oval sind, die erste Kammer ist kugelig ohne Spitze oder Stachel und öfter glatt, die Gestalt der letzten Kammer habe ich nicht ermitteln können, da sie bei allen Exemplaren abgebrochen war; die Näthe sind im unteren Theile der Schale glasige dicke Linien.

Die Beschaffenheit der jüngsten Kammern, die, wie erwähnt, mit kleinen Stacheln besetzt sind, nöthigt mich, diese Form als selbstständige Art aufzustellen. Durch diese Stacheln unterscheidet sie sich auf das Bestimmteste von anderen Arten. Eine Vereinigung unserer Form mit *D. floscula* d'Orb., welche auch mit Stacheln besetzt ist, erlaubt schon die eigenthümliche Gestalt der letztern nicht.

C. BEWEHRTE GEHÄUSE.

29. ***Dentalina Adolphina*** d'Orb.

Taf. IV, Fig. 8, *a* und *b*.

Von dieser sehr zierlichen Art habe ich ausser der von d'Orbigny aus dem Wiener Tertiär-Becken beschriebenen und abgebildeten Form auch die unter der angezogenen Figur abgebildete Varietät aufgefunden. Sie weicht von der typischen Form darin ab, dass die untersten Kammern glatt oder höchstens gerieft sind und dass der ersten Kammer die lange Spitze fehlt. Nach den vielen aufgefundenen Fragmenten zu schliessen, ist diese Art nicht selten im Tegel von Lapugy.

30. ***Dentalina ornata*** m.

Taf. IV, Fig. 9, *a* und *b*.

Testa elegantissima, modice arcuata, fragili, antice incrassata; loculis 15 vel 16 rectis, — inferioribus complanatis, compressiusculis, tenuissime costatis, — reliquis sphaericis, sejunctis, postice tuberculorum vel spinarum serie una ornatis, — primo hemisphaerico rotundato, non mucronato, — ultimo et penultimo nonnunquam duabus tuberculorum seriebus armato; suturis vitreis, spinis minimis una vel tribus seriebus ornatis; apertura? — Long. = 2 ad $2^2/_5$ mm. Rara.

Die sehr verlängerte Schale ist wenig gebogen, zart, zerbrechlich und wird aus 15 bis 16 Kammern gebildet, welche theils cylindrisch und nur durch Nathlinien abgetheilt, theils kugelig und durch sehr starke Zusammenziehung an ihren beiden Enden von einander getrennt sind. Die erste Kammer bildet eine glatte Halbkugel ohne Dorn, die 4 bis 5 folgenden sind nicht vollkommen so hoch als breit, cylindrisch und der

Länge nach fein gerippt, alle übrigen sind stark kugelig und unterhalb der Mitte mit einer Reihe Höcker oder Dornen verziert; die letzten Kammern haben in manchen Fällen eine zweite Reihe Verzierungen. Zwischen diesen kugeligen Kammern sind ziemlich breite glasige Näthe vorhanden, welche eine oder auch drei Reihen kleiner Dornen haben, wodurch die Schale ungemein an Zierlichkeit gewinnt.

Diese Form muss von *D. Adolphina* getrennt werden, da sie sich von derselben auf das Bestimmteste dadurch unterscheidet, dass die ersten Kammern vollkommen cylindrisch und die Näthe mit Dornen besetzt sind.

D. GERIPPTE GEHÄUSE.

31. ***Dentalina Beyrichana*** m.

Taf. IV, Fig. 11.

Testa elongata, vix arcuata, costata, antice aliquantulum incrassata; loculis sex rectis, — primo majore globuloso, mucronato, — secundo et tertio complanatis, reliquis convexiusculis, — ultimo ovali, lateraliter rostrato; costulis inde a primo loculo exeuntibus octo, non interruptis loculo penultimo evanescentibus; suturis tribus superioribus constrictis; apertura in rostro vitreo minima, nuda. — Long. = 1 mm. Rarissima.

Die verlängerte, sehr schwach gebogene, gerippte, oben nur wenig verdickte Schale wird aus 6 auf der Axe senkrecht stehenden Kammern gebildet. Die erste etwas kugelige Kammer geht unten in eine Spitze aus und ist etwas dicker als die ihr folgende; die drei obern haben deutliche Wölbung und die letzte endet in eine etwas seitliche glatte Spitze, woran die Mündung ohne Strahlenkranz. Von der Spitze der ersten Kammer steigen über die Schale der Länge nach ohne Unterbrechung acht schwache Rippen empor, die sich an der vorletzten Kammer verlieren. Im untern Theile der Schale sind die Kammern nur durch Nathlinien abgetheilt, in dem obern finden deutliche Einschnürungen zwischen den Kammern Statt.

Diese Art unterscheidet sich von *D. seminuda* Reuss durch geringere Anzahl der Kammern und Rippen, durch die sehr hervortretende Verdickung der ersten Kammer und durch die nackte Mündung.

32. ***Dentalina Hörnesi*** m.

Taf. IV, Fig. 10.

Testa longissima, modice arcuata, costata, antice aliquantulum incrassata; loculis 9 vel 10 rectis, convexiusculis ideoque inferne et superne strangulatis omnibus, inde a primo altitudine crescentibus, — primo sphaerico, mucronato, — ultimo oblongo-ovali, acuminato; costis octo longitudinalibus perpetuis usque ad aperturam vergentibus; suturis linearibus non admodum constrictis. — Long. = 3 mm. Rarissima.

Die verlängerte nur schwach gebogene Schale ist gerippt, oben nur wenig verdickt und wird aus zehn gewölbten, auf der Axe senkrecht stehenden Kammern gebildet, die anfangs nur so hoch als breit, in der Folge beträchtlich zunehmen, so dass die vorletzte mehr als die doppelte Breite hoch ist. Die erste Kammer ist kugelig und geht in einen Dorn aus, die letzte von länglicher Form endet in eine etwas abgerundete Spitze, woran die Mündung. Von der untern Spitze laufen 8 starke Rippen ohne Unterbrechung über die ganze Schale und vereinigen sich an der letzten Kammer um deren Mündung wieder. Die Einschnürungen zwischen den Kammern sind nicht tief, aber doch bestimmt ausgesprochen.

Diese Art ist durch ihre schlanke Form und die um die Mündung der letzten Kammer wieder vereinigten Rippen sehr gut charakterisirt.

33. ***Dentalina crebricosta*** m.

Taf. IV, Fig. 12 und 13 [1]).

Testa elongata, arcuata, costata, antice aliquantulum incrassata; loculis 8 ad 12 rectis, — inferioribus complanatis et plerumque depressiusculis, — superioribus altioribus convexiusculis, — primo rotundato mucronato, nonnunquam etiam incrassato, — ultimo maximo, lateraliter acuminato; costulis primordialibus 8, 12 vel 16 inde a primo loculo exeuntibus, ultimo loculo evanescentibus, secundariis intersertis auctis; suturis novissimis constrictis; apertura in circulo vitreo radiata. — Long. = $1^1/_5$ ad $1^3/_5$ mm.

Die verlängerte, etwas gebogene, dicht gerippte Schale ist im obern Theile nur mässig verdickt und wird im untern Theile aus cylindrischen, im oberen dagegen aus gewölbten, auf der Axe senkrecht stehenden Kammern gebildet, deren Anzahl bis auf 10 oder 12 steigt. Die erste manchmal verdickte Kammer ist gerundet und geht in eine deutliche, nicht selten ziemlich lange Spitze aus, die 4 bis 5 folgenden cylindrischen Kammern sind eben so hoch als breit, oft sogar etwas niedriger; die übrigen nehmen an Höhe und Dicke zu und die letzte geht in eine seitenständige, mehr oder minder ausgezeichnete Spitze aus, woran die Mündung von Strahlen umgeben, wozu noch ein glasig glänzender Hof kommt. Von der Spitze der ersten Kammer laufen 8, 12 bis 16 feine Rippen aus, die sich an der letzten Kammer verlieren; später schieben sich Nebenrippen ein, deren Anzahl bei solchen Exemplaren grösser ist, an denen die Hauptrippen minder zahlreich sind.

Diese Art unterscheidet sich von *D. Beyrichana* durch die grössere Anzahl der Rippen und Kammern, so wie durch die Beschaffenheit der Mündung.

34. ***Dentalina Ehrenbergana*** m.

Taf. IV, Fig. 14.

Testa elongata, modice arcuata, costata, antice aliquantulum incrassata; loculis numerosis (vel 15), rectis, humilibus, tribus novissimis exceptis, complanatis, — primo altiore rotundato et mucronato — ultimo maximo, convexo, lateraliter acuminato; costulis 16 inde a primo loculo exeuntibus, continuis, tandem ultimo loculo evanescentibus; suturis linearibus, primis vix conspicuis; apertura minima, radiis circumdata. — Long. = 2 mm. Rara.

Die verlängerte, mässig gebogene, etwas dicke Schale wird aus zahlreichen (bis 15) Kammern gebildet, welche mit Ausnahme der ersten durchaus sehr niedrig sind, wodurch die Schale überhaupt ein gedrängtes Ansehen erhält. Die senkrechten Kammern zeigen, mit Ausnahme der drei obersten, nicht die geringste Wölbung; die oval zugerundete erste Kammer geht in einen starken nicht unbeträchtlichen Dorn aus, und beträgt mit Einschluss desselben fast die Höhe der vier folgenden Kammern zusammen. Von der untern Spitze laufen 16 feine Rippen ununterbrochen bis zur Hälfte der letzten Kammer, welche in eine seitenständige kurze, aber doch ausgezeichnete Spitze ausgeht, woran die Mündung von Strahlen umgeben. An dem cylindrischen Theile der Schale sind die Kammern nur durch schwache Nathlinien abgegrenzt.

Diese Art hat Ähnlichkeit mit einer an der Küste von Rimini im adriatischen Meere vorkommenden Art, die sich in meinem Besitze befindet, von der ich indessen nicht weiss, ob sie irgend wo publicirt und abgebildet ist.

---

[1]) Aus demselben Grunde wie bei *Nodosaria multicosta* sind die zarten zahlreichen Rippen nur durch Linien ausgedrückt.

35. ***Dentalina Geinitzana*** m.

Taf. IV, Fig. 15.

Testa elongata, arcuata, costata, antice incrassata; loculis 10 vel 11, — inferioribus planis compressis, — superioribus altioribus, convexiusculis, modice strangulatis, — primo rotundato mucronato, — ultimo lateraliter acuminato; costis 10 vel 12 continuis, obliquis, inde a primo loculo exeuntibus, ultimo loculo evanescentibus; suturis linearibus, primis vix conspicuis, ultimis bene distinctis; apertura radiata. — Long. ad 2 mm. Rara.

Die verlängerte, gebogene, im obern Theile auffallend verdickte Schale ist gerippt und wird aus 10 bis 12 Kammern gebildet, von welchen die untersten cylindrisch und sämmtlich niedriger als breit sind. Von der ersten kugeligen und in einen Dorn ausgehenden Kammer laufen in etwas schiefer Richtung 10 bis 12 Rippen ohne Unterbrechung bis zur Hälfte der letzten Kammer hin, wo sie allmählich verschwinden; die letzte Kammer, etwas convex wie die drei vorhergehenden, geht in eine etwas seitliche, abgestutzte Spitze aus, woran die Mündung von Strahlen umgeben.

Diese Art unterscheidet sich von *D. obliquestriata* Reuss, mit der sie allerdings Ähnlichkeit hat, doch sehr gut durch die Beschaffenheit der Rippen, welche nicht nur feine erhabene Linien sind, durch die umstrahlte Mündung, durch beträchtliche Verdickung im oberen Theile der Schale, durch präcise Abgrenzung der gewölbten Kammern und durch die Beschaffenheit der ersten Kammer, welche durch Grösse die nächst folgenden durchaus nicht überwiegt.

36. ***Dentalina Lamarcki*** m.

Taf. IV, Fig. 16 *a*, *b*.

Testa elongata, arcuata, antice admodum incrassata, costata; loculis 12 ad 14 omnibus plus minusve convexis, praecise strangulatis, pari altitudine ac latitudine, plurimis obliquis, — primo rotundato ut et secundo laevigatis, — ultimo in collum exeunte; costulis circiter sex primordialibus tertio loculo incipientibus, totidem fere secundariis omnibus ultimo loculo evanescentibus; suturis linearibus arcuatis, costulas in inferiore parte testae interrumpentibus; apertura in summo collo nuda. — Long. = $2^3/_5$ mm. Rarissima.

Die sehr verlängerte, im obern Tbeile bedeutend verdickte Schale ist gerippt und wird aus zahlreichen (12—14), meistens sehr convexen, zum grössten Theile schiefen Kammern gebildet, welche nicht breiter als hoch sind. Die erste Kammer glatt, gleich wie die zweite, ist unten abgerundet, die letzte verlängert sich in einen seitenständigen Hals. An der dritten Kammer beginnen einige schwache Rippen, die anfangs von den gebogenen sehr präcisen Näthen unterbrochen erscheinen, sodann sich vermehren, so dass zuletzt bis 12 derselben gezählt werden können, die sich an der letzten Kammer verlieren.

Diese Form unterscheidet sich von andern gerippten Arten durch die beiden ersten glatten Kammern und durch die schwachen und wenigstens im untern Theile der Schale von den einschneidenden Näthen unterbrochenen Rippen.

37. ***Dentalina carinata*** m.

Taf. IV, Fig. 17 *a*, *b* und *c*.

Testa elongata, arcuata, antice incrassata, aliquantulum compressa, costata; loculis 12 vel 13, inferioribus complanatis, novissimis convexis, pari fere altitudine et latitudine, primo rotundato; costis sex validis et acutis continuis, inde a primo loculo exeuntibus, quarum duae laterales validiores. Apertura? — Long. = 2 mm. Rara.

Obgleich es mir bis jetzt noch nicht gelungen ist eine vollständige Schale dieser Form aufzufinden, so habe ich doch geglaubt dieselbe aufnehmen zu sollen, da sie sehr charakteristisch ist. Die verlängerte, etwas gebogene, oben verdickte Schale ist seitwärts etwas zusammengedrückt und mit sechs starken Rippen versehen; sie wird aus 12 bis 13 anfänglich cylindrischen, dann convexen Kammern gebildet, deren Höhe die Breite kaum übersteigt. Von der ersten unten gerundeten Kammer laufen die oben angegebenen Rippen aus, und die beiden Seitenrippen erscheinen als scharfe, stark hervortretende Kiele. Die Form der letzten Kammer und die Modalität der Mündung ist noch nicht beobachtet worden.

Diese Form unterscheidet sich von allen andern mir vorgekommenen gerippten Arten auf das Bestimmteste durch ihre auffallend hervortretenden Seitenrippen und durch die bei ihr stattfindende Zusammendrückung der Schale.

E. GESTREIFTE GEHÄUSE.

38. ***Dentalina obliquestriata*** Reuss.

Zeitschrift der deutschen geol. Gesellschaft, 1851, Heft 1, Taf. 3, Fig. 11, 12.

Nur einzelne Fragmente dieser Art sind von mir bis jetzt aufgefunden worden; sie scheint im Tegel von Lapugy sehr selten zu sein.

39. ***Dentalina pungens*** Reuss.

Zeitschrift der deutschen geol. Gesellschaft, 1851, Heft 1, Taf. 3, Fig. 13.

Einzelne Fragmente wurden aufgefunden, welche Individuen dieser Art angehören dürften.

FRONDICULARIA Defrance.

Bei dem Umstande, dass Alcide d'Orbigny bis zum Jahre 1846 aus europäischen Tertiär-Straten überhaupt nur sehr wenige Arten von *Frondicularia* kannte, musste es für mich um so interessanter sein, im Tegel von Ober-Lapugy bald einige Formen zu entdecken, welche offenbar dieser Gattung angehörten. In dem Jahre 1850 beschrieb ich in den „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“ die von mir bis dahin beobachteten Formen dieser Gattung[1]); seit dem genannten Jahre habe ich noch etliche Formen aufgefunden, die theils bereits bekannt gemachten Arten angehören, theils als neu zu betrachten sind und von denen einige wohl zu den zierlichsten der Gattung gehören. Durch diese Funde ist die Anzahl der vor dem Jahre 1850 aus den österreichischen Tertiär-Straten bekannten Arten nicht unbeträchtlich vermehrt worden.

1. ***Frondicularia monacantha*** Reuss.

Diese von Herrn Prof. Reuss im Jahre 1850 bekannt gemachte Art gehört zu den Seltenheiten in den Straten von Lapugy und es kommen bei der grossen Zerbrechlichkeit der Schale gewöhnlich nur Fragmente vor.

[1]) Verhandlungen und Mittheilungen des Siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften, Jahrgang I, Seite 118 u. s. f.

2. ***Frondicularia speciosa*** m.

Taf. V, Fig. 4..

Testa vitreo-nitenti, tenui, fragili, valde compressa et dilatata, inferne acuminata et rotundata, superne subapiculata, a lateribus carinata, costulis longitudinalibus numerosis in suturis loculorum interruptis ornata; loculis 10 ad 12, — primo rotundo, convexo, magno, — reliquis arcuatis et angulatis; suturis linearibus, costulas interrumpentibus; apertura parva, elliptica. — Long. = 2 mm. Rarissima.

Die Schale dieser höchst interessanten Form ist von glasig glänzendem Gewebe, sehr flach, oberhalb der Mitte sehr ausgebreitet, nach unten lanzettförmig spitzig zulaufend und dann gerundet, nach oben kurz gespitzt an den Rändern gekielt, und wird von 10 bis 12 sattelförmigen oder reitenden Kammern gebildet. Die erste Kammer ist rund, kugelig und ziemlich gross; über dieselbe stellen sich die übrigen in spitzen Bögen, die seitwärts tief herabreichen; die Kammern der obern Hälfte breiten sich seitwärts stark aus. Die flachen Seiten sind mit zahlreichen sehr feinen Rippen verziert, welche durch die Näthe der einzelnen Kammern unterbrochen erscheinen. Die kleine Mündung ist länglich-rund. Durch den bis an die Mündung reichenden, ziemlich breiten Kiel erscheint die Schale wie abgestutzt.

Diese Art unterscheidet sich durch ihre starke seitliche Ausbreitung von andern Formen so gut, dass nicht leicht eine Verwechselung zu befürchten ist.

3. ***Frondicularia Hörnesi*** m.

Taf. V, Fig. 3.

Testa vitreo-nitenti, tenui, fragili, valde compressa, ovali, superne latiore et rotundata, a lateribus carinata, costulis longitudinalibus numerosis aliquantulum divergentibus ornata; loculis 10 ad 12, primo parvo, rotundo et convexo, reliquis arcuatis plus minusve angulatis inferne constrictis; carinis lateralibus ultimo loculo vanescentibus; suturis linearibus, bene distinctis; apertura parva, elliptica. — Long. = 2 mm. Rara.

Die glasig glänzende zarte und sehr zerbrechliche Schale ist sehr flach, von länglich-ovaler Form, oben bedeutend breit, unten dagegen ziemlich zugespitzt, gekielt; von der ersten Kammer laufen sehr zarte, etwas divergirende erhabene Streifen oder Rippchen der Länge nach über die Schale. Die erste Kammer ist klein, rund und kugelig, über derselben thürmen sich die übrigen sattelförmigen wie gewöhnlich über einander; die ersten sind in der Mitte winkelig gebrochen, die letzten dagegen nur gebogen; an ihren Enden findet eine sehr deutliche Einbiegung Statt, welche durch die an den Seiten der Schale hinlaufenden scharfen Kiele um so mehr hervortritt. Diese Kiele verlieren sich an der letzten Kammer mehr und mehr, so dass an der kleinen elliptischen Mündung keine weiteren Spuren von ihnen vorhanden sind. Die Näthe sind ziemlich präcis und deutlich.

Diese Art unterscheidet sich von *Fr. Lapugyensis*, deren Beschreibung sogleich folgt, sehr gut durch die beträchtlichere Breite im oberen Theile, durch die starken Einbiegungen der Kammern an ihren untern Enden und durch das allmähliche Abnehmen der Kiele an der letzten Kammer.

4. ***Frondicularia Lapugyensis*** m.

Taf. V, Fig. 1, 2.

Testa vitreo-nitenti, tenui, fragili, elongato-ovata vel elliptica, valde compressa, nonnunquam costulis longitudinalibus aliquantulum divergentibus ornata, a lateribus carinata; carina ultimo loculo obtruncata; loculis 9 vel 10, — primo sphaerico vel ovali, minimo, — reliquis arcuatis,

profunde decurrentibus in medio vix angulatis, ultimis vel obtruncatis vel rotundatis; suturis linearibus, bene impressis; apertura minima, elliptica. — Long. = 1²/₅ mm. Rara.

Die Schale ist von glasig glänzendem Gewebe, sehr flach, länglich-oval oder elliptisch, im ersten Falle blos unten, im letztern dagegen unten und oben spitz zulaufend, an den Seiten gekielt und wird von 9 bis 10 sattelförmigen Kammern gebildet. Die erste Kammer ist kugelig oder oval und klein, die zwei nächsten umfassen die erste stark und sind oben eher gerundet als winkelig gebrochen, die folgenden, welche an den Seiten der Schale tief hinablaufen, ohne sich einzubiegen, sind oben theils spitzoval, theils etwas abgestutzt; die Nathlinien sind sehr deutlich. Ein Kiel beginnt an der untern Spitze der Schale und läuft als schmales einfassendes Band an den Seitenrändern hinauf, um an dem obern Ende der Schale plötzlich abzubrechen. Die Mündung ist klein und länglich-rund.

Diese Art unterscheidet sich von *Fr. monacantha* Reuss, von dem Mangel eines Dornes abgesehen, durch ihre Gesammtform, da sie unten spitz ist, während *Fr. monacantha* unten stets breiter ist als oben; von *Fr. Hörnesi* unterscheidet sie sich, wie schon erwähnt, durch geringere Breite im obern Theile, durch die an den Enden nicht eingebogenen, sondern an den Seiten der Schale tief hinablaufenden Kammern und durch die Beschaffenheit des Kieles, der sich an den Seitenrändern der letzten Kammer nicht allmählich verliert, sondern am höchsten Punkte der Schale plötzlich abbricht.

5. ***Frondicularia venusta*** m.

Taf. V, Fig. 5.

Testa vitreo-nitenti, tenui, fragili, elongato-elliptica, valde campressa, superne obtruncata; loculis 8 vel 9, — primo convexo, rotundo, reliquis acutangulis, lateribus arcuatis, carinatis; apertura minima, elliptica. — Long. = 2 ad 2²/₅ mm. Rarissima.

Die sehr flache Schale ist von glasig glänzendem Gewebe, im Ganzen länglich-elliptisch, sehr dünn und daher sehr zerbrechlich und wird aus einer verhältnissmässig nicht kleinen, runden, und aus 7 bis 8 gebrochenen Kammern gebildet. Die erste Kammer ist kugelig und oben von einem schmalen Bande eingefasst, die ihr folgende halbumfassend; die übrigen, unter sehr spitzen Winkeln gebrochen, breiten sich seitwärts ein wenig aus, worauf sie sich an ihren unteren Enden wieder zusammenziehen, dabei umfassen sie einander sehr stark, so dass die oberste Kammer seitwärts bis $\frac{2}{3}$ der Schale hinabreicht. Jede Kammer wird an ihren Seiten von schmalen Kielen, die nach oben ein wenig stärker werden, eingefasst, bei dem Fortbaue der Schale stellen diese Kiele sich fortwährend als vertiefte breite Näthe dar. Die kleine Mündung ist länglichrund.

Ich glaubte diese Form von *Fr. Lapugyensis* trennen zu müssen, da sie sich von derselben theils durch die Gestalt der Kammern, theils durch die ganz eigenthümliche Einfassung jeder einzelnen Kammer sehr gut unterscheidet. Andererseits fehlt ihr auch der die ganze Schale in der Weise selbstständig einfassende Kiel, wie er bei *Fr. Lapugyensis* vorhanden ist.

6. ***Frondicularia pulchella*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel (Frondicularien), Taf. III, Fig. 1 *a*, *b* und *c*.

Testa modice elongata, fragili, compressa, antice posticeque attenuata, longitudinaliter costata; costulis sex prominentibus, non interruptis, duabus marginalibus, reliquis juxta positis; loculis 10, primo minimo rotundo globulari, subsequenti annulari, reliquis angulatis depressis, novissimo denique altiore antice rotundato; apertura terminali, minima, nuda. — Long. = 1 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 1. Jahrg. Seite 119 und Tafel III, Fig. 1.

7. ***Frondicularia Acknerana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel, Taf. III, Fig. 2 *a*, *b* u. *c*.

Testa elongata, postice attenuata et modice compressa, antice latiore et compressiore tandem attenuata, longitudinaliter costata; costulis sex continuis, duabus marginalibus, reliquis juxta positis; loculis 14 ad 16, — primo globulari, proximis depressis, planis, vix angulatis, — superioribus latioribus et altioribus ad suturas strangulatis, praecise angulatis, — ultimo altissimo, antice rotundato; apertura centrali, parva, radiis circumdata. — Long. = 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 1. Jahrg. Seite 120 und Tafel III, Fig. 2 dieses Jahrganges.

8. ***Frondicularia tricostata*** Reuss.

Reuss: Neue Foraminiferen aus den Tertiär-Schichten des österr. Beckens, Taf. I (XCVI), Fig. 12.

Diese von Herrn Prof. Reuss aufgestellte Art wurde auf Schalen aus dem Lapugyer Tegel begründet.

9. ***Frondicularia digitalis*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel, Taf. III, Fig. 3 *a*, *b*, *c*, 4 *a*, *b*, *c*, 5 *a*, *b*, *c*, 6 *a*, *b* u. 9.

Frond. affinis Neugeb.	Seite 121,	Taf.	III,	Fig. 4 *a*, *b*, *c*.	}	Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel.
„ *Bielzana* Neugeb.	„ 121,	„	III,	„ 5 *a*, *b*, *c*.		
„ *rostrata* Neugeb.	„ 122,	„	III,	„ 6 *a*, *b*.		
„ *semicostata* Neugeb.	„ 123,	„	III,	„ 9.		

Testa elongata, compressa, antice attenuata, postice attenuata et apicata, longitudinaliter costata, costulis 10 continuis, duabus lateralibus usque ad aperturam decurrentibus, reliquis ultimo loculo (singulis nonnunquam prius) vanescentibus; loculis numerosis (20 vel etiam pluribus) depressis, prioribus humilioribus, angulatis, — primo minimo sphaerico, — ultimo plus minus protracto, attenuato et rotundato; apertura centrali, parva, rotunda, nuda. — Long. = 2mm. Frequens.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“ 1. Jahrg. S. 120 bis 123. Seit dem Jahre 1850 habe ich so viele Zwischenformen aufgefunden, dass die oben angeführten Arten nicht mehr als eben so viele selbstständige beibehalten werden konnten; ich vereinige sie daher unter der gemeinschaftlichen Benennung „*Frondicularia digitalis*“. Die hieher gehörigen Formen werden häufig angetroffen.

10. ***Frondicularia diversicostata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel, Taf. III, Fig. 7 *a*, *b* und 8 *a*, *b*.

Testa elongata, compressa, antice attenuata et rotundata, postice attenuata et apicata, longitudinaliter costata; costulis 10 continuis, duabus marginalibus, hisque utroque latere proximis magnitudine praevalentibus et ad aperturam usque decurrentibus, — quatuor reliquis (utroque latere binis) tenuioribus ultimo loculo decrescentibus et tandem vanescentibus, loculis numerosis (20), angulatis, depressis, prioribus humilioribus, — primo minimo sphaerico, ultimo protracto, attenuato et rotundato; apertura centrali, parva, rotunda, non radiata. — Long. = 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“ 1. Jahrg. Seite 122 und Tafel III, Fig. 7 *a*, *b* und Fig. 8 *a*, *b* dieses Jahrganges.

11. ***Frondicularia tenuicostata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel, Taf. III, Fig. 10 *a* und *b*.

Testa elongata, nitida, admodum fragili, compressa, postice attenuata et obtuse apicata, longitudinaliter costata; costulis 14, continuis, tenuibus, duabus marginalibus; loculis 12 ad 15 depressis, — primis humilibus angulatis, — primo minimo, sphaerico, — ultimo rotundato-angulato; apertura centrali parva, rotunda, non radiata. — Long. = 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 1. Jahrg. Seite 123 und Tafel III, Fig. 10 *a* und *b* dieses Jahrganges.

12. ***Frondicularia cultrata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel, Taf. IV, Fig. 11 *a*, *b*.

Testa modice elongata, compressa, lata, antice attenuata et detruncata, postice attenuata et rotundato-apicata, costata; costis 10 continuis, duabus lateralibus admodum prominentibus, carinas testae formantibus, usque ad aperturam decurrentibus, — reliquis tenuioribus ultimo loculo vanescentibus; loculis 15 vel pluribus, depressis, — primo minimo sphaerico, — proximis arcuatis, — novissimis angulatis, — ultimo denique altiore obtruncato; apertura parva, rotunda, non radiata. — Long. = $1^2/_5$ mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 1. Jahrg. Seite 124 und Tafel IV, Fig 11 *a* und *b* dieses Jahrganges.

13. ***Frondicularia irregularis*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel, Taf. IV, Fig. 12.

Testa elongata, compressa, lateribus obtruncata, inferne attenuata et obtuse apicata, superne vix attenuata, costulata; costulis linearibus 16 ad 20, quatuor marginalibus, aliquot secundariis, sine lege sese inserentibus, ultimo loculo vanescentibus, in superiore parte testae suturis aliquantulum constrictis; loculis numerosis (15 vel pluribus) humilibus omnibus, — primo rotundo et convexo, — proximis arcuatis, parum distinctis et ob magnum costularum numerum vix conspicuis, — novissimis angulatis in suturis constrictis, — ultimo antice attenuato, compresso-convexo, rotundato; apertura centrali parva, rotunda et nuda. — Long. = 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“ 1. Jahrg. Seite 124 und Taf. IV, Fig. 12 dieses Jahrganges.

AMPHIMORPHINA Neugeboren.

Dieses von mir im Jahre 1850 aufgestellte Geschlecht[1]) schliesst sich im Allgemeinen jenen Geschlechtern an, welche zwei Geschlechtstypen in sich vereinigen. Wenn die Mannigfaltigkeit der Foraminiferen-Formen an sich schon gross ist, so wird dieselbe noch vermehrt dadurch, dass manche Genera die Eigenthümlichkeit aufweisen, dass sie bei fortschreitendem Wachs-

[1]) Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“ 1. Jahrg. Seite 125.

thume in Formen übergehen, welche ihrem Jugendzustande völlig fremd sind. Bei *Amphimorphina* tritt der Fall ein, dass anfängliche Frondicularien im Verlaufe ihres Wachsthumes und ihrer Fortbildung in die Formen von Nodosarien übergegangen sind.

Dass ich keinen Missgriff that, als ich dieses Geschlecht aufstellte, habe ich mit besonderer Befriedigung daraus entnommen, dass Herr Dr. Reuss die generelle Benennung „*Amphimorphina*“ für die von mir zuerst beobachteten und von ihm in den Tertiärschichten Mährens im Jahre 1853 ebenfalls aufgefundenen Foraminiferen beibehalten hat.

1. ***Amphimorphina Hauerana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 2. Artikel, Taf. IV, Fig. 13 und 14.

Testa elongata, recta, postice compressa et attenuata, antice tereti et cylindrica, costata; costis principalibus sex, duabus marginalibus, reliquis juxta positis, — secundariis 2 vel pluribus, — omnibus continuis usque ad aperturam decurrentibus; loculis 15 vel etiam pluribus, — primo rotundo et parvo, — proxime sequentibus planis partim arcuatis, partim angulatis, — novissimis convexis ellipticis, neque angulatis neque arcuatis, — ultimo antice rotundato, — apertura terminali, parva, rotunda. — Long. = $2^3/_5$ mm. Non rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 1. Jahrg. Seite 127 und Tafel IV, Fig. 13 und 14 dieses Jahrganges. Von den unter Fig. 15 und 16 derselben Tafel noch abgebildeten Fragmenten gehört Fig. 15 ohne Zweifel ebenfalls zu *Amph. Hauerana;* Fig. 16 dagegen dürfte einer andern Art angehören, da einerseits die anfängliche Anzahl der Rippen sich nicht vermehrt, andererseits die Schale auch in dem obern Theile etwas abgeplattet erscheint.

LINGULINA D'ORBIGNY.

1. ***Lingulina rotundata*** d'Orb.

Diese von d'Orbigny zuerst aus dem Badener Tegel beschriebene Art scheint in den Schichten von Lapugy ziemlich selten zu sein, da ich bis jetzt nur wenige Exemplare aufzufinden Gelegenheit hatte.

2. ***Lingulina costata*** d'Orb.

Auch von dieser, auf Wiener Funde gegründeten Art sind mir bis jetzt nur wenige Exemplare vorgekommen.

3. ***Lingulina papillosa*** m.

Taf. V, Fig. 6 *a* und *b*.

Testa recta, oblonga, antice modice incrassata, compressa, vitrea attamen scabra et papillosa; loculis tribus convexiusculis, — primo rotundato, — ultimo subacuminato; suturis aliquantulum incidentibus, vix conspicuis; apertura centrali, lineari et arcuata. — Long. = 1 ad $1^2/_5$ mm. Non rara.

Die gerade Schale ist etwas länglich, oben nur wenig dicker als unten, breitgedrückt, an den Seiten manchmal kantig, von glasigem Gewebe, auf der Oberfläche jedoch uneben und warzig; sie wird aus drei convexen mehr oder minder breitgedrückten Kammern gebildet, deren erste unten gerundet, und letzte etwas

zugespitzt ist. An der Zuspitzung der letzten Kammer befindet sich im Centrum die Mündung in gebogener Spaltform. Die Näthe sind etwas einschneidend, jedoch kaum von dem übrigen Gewebe der Schale zu unterscheiden.

Die kleinen Wärzchen, mit welchen die Schale dicht besetzt ist, sind für diese Art ein vortrefflicher Anhaltspunkt.

VAGINULINA D'ORBIGNY.

1. ***Vaginulina Badenensis*** d'Orb. var.

Taf. V, Fig. 7 *a*, *b*, 8 und 9.

Von dieser Art habe ich ausser der im Wiener Becken aufgefundenen typischen Form einige Varietäten aufgefunden, welche ich unter Fig. 7, 8 und 9 abgebildet habe. Die erste unterscheidet sich von der Wiener Form dadurch, dass die Näthe heraustreten, wie das unter Fig. 7, *b* besonders abgebildete Stückchen derselben sehr deutlich zeigt; die zweite unter Fig. 8 abgebildete Varietät ist in ihrem untern Theile an der Rückenseite mit Dornen verziert; die dritte endlich, unter Fig. 9, hat ganz entgegengesetzt gebogene Nathlinien, das aufgefundene Exemplar ist offenbar eine Jugendform, da sie nur vier Kammern hat.

2. ***Vaginulina Brukenthali*** m.

Taf. V, Fig. 10 *a* — *d*.

Testa laevigata, nitenti, elongata, modice arcuata, tota compressa, marginibus carinata, inferne attenuata, oblique rotundata; loculis 12 ad 15 obliquis et humilibus omnibus, inferioribus admodum obliquis, — primo cultrato-carinato, ex carina bi- vel tricaudato, — novissimo obtruncato, rotundato, acutangulo; suturis vitreo-nitentibus, — inferioribus arcuatis, — novissimis inflexis et aliquantulum impressis; apertura rotunda, radiata in circulo vitreo maximo. — Long. = $1^5/_{10}$ mm. Rarissima.

Die glatte, glänzende, verlängerte, wenig gebogene Schale ist in ihrer ganzen Länge zusammengedrückt, an den Rändern gekielt, unten schief abgestutzt und gerundet und wird aus 12 bis 15 niedrigen und schiefen Kammern gebildet, von welchen die ersten sehr schief sind. Die erste Kammer ist unten mässig convex und geht in einen scharfen Kiel über, aus welchem zwei bis drei Stacheln hervortreten, die letzte ist wie gewöhnlich schief abgestutzt und an den Rändern abgerundet. Die Näthe, zu deren beiden Seiten die Schale glasig glänzend erscheint, sind im untern Theile der Schale gebogen, im obern gewunden und etwas eingedrückt. Die Mündung ist rund, von Strahlen und einem grossen glasig glänzenden Hofe umgeben.

Diese Art unterscheidet sich von *Vaginulina Badenensis* durch die Beschaffenheit der ersten Kammer, welche durchaus nicht kugelig ist, durch die sehr schiefen Kammern im untern Theile der Schale und durch den scharfen Kiel, welcher die erste Kammer umfasst, und aus welchem je zwei oder drei Dornen hervortreten.

3. ***Vaginulina costata*** m.

Taf. V, Fig. 11.

Testa recta, modice elongata, costata, superne aliquantulum compressa; loculis tribus obliquis, convexiusculis, — primo inferne oblique rotundato, mucronato, — ultimo convexo, oblique obtruncato, acutangulo; costis 12, ultimo loculo vanescentibus; suturis obliquis, incidentibus; apertura in rostro marginali minima, rotunda, nuda. — Long. = $^6/_{10}$ mm. Rarissima.

Die gerade, wenig verlängerte Schale ist gerippt, oben ein wenig breitgedrückt und wird aus drei schiefen, etwas convexen Kammern gebildet, von welchen die erste unten schief gerundet ist und in einen Dorn oder Stachel ausgeht, die letzte ist convex, schief abgestutzt und spitzwinkelig. Von der untern Spitze laufen 12 Rippen aus, die sich an der letzten Kammer verlieren. Die Näthe sind schief, etwas einschneidend. Die kleine runde Mündung an dem schnabelartigen Ausgange der letzten Kammer ist nackt.

Diese Form scheint mir nur ein Jugendexemplar zu sein; Schalen mit mehr Kammern konnte ich indessen bis jetzt nicht auffinden.

PSECADIUM Reuss.

1. ***Psecadium simplex*** m.

Taf. V, Fig. 13.

Testa laevigata, nitenti, oblique ovali, antice acuminata, loculis quatuor obliquis, ad spiram dispositis, — quarto maximo, apiculato; suturis arcuatis, linearibus, nitentibus; apertura minima in apice radiis ornata et circulo vitreo circumdata. — Long. = $^{6}/_{10}$ mm. Rarissima.

Die Schale, von glänzendem Gewebe, ist schief-oval, mit dem dickern Ende unten, mit der Zuspitzung oben, und wird aus vier schiefen, spiralig angeordneten, an Höhe wachsenden Kammern gebildet; die letzte Kammer, ungleich grösser als eine der vorhergehenden, ist oben zugespitzt und glasig glänzend. Die kleine runde Mündung ist von Strahlen umgeben.

Diese Form hat auf den ersten Anblick im Allgemeinen Ähnlichkeit mit den Globulinen; doch gehört sie keiner Art dieses Geschlechtes an, da die Kammern sehr deutlich in ihrer spiralen Anordnung erkannt worden sind. Dass sie mit *Cristellaria obvelata* Reuss nicht eins und dasselbe sei, beweist die Form der Näthe, da deren Biegung ganz die entgegengesetzte ist.

2. ***Psecadium ellipticum*** m.

Taf. V, Fig. 14.

Testa laevigata, nitida, oblique elliptica, antice posticeque acuminata; loculis 6 vel 7, — tribus inferioribus ad spiram dispositis, — tribus novissimis fere rectis, — ultimo dimidiam partem testae comprehendente, apiculato, in apice vitreo-nitido; suturis linearibus lucidis; apertura minima rotunda et radiata. — Long. = $^{6}/_{10}$ mm. Rarissima.

Die glatte und glänzende Schale ist schief-elliptisch, oben und unten zugespitzt und wird aus 6 bis 7 Kammern gebildet, von welchen die drei oder vier ersten eine spirale Anordnung haben und triangulär sind, die drei obern fast senkrecht auf der Axe stehen und die letzte fast die Hälfte der Schale einnimmt. Diese geht in eine eminente, glasig glänzende Spitze aus, woran die kleine runde Mündung von Strahlen umgeben. Die Näthe sind glasig glänzende Linien.

MARGINULINA d'Orbigny.

Von den im Ganzen nur wenigen Marginulinen, welche aus dem Wiener Tertiär-Becken durch die Herren d'Orbigny und Czjzek bis zum Jahre 1851 bekannt gemacht worden waren, habe ich in dem Tegel von Lapugy bis jetzt drei aufzufinden Gelegenheit gehabt; ungleich grösser war jedoch die Anzahl solcher Formen, welche sich unter die mir zugänglichen publicirten nicht subsummiren liessen; dazu kamen noch Schalen, die auch nicht die

geringsten Anfänge einer spiralen Aufrollung aufzuweisen hatten, jedoch in Folge der stets randständigen Spitze ihrer letzten grossen und convexen Kammer nur unter die Marginulinen eingereiht werden konnten. Ich hatte bereits im Jahre 1851 diese Formen in Nummer 7, 8 und 9 des zweiten Jahrganges der „Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereines für Naturwissenschaften“ bekannt gemacht und abgebildet; fortgesetzte Forschungen haben mich überzeugt, dass manche von den damals durch mich aufgestellten Arten eingezogen und mit anderen theils schon von früher her bestandenen, theils von mir creirten vereinigt werden mussten. Als später aufgefundene neue Art habe ich nur eine hinzufügen können.

A. GLATTE GEHÄUSE.

1. ***Marginulina dubia*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel (Marginulinen), Taf. IV, Fig. 1.

Testa laevigata, nitida, elongata, vix arcuata, superne modice incrassata, inferne rotundata, loculis 6 ad 8 obliquis, 4 vel 5 prioribus planis, reliquis in dorso aliquantulum convexiusculis; ultimo magnitudine praevalente, convexo, acuminato; spira adhuc nulla, suturis tamen inde a prima magis magisque obliquioribus; apertura in acumine marginali minima, radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = $2^5/_{10}$ ad 3 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 120 und Taf. IV, Fig. 1 dieses Jahrganges. Hindeutungen auf eine, jedoch sehr vage spirale Anordnung der Kammern bestehen bei dieser Art darin, dass die schiefen Kammern an der convexen Seite der Schale immer etwas höher sind als an der concaven; die entschieden randständige Spitze nach der convexen Seite der Schale lässt es jedoch ausser Zweifel, dass diese Form unter den Marginulinen gehöre.

2. ***Marginulina incerta*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 2.

Testa laevigata, nitida, elongata, gracili, parum inflexa, superne modice incrassata, inferne oblique rotundata; loculis 8, primis humilioribus et complanatis, reliquis altioribus et in dorso convexiusculis, ultimo altissimo et maximo, convexo et acuminato, obliquis omnibus praesertim prioribus; spira vel nulla; suturis arcuatis; apertura in apice marginali minima, radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = 2 ad $2^5/_{10}$ mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 121 und Fig. 2 auf Taf. IV dieses Jahrg.

3. ***Marginulina attenuata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 3 — 9.

Margin. Orbignyana Neugeb. Seite 122, Taf. IV, Fig. 7
„ *Reussana* Neugeb. „ 123, „ IV. „ 8.
„ *irregularis* Neugeb. „ 125, „ IV, „ 9.
} Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel.

Testa laevigata, nitida, elongata gracili, plus minus inflexa, superne aliquantulum incrassata, inferne oblique rotundata; loculis 9—12 plerumque admodum obliquis, — primis complanatis, humilibus spirae initium praebentibus, — superioribus altioribus in dorso praesertim convexiusculis, —

ultimo maximo, convexo, oblique ovali; suturis vel arcuatis vel inflexis; apertura radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = 3 mm. Non rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 121, 122, 123 und 125 und Taf. IV, Fig. 4—9.

4. ***Marginulina Fichtelana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 19.

Testa laevigata, parum elongata, modice inflexa, superne incrassata, inferne oblique rotundata, compressa; loculis 7 vel 8, excepto ultimo, complanatis et humilibus, — tribus vel quatuor prioribus spirae initium praebentibus, — reliquis admodum obliquis, — novissimo maximo et convexo oblique ovali; suturis arcuatis; apertura in acumine marginali minima, radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 124 und die oben angeführte Figur auf Tafel IV dieses Jahrganges.

5. ***Marginulina anceps*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel Taf. IV, Fig. 10.

Testa laevigata, elongata, arcuata, superne aliquantulum incrassata, inferne rotundata, vix compressa; loculis 7 vel 8, excepto ultimo, planis, — primis humilibus, spirae initium constituentibus, — reliquis admodum obliquis altioribus, novissimo maximo, convexo, oblique ovali; suturis arcuatis; apertura in apice marginali radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 125 und Fig. 10 auf Taf. IV dieses Jahrg.

6. ***Marginulina inflexa*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 11.

Testa laevigata, modice elongata, admodum arcuata, superne vix incrassata, inferne rotundata, vix compressa; loculis sex obliquis, — duabus vel tribus prioribus ad spirae modum constitutis, — tribus novissimis convexiusculis, — ultimo aliquantum acuminato, suturis inflexis; apertura in acumine laterali radiata et vitreo circulo circumdata. — Long. = $1^{5}/_{10}$ mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 126 und Fig. 11 auf Taf. IV dieses Jahrg.

7. ***Marginulina inversa*** m.

Foraminiferen von F. Lagugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 12 — 14 und Taf. V, Fig. 1 und 2.

Margin. inepta Neugeb. Foraminiferen von Lagugy, 3. Artikel, Seite 127, Taf. IV, Fig. 14.

Testa laevigata, nitida, admodum elongata, arcuata, superne aliquantulum incrassata, inferne rotundata et compressa; loculis 9 vel 10, — prioribus 5 vel 6 planis, humilibus, obliquis, spirae initium praebentibus, — reliquis convexiusculis altis et rectis, — ultimo altissimo, oviformi, in apicem ad concavitatem exeunte; suturis inferioribus oblique arcuatis; apertura radiata in circulo vitreo. — Long. = 3 ad $3^{5}/_{10}$ mm. Non quidem rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 126 und 127 und Taf. IV, Fig. 12—14 und Taf. V, Fig. 1 und 2 dieses Jahrganges.

8. ***Marginulina deformis*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. V, Fig. 3.

Testa laevigata et nitida, modice elongata, crassa, inflexa, superne vix incrassata, inferne rotundata, parum compressa; loculis 4 vel 5 obliquis, — primo et secundo humilibus cum spirae rudimento, — reliquis altis ad suturas strangulatis, ideoque convexis, — novissimo ad marginem apicato; suturis inflexis; apertura radiis circumdata. — Long. = 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 127 und Fig. 3 auf Taf. V dieses Jahrg.

9. ***Marginulina Ehrenbergana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 15.

Testa laevigata et nitida, modice elongata, inflexa, inferne oblique rotundata, vix compressa; loculis 8, — tribus prioribus humilibus, planis, ad spirae modum constitutis, — reliquis convexiusculis altioribus, — novissimo convexo in apicem marginalem exeunte; suturis obliquis et quodammodo arcuatis; apertura radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = 2 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 128 und Fig. 15 auf Taf. IV.

10. ***Marginulina similis*** d'Orb.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 16, 17 und 18; Taf. V, Fig. 8.

Margin.	*Bronnana* Neugeb.	Seite 128,	Taf. IV,	Fig. 16.	}	Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel.
„	*eximia* Neugeb.	„ 129,	„ IV,	„ 17.		
„	*Partschana* Neugeb.	„ 131,	„ IV,	„ 18.		
„	*pygmaea* Neugeb.	„ 132,	„ V,	„ 8.		

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, Seite 128, 129, 131 und 132, Taf IV, Fig. 16—18, und Taf. V, Fig. 8. Betrachtet man die d'Orbigny'sche Abbildung eines Exemplares aus dem Wiener Becken als typische Form der Art, so hat der Anschluss der von mir abgebildeten Formen an dieselbe wohl keine Schwierigkeit; das wichtigste Unterscheidungsmerkmal bleibt nur die umstrahlte Mündung, welche die Lapugyer Formen aufweisen, während nach d'Orbigny dieses Merkmal bei den Wiener Formen nicht vorhanden war; möglich übrigens, dass die Wiener Exemplare in dieser Beziehung nicht vollkommen gut conservirt waren.

11. ***Marginulina abbreviata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. V, Fig. 4.

Testa laevigata, abbreviata, inflexa, vix compressa, superne crassiore, inferne obtruncata vel obtuse rotundata; loculis tribus obliquis rudimenta spirae praebentibus, — primo humilimo a secundo sutura lineari tantummodo diviso, — ultimo maximo, convexo, apiculato, a praecedente sutura incidente disjuncto; sutura inferiore arcuata, superiore inflexa; apertura minima, radiis circumdata. — Long. 2 mm. (Long.: Latit = 6 : 5). Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 129 und Fig. 4 auf Taf. V.

12. ***Marginulina Hauerana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. V, Fig. 5.

Testa laevigata, abbreviata, inflexa, compressiuscula, inferne crassiore et rotundata; loculis quinque, — tribus prioribus spiram constituentibus, planis et humilibus, — quarto convexo maximo spirae imposito, — quinto minore, obliquo, apiculato, a praecedente sutura profunda diviso; suturis arcuatis; apertura in apicula marginali minima, radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. = $2^5/_{10}$ mm. (Long. : Lat. = 3 : 2). Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 130 und Fig. 5 auf Taf. V.

13. ***Marginulina Haidingerana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. V, Fig. 6.

Testa laevigata et nitida, abbreviata, inflexa, inferne rotundata, compressiuscula postice praesertim; loculis sex, — novissimo maximo et convexo et marginaliter apiculato, — praecedentibus humilibus et planis triangularibus; spira bene expressa; suturis arcuatis; apertura radiata et circulo vitreo circumdata. — Long. 1 mm. (Long. : Lat. = 5 : 2). Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 130 und Fig. 6 auf Taf. V.

14. ***Marginulina Cžižekana*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. V, Fig. 7.

Testa laevigata et nitida, modice elongata, inflexa, antice incrassata, compressiuscula; loculis sex obliquis, novissimo excepto, humilibus et planis, — tribus prioribus inaequalibus, triangularibus, spirae initia praebentibus, — novissimo maximo, convexo, oblique ovali, marginaliter apiculato; suturis inferioribus arcuatis, superioribus inflexis, apertura radiata. — Long. = $1^5/_{10}$ mm. (Long. : Lat. = 2 : 1). Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 131 und Taf. V, Fig. 7.

15. ***Marginulina vagina*** m.

Taf. V, Fig. 12.

Testa laevigata, nitida, oblonga, modice inflexa, compressa et lata, marginibus angulata, postice rotundata, antice oblique obtruncata et rotundata, subacuminata; loculis 8 obliquis, — primis initia spirae constituentibus, — ultimo ad marginem centralem subacuminato vel mammillato; suturis linearibus inflexis; apertura in mammillâ vitreo-nitenti rotunda, radiata. — Long. = 1 mm. Rarissima.

Die glatte und glänzende, etwas verlängerte Schale ist breitgedrückt, an den Seiten gekantet, von der Form einer kurzen breiten Scheide oder Schote, unten gerundet, oben schief abgestutzt und abgerundet, und geht in eine unförmliche, schiefe, grosse, fast randständige Zitze aus; sie wird von acht schief angeordneten Kammern gebildet, von welcher die drei ersten den Anfang einer Spira bilden, — die letzte geht in die erwähnte grosse unförmliche Zitze von glasigem Gewebe aus, woran die Mündung von Strahlen umgeben. Von den vorletzten Kammern sieht man an dem Bauchrande noch einen Theil des glasigen Hofes um die Zitze.

Es ist diese Form eine Mittelform zwischen *Marginulina* und *Cristellaria*; wäre die Spirale deutlicher ausgesprochen, so würde man sie nach der Form der letzten Kammer, abgesehen von der ungewöhnlich grossen Zitze, ohne Bedenken zu *Cristellaria* rechnen können. Diese Zitze ist mit ein Grund, dass ich die in Rede stehende Form noch zu *Marginulina* zähle.

16. ***Marginulina inflata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. V, Fig. 9.

Testa laevigata, modice elongata, arcuata, inferne oblique rotundata et compressa; loculis sex obliquis, excepto novissimo humilibus et planis, tribus prioribus spirae rudimenta exhibentibus, novissimo maximo, convexo, oblique ovali, apiculato; suturis arcuatis linearibus; apertura minima radiata. — Long. = $2^5/_{10}$ mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 132 und Taf. V, Fig. 9.

17. ***Marginulina variabilis*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. V, Fig. 10 — 16, 18, 19.

Margin. Acknerana Neugeb.	Seite 133, Taf. V, Fig. 15 und 16.	}	Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel.
„ *erecta* Neugeb.	„ 135, „ V, „ 18.		
„ *intermedia* Neugeb.	„ 140, „ V, „ 19.		

Testa laevigata, nitida, plus minus inflexa, postice compressiuscula et dilatata, inferne oblique et irregulariter rotundata; loculis 5 ad 7 irregularibus et plus minus convexis, — tribus prioribus triangularibus spirae initia exhibentibus, — reliquis obliquis plerumque magnitudine decrescentibus, — novissimo ovali et ad marginem mammillato, nonnunquam magnitudine praevalente; suturis inflexis; apertura in mammilla vitreo-nitente radiata. — Long. = 3 mm. Frequens.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 133, 134, 135, 140 und die Figuren 10 bis 16, dann 18 und 19 der V. Tafel dieses Jahrganges. Während einige der hieher gehörigen Schalen deutlich und ziemlich stark S-förmig gewunden sind, erscheinen andere nur schwach gewunden, andere gebogen und noch andere sogar gerade projicirt. Die dieser Art angehörigen Formen sind überhaupt sehr polymorph, doch hängen die Extreme durch sehr viele Mittelformen zusammen.

18. ***Marginulina carinata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3 Artikel, Taf. V, Fig. 17 *a* und *b*.

Testa laevigata, nitida, arcuata, compressa, partim carinata, inferne rotundata; loculis quinque obliquis, — tribus prioribus planis, triangularibus spirae initia exhibentibus, — tertio et quarto in ventre carinatis, — novissimo convexo, oblique ovali, ad marginem mammillato; suturis inflexis; apertura in mammilla vitreo-nitenti radiata. — Long. = 2 mm. Non rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 134, Taf. V, Fig. 17 *a* und *b*.

B. GERUNZELTE GEHÄUSE.

19. ***Marginulina rugosa*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 20.

Testa nitida, longitudinaliter corrugata, elongata, inflexa, postice oblique rotundata, antice incrassata; loculis 5, obliquis omnibus, ab infimo altitudine crescentibus, — duobus inferioribus planis, — reliquis convexiusculis, — novissimo convexo, ovali, ad marginem mammillato; suturis inflexis; apertura in mammilla vitreo-nitente radiata. — Long. = 2 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 141 und Taf. IV, Fig. 20.

C. BEWEHRTE GEHÄUSE.

20. ***Marginulina hirsuta*** d'Orb.
21. ***Marginulina cristellaroides*** Czjžek.
22. ***Marginulina hispida*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 21 — 23.

Margin. aculeata Neugeb. Seite 142, Taf. IV, Fig. 21.
„ *pustulosa* Neugeb. „ 144, „ IV, „ 23.
„ *affinis* Neugeb. „ 144.

} Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel.

Testa modice elongata plus minus inflexa, spinis plus minus acutis vel papillis numerosis armata, postice compressa, inferne oblique rotundata; loculis 5 ad 8 obliquis, — inferioribus obsoletis vix conspicuis, spirae initia exhibentibus, — tribus novissimis convexiusculis, — ultimo sphaerico vel ovali, ad marginem apiculato, seminudo; apice vitreo-nitenti truncata; suturis inferioribus arcuatis vix conspicuis, superioribus plerumque inflexis, nudis; apertura radiata. — Long. = 2 ad $2^{5}/_{10}$ mm. Non rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 142 und 144 und Fig. 21 bis 23 auf Tafel IV dieses Jahrganges. Die Dornen sind am unteren Theile der Schale viel dichter als am oberen, wo dieselben meistens etwas abgestumpft oder gar nur zu kleinen Wärzchen verkümmert erscheinen.

23. ***Marginulina echinata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 25.

Testa modice elongata, inflexa, spinis admodum prominentibus numerosis conferta, postice valde compressa ideoque latiore, inferne rotundata, et ex compressione quasi carinata; loculis incerti numeri, — prioribus externe minime distinctis, — superioribus convexiusculis, — novissimo sphaerico, apiculato, superne nudo; suturis arcuatis (?); apertura in apice vitreo-nitenti radiata. — Long. = 2 mm. Rarissima.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.,“ 2. Jahrg. Seite 145, Taf. IV, Fig. 25 dieses Jahrganges.

24. ***Marginulina agglutinans*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. IV, Fig. 24.

Testa elongata, inflexa, antice incrassata, postice compressa, inferne rotundata, papillosa, postice praeterea agglutinante; loculis vel 12, — inferioribus parum distinctis humilioribus, — superioribus fere rectis convexiusculis, — novissimo maximo abbreviato-ovali, apicato, apice nuda et obtruncata; suturis parum conspicuis. — Long. = $4^5/_{10}$ mm. Non rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 145 und Fig. 24 auf Taf. IV dieses Jahrg.

25. ***Marginulina vittata*** m.

Foraminiferen von F. Lapugy, 3. Artikel, Taf. V, Fig. 20.

Testa elongata, modice inflexa, antice valde incrassata, postice compressiuscula, inferne rotundata, papillosa; loculis 9 vel 10, — prioribus humilibus planis, spirae initia praebentibus, superioribus altioribus convexiusculis et tandem convexis, novissimo maximo sphaerico et apiculato, omnibus ad suturas nudis ideoque quodammodo vittatis; apice nuda; apertura radiata. — Long. = 4 mm. Rara.

Siehe „Verhandlungen und Mittheilungen etc.“, 2. Jahrg. Seite 145 und Fig. 20 auf Taf. V dieses Jahrg.

ERKLÄRUNG DER TAFELN.

TAFEL I.

Fig. 1. *Glandulina abbreviata* m.
„ 2. „ *neglecta m.*
„ 3 et 4. „ *laevigata* d'Orbigny.
„ 5. „ *elegans* m.
„ 6. „ *Reussi* m.
„ 7—9. *Nodosaria Beyrichi* m.
„ 10 et 11. „ *incerta* m.
„ 12. „ *multicosta* m.
„ 13—16. „ *ambigua* m.

TAFEL II.

Fig. 1—7. *Nodosaria compressiuscula* m. (2, *a* breite Ansicht; 2, *b* schmale Ansicht; 2, *c* Ansicht von oben; 2, *d* Durchschnitt im unteren Theile der Schale).
„ 8. *Dentalina perversa* m.
„ 9. „ *pygmaea* m.
„ 10. „ *globuligera* m.
„ 11. „ *conferta* m.
„ 12. „ *Haueri* m.
„ 13—17. „ *Roemeri* m.

TAFEL III.

Fig. 1—3. *Dentalina Orbignyana* m.
„ 4. „ *subtilis* m.
„ 5. „ *Partschi* m.
„ 6 et 7. „ *Reussi* m.
„ 8—11. „ *mucronata* m.
„ 12. „ *Haidingeri* m.
„ 13. „ *subulata* m.
„ 14. „ *tenuis* m.
„ 15. „ *consobrina* d'Orbigny.
„ 16. „ *spinigera* m.
„ 17. „ *Reussi* m.
„ 18. „ *abbreviata* m.

TAFEL IV.

Fig. 1—4. *Dentalina Scharbergana* m. (3, *b* noch mehr vergrösserter unterer Theil der Schale).
„ 5 et 6. „ *subcanaliculata* m.
„ 7, *a*, *b*, *c*. „ *subspinosa* m. (*b* noch mehr vergrösserter oberer Theil und *c* noch mehr vergrösserter unterer Theil der Schale).
„ 8, *a* et *b*. „ *Adolphina* d'Orbigny (*b* noch mehr vergrösserter unterer Theil).
„ 9, *a* et *b*. „ *ornata* m. (*b* noch mehr vergrösserter unterer Theil).
„ 10. „ *Hörnesi* m.
„ 11. „ *Beyrichana* m.
„ 12 et 13. „ *crebricosta* m.
„ 14. „ *Ehrenbergana* m.
„ 15. „ *Geinitzana* m.

Fig. 16, *a* et *b*. *Dentalina Lamarcki* m. (*b* noch mehr vergrösserter unterer Theil der Schale).
„ 17, *a*, *b* et *c*. „ *carinata* m. (*b* Durchschnitt im oberen Theile und *c* Durchschnitt im unteren Theile der Schale).

TAFEL V.

Fig. 1 et 2. *Frondicularia Lapugyensis* m.
„ 3. „ *Hörnesi* m.
„ 4. „ *speciosa* m.
„ 5. „ *venusta* m.
„ 6, *a* et *b*. *Lingulina papillosa* m. (*b* Ansicht von oben mit der Mündung).
„ 7, *a* et *b*. 8 et 9. *Vaginulina Badenensis* (7, *b* ein Stückchen der Schale in der schmalen Ansicht).
„ 10, *a—d*. *Vaginulina Bruckenthali* m. (*b* Ansicht von oben mit der Mündung, *c* Durchschnitt etwa in der Mitte und *d* Durchschnitt im unteren Theile der Schale).
„ 11. *Vaginulina costata* m.
„ 12. *Marginulina vagina* m.
„ 13. *Psecadium simplex* m.
„ 14. „ *ellipticum* m.

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

Neugeboren: Foraminiferen v. O. Lapugy.

1.

4.

2a.

5

2b.

2c

2d

6

3.

7.

8.

9

10

11

12.

13.

14.

15.

16

17.

1.
2.
3a
3b
4.
5
6
7a.
7b
7c
8a
8b.
9a
9b
10
11
12.
13
14
15
16a
16b
17a
17b
17c.

1.

3

4

5

2

6a

7a

7b

8

11.

6b.

12

10b

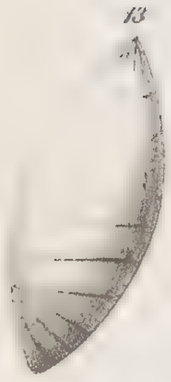
10a

10c

10d

9.

12


13

AUFLÖSUNGSMETHODE

FÜR

ALGEBRAISCHE BUCHSTABENGLEICHUNGEN

MIT EINER EINZIGEN UNABHÄNGIGEN BUCHSTABENGRÖSSE.

VON

Dr. IGNAZ HEGER.

VORGELEGT IN DER SITZUNG DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE AM 26. JUNI 1856.

Vorbemerkung.

Die vorliegende Abhandlung enthält die Auseinandersetzung einer allgemeinen Auflösungsmethode für jene algebraischen Gleichungen von der Form: $F(x, a) = 0$, welche nebst der Unbekannten x noch eine zweite Buchstabengrösse a in sich schliessen. $F(x, a)$ bedeutet eine algebraische Function der zwei Buchstabengrössen x und a von der Gestalt: $S[Ha^a x^r]$, stellt also ein Polynom vor mit Gliedern von der Form $Ha^a x^r$.

Gleichungen dieser Art ergeben sich dem mathematischen Forscher ungleich häufiger als numerische, d. h. als jene, welche nur die Unbekannte x in sich schliessen und durch bestimmte Zahlwerthe derselben erfüllt werden. Bei den meisten geometrischen und mechanischen Problemen ist eine Curve, oder eine Fläche, oder ein anderes analoge Gebilde zu erforschen, gegeben durch eine gewöhnliche oder eine Differentialgleichung. Liegt eine gewöhnliche Gleichung vor, so kann diese nur eine Buchstabengleichung sein, aber keine Zahlengleichung, denn die letzteren bestimmen nur vereinzelte Punkte, aber keine ausgedehnten Gebilde. Hat man hingegen eine Differentialgleichung vorliegen, so handelt es sich zunächst um ihre Integration, und diese erfordert sehr oft, als untergeordnete Rechnungsoperation, die Auflösung einer höheren algebraischen Gleichung, die jedoch nur bisweilen eine Zahlengleichung, bei weitem öfter eine Buchstabengleichung ist. Man gelangt also bei sehr vielen Problemen theils direct, theils indirect zu Buchstabengleichungen und es erscheint demnach eine allgemeine Auflösungsmethode für dieselben von Wichtigkeit.

Es müsste auch Wunder nehmen, wenn ein so wichtiger Gegenstand, wie der hier erwähnte, bisher ganz unbeachtet, oder auch nur die darauf bezüglichen Untersuchungen

erfolglos geblieben wären, da doch fast jeder Analyst, der sich mit geometrischen oder mechanischen Problemen beschäftigt, zu solchen Gleichungen gelangt, die sich dann meist, wie ein unübersteigliches Hinderniss, der weiteren Forschung in den Weg stellen. Ein so wichtiger Gegenstand konnte, der Natur der Sache nach, schon von den Mathematikern der ältesten Zeit nicht unbeachtet bleiben. Es finden sich auch schon die ersten Versuche zur Auflösung solcher Gleichungen in den Werken von Newton, Stirling, Crammer, Lagrange und Anderen, und ihre Untersuchungen über diesen Gegenstand waren auch nicht ohne Erfolg geblieben.

Wir wollen sie hier in Kürze aufzählen:

Die allerersten Versuche dieser Art, die mehr sind, als ein blosses Probiren und zufälliges Errathen, und bereits ein geregeltes Verfahren darstellen, finden sich in den Werken Newton's. Sie beziehen sich nur auf den allereinfachsten Fall, nämlich auf die Auflösung einer Buchstabengleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse. Das dabei eingeschlagene Verfahren geht darauf hinaus, die Wurzeln in Reihenform ab- oder aufsteigend zu entwickeln, findet sich aber dort nur in den allgemeinsten Umrissen skizzirt. Das eigenthümlich Neue bei dieser Methode ist eine geometrische Construction, die den Schlüssel zur Auflösung bildet und mit dem Namen: „analytisches Parallelogramm" belegt wurde. Diese geometrische Construction wurde hierauf in mancherlei Problemen der analytischen Geometrie mit vielem Nutzen angewendet. Beispiele solcher Anwendungen und auch eine ausführliche Auseinandersetzung der Newton'schen Methode findet man in den Werken: Stirling, Lineae tertii ordinis und noch genauer in: Crammer, Introduction a l'analyse de lignes courbes algebriques.

Diese geometrische Construction Newton's wurde später von De Gua in einer höchst unwesentlichen Weise verbessert, und nun mit einem neuen Namen: „analytisches Dreieck" belegt (Usage de l'analyse de Decartes etc.).

Eine wichtigere und bemerkenswerthe Änderung bewirkte Lagrange und zwar, indem er erstens: die bisher unerlässliche geometrische Construction Newton's durch ein rein analytisches Verfahren ersetzte, zweitens: die Entwicklung der Wurzeln in Form von Kettenbrüchen bewerkstelligte. Die erste dieser beiden Änderungen war eine wesentliche Verbesserung, da man jetzt durch eine hinlänglich einfache Rechnung und Vergleichung zum Ziele gelangte, wozu sonst nur die geometrische Construction führen konnte, aber auch die zweite war von wesentlichem Nutzen, da man vermittelst der Entwicklung in Kettenbrüchen auch jene Genüge leistenden Werthe, die in Form eines algebraischen Bruches mit einem geschlossenen Polynome im Zähler und im Nenner erscheinen, in geschlossener Form durch eine endliche Anzahl von Rechnungs-Operationen ermitteln konnte, während dieselben in absteigender oder aufsteigender Reihenform nicht in geschlossener Form darstellbar sind. Hiemit hatte also die Auflösungsmethode Newton's einen solchen Grad der Vollkommenheit und Ausbildung erlangt, dass man die in Form von geschlossenen Polynomen oder eines algebraischen Bruches erscheinenden, kurz die geschlossenen rationalen Genüge leistenden Functionen für eine algebraische Buchstabengleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse durch ein geregeltes Verfahren sich verschaffen konnte. Dieses Verfahren war zwar auch geeignet, die incommensurablen Wurzeln in Gestalt unendlicher Reihen absteigend oder aufsteigend geordnet, oder in Form eines unendlichen Kettenbruches darzustellen, aber man hatte kein sicheres Mittel sich von der Convergenz solcher Reihen zu überzeugen, da alle damals bekannten und zur Verfügung gestellten Kennzeichen unzulänglich waren.

Übrigens war diese Auflösungsmethode noch mancherlei Vervollständigungen bedürftig, wenn sie den praktischen Anforderungen genügen sollte. Dahin sind alle jene Untersuchungen zu zählen, welche über die Unterbrechung der Stetigkeit Aufschluss geben, denen die Genüge leistenden Functionen der Buchstabengleichung unterliegen, und namentlich alle darin erscheinenden Nenner und Irrationalgrössen ans Tageslicht bringen. Dieselben bilden einen sehr wichtigen Theil der allgemeinen Auflösungsmethode, weil nur mit ihrer Hilfe gewisse Eigenschaften der Genüge leistenden Functionen klar eingesehen werden können. Noch einen andern und nicht unwichtigen Vortheil gewähren diese Untersuchungen, denn mit ihrer Hilfe gelingt es bisweilen, die geschlossene Form der Genüge leistenden Functionen zu gewinnen. Von all' diesen nutzbringenden Untersuchungen und ihrer zweckmässigen Anwendung ist nicht die leiseste Andeutung in den erwähnten Werken zu finden.

Später beschäftigte sich Fourier sehr angelegentlich mit diesem Gegenstande und wir haben, gewissen Andeutungen in seinem Werke nach, allen Grund zu glauben, dass er eine allgemeine Auflösungsmethode für solche Gleichungen und zwar nicht blos für eine einzelne Gleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse, sondern auch mit einer beliebig grossen Anzahl von solchen, und auch für Systeme von mehreren solchen Gleichungen gefunden habe. Leider sind die Ergebnisse dieser Untersuchungen, gleichwie viele andere von ihm aufgefundenen Schätze des Wissens für uns verloren gegangen. Aber auch in seinem Werke findet sich keine Andeutung jener eben früher erwähnten Untersuchungen über die Unstetigkeit der Genüge leistenden Functionen.

Endlich wurde derselbe Gegenstand von Petzval genauer behandelt. Bei seinen Untersuchungen über die linearen Differentialgleichungen gelangte derselbe nicht nur zu einer Reihe von Integrationsmethoden für dieselben, sondern fand auch Auflösungsmethoden für eine algebraische Gleichung, welche nebst der Unbekannten x noch andere constante Parameter beherbergt. Dieser Fund war auch einmal der Gegenstand seiner öffentlichen Vorträge an der Wiener Universität, und die Grundzüge dieser Methode finden sich in seinem Werke: „Integration der linearen Differentialgleichungen“ niedergelegt. Diesen zuletzt erwähnten Arbeiten verdankt diese Abhandlung ihr Entstehen. Es wurde mir nämlich erst später kund, dass schon Fourier, wiewohl auf einem andern Wege, denselben Gegenstand behandelt hatte, wie sich dies in seinem Werke: „Analyse des équations déterminées“ angedeutet findet, in welches dieser grosse Mathematiker seine Untersuchungen über Gleichungen niederlegen wollte. Leider ist der grösste Theil hiervon für uns verloren gegangen, weil die Herausgabe des zweiten Bandes durch seinen Tod vereitelt wurde. Der erschienene erste Band enthält glücklicher Weise eine kurze übersichtliche Darstellung: „Exposée synoptique“ des Gesammtinhaltes. Hieraus nun ist ersichtlich, dass das vierte Buch dieses Werkes eine allgemeine Auflösungsmethode für Buchstabengleichungen und Systeme von solchen enthalten sollte. Daselbst sind in gedrängter Kürze die Grundzüge dieser Methode auseinandergesetzt; allein sie scheinen bisher selbst gelehrten Lesern ganz und gar unverständlich geblieben zu sein, vermuthlich wegen der ganz eigenthümlichen Behandlungsweise dieses Gegenstandes, und wären es vielleicht auch für mich geblieben, wenn ich nicht durch die auf einem ähnlichen Gedankengange gegründeten Untersuchungen Petzval's über die linearen Differentialgleichungen zu ihrem Verständnisse geleitet worden wäre. Es ist mir auch gelungen, die Methode Fourier's zur Auflösung von Buchstabengleichungen und Systeme von solchen genau in derselben Weise wieder aufzufinden, wie sie einst dieser grosse Analyst

selbst, seinen eigenen Andeutungen nach, gehabt haben mochte. Es lag dies zwar so eigentlich nicht in der ursprünglichen Absicht; ich ging vielmehr, so wie jeder andere an meiner Stelle, auch darauf aus, auf diesem wenig betretenen Felde wo möglich einiges Eigenthum zu gewinnen und glaube wirklich einiges gefunden zu haben; in der Mehrzahl der Fälle jedoch geschah es, dass ich zwar meinte, einen eigenen Fund gethan zu haben und dann, Fourier's Exposée synoptique zur Hand nehmend, zu meiner Überraschung gewahr ward, wie derselbe darin bereits angedeutet war, mit wenigen, aber so bezeichnenden Worten, dass kein Zweifel übrig bleiben konnte, Fourier habe dasselbe bereits selbst besessen. Ich fand mich dadurch nur noch mehr bestimmt, in dieser Abhandlung, welche einen Theil dieses Fundes zum Gegenstande hat, genau den von Fourier eingeschlagenen Weg beizubehalten. Es ist dies keineswegs blos ein Opfer, welches man den Manen dieses grossen Mannes bringt, ich hege vielmehr die Überzeugung, dass diese Darstellungsweise zugleich die allgemeinste von allen sei, indem sie nicht blos auf eine einzige Buchstabengleichung mit einer einzigen überschüssigen Buchstabengrösse Anwendung verstattet, sondern allgemeine Giltigkeit besitzt, wie gross auch die Anzahl der Gleichungen und der überschüssigen Buchstabengrössen sein mag.

Das in dieser Abhandlung gelöste Problem stellt, wie aus diesen Bemerkungen ersichtlich ist, nur den einfachsten Fall dar. Die darin auseinandergesetzte Auflösungsmethode verstattet aber eine allgemeine Anwendung auf beliebig gestaltete algebraische Buchstabengleichungen und Systeme von solchen mit beliebig vielen überschüssigen Buchstabengrössen. Dieser Abhandlung sollen auch mehrere andere nachfolgen, welche die complicirteren Probleme behandeln, wodurch die Theorie der algebraischen Buchstabengleichungen eine erschöpfende Darstellung gewinnen wird. Diese Reihe von Abhandlungen wird, wie schon erwähnt, zum grössten Theile als eine Wiederherstellung der von Fourier zuerst aufgefundenen, aber durch seinen Tod leider verloren gegangenen allgemeinen Auflösungsmethode für Buchstabengleichungen anzusehen sein; ob und wie weit mir dies wirklich gelungen ist oder nicht, mag jeder Leser durch Vergleichung meiner Arbeit mit dem oberwähnten Exposée synoptique selbst entscheiden.

Wir halten es noch für unerlässlich, einige wenige Worte über die in Rede stehenden Auflösungsmethoden vorauszuschicken, um Missverständnisse zu vermeiden. Die Auflösung einer Gleichung oder eines Systemes von mehreren solchen ist nie als Zweck, sondern nur als ein Mittel zum Zwecke anzusehen. Hat nämlich die Behandlung irgend eines Problemes zu einer Gleichung geführt, so handelt es sich darum, aus derselben jene Schlussfolgerungen abzuleiten, die zur Beantwortung der gestellten Fragen dienen. Eine Auflösungsmethode, die diesem praktischen Zwecke entsprechen soll, muss daher eigentlich in der Erörterung jener Eigenschaften bestehen, die in der Gleichung zwar schon niedergelegt sind, aber in einer viel zu bündigen, und desshalb für uns unverständlichen Weise. Wäre es möglich, diese Eigenschaften aus der Gleichung selbst schon zu ersehen, so wäre eine Auflösung derselben überflüssig und nur ein zweckloser Umweg. Weil aber diese unmittelbare Einsicht in der Regel nicht möglich ist, so wird man sich bemühen müssen, durch gewisse Operationen diesen Zweck zu erreichen. Die Methode nun, welche durch ein regelmässiges Verfahren zu dieser Einsicht führt, belegen wir mit dem Namen einer Auflösungsmethode. Indem wir hier von dem praktischen Werthe ausgehen, werden wir eine Auflösungsmethode an und für sich verwerfen, wenn sie für die Unbekannte zwar einen Genüge leistenden Werth liefert, aber in einer Gestalt,

welche die wissenswerthen Eigenschaften ebenso und vielleicht noch in einem grösseren Masse verhüllt, als die Gleichung selber. Wir erwähnen hier nur die Cardanische Formel für die Gleichung des dritten, und die ihr ähnliche für jene des vierten Grades als einen solchen Fall. Wir werden daher keineswegs zunächst auf geschlossene Formen der Wurzeln Jagd machen, und für uns können unendliche Reihen denselben und mitunter einen viel höheren Werth besitzen, wenn sie die leichte Beantwortung der gestellten Frage ermöglichen. Die Auflösung einer Gleichung wird eher als ein Discutiren der wichtigen Eigenschaften der Genüge leistenden Werthe anzusehen sein. Ein solches Discutiren lässt sich, der Natur der Sache nach, nicht mit einem einzigen Schlage vollenden, sondern zerfällt in eine Anzahl von Partialuntersuchungen und zwar in eine um so grössere, je mehr verschiedene Eigenschaften zu erörtern sind, je complicirter das Problem ist. Es genügt desshalb nicht, die Wurzeln einer Gleichung nur in einer einzigen Form darzustellen, sondern man ist genöthiget, sie sich in mehreren verschiedenen Formen zu verschaffen, weil eine jede einzelne Form in der Regel nur eine einzige Eigenschaft aufzuklären vermag, über alle übrigen Eigenschaften aber keinen Aufschluss gewährt. Nur in den allereinfachsten Fällen genügt es, die Wurzeln in einer einzigen Form zu besitzen. In dem hier behandelten Probleme sind die Genüge leistenden Werthe der Unbekannten x Functionen von a und die Auflösungsmethode hat demnach solche Functionen aufzustellen und ihre wichtigen Eigenschaften aufzudecken. Man erreicht diesen Zweck durch die nachfolgenden Untersuchungen:

Erstens: Man entwickelt die Genüge leistenden Functionen in Form einer absteigend nach Potenzen von a geordneten Reihe und erhält hierdurch Aufschluss über ihr Verhalten für sehr grosse Werthe von a.

Zweitens: Man eruirt alle jene endlichen Werthe von a, für welche die Genüge leistende Function einer Unterbrechung der Stetigkeit unterliegt.

Drittens: Man entwickelt die Genüge leistenden Functionen in Reihenform, aufsteigend geordnet nach Potenzen einer Grösse $a - \alpha$, wo α einen jener speciellen Werthe von a vorstellt, welchem eine Unterbrechung der Stetigkeit entspricht, und die durch die vorhergehende Untersuchung ermittelt sind. Auf diesem Wege gelangt man zur Kenntniss aller Nenner und Irrationalgrössen, die in den Genüge leistenden Werthen erscheinen. Man wird dadurch oft noch überdies in den Stand gesetzt, eine einfache und geschlossene Form aufzufinden.

Wir haben hier offen bekannt, dass die in Rede stehenden Auflösungsmethoden vorzüglich auf Reihenentwicklungen basirt seien, und geschlossene Formen nur nebenher gesucht werden, wenn sie ohne weitläufige Rechnungen erhalten werden können. Es steht zu erwarten, dass dieses offene Geständniss bei den meisten Lesern statt als eine Anempfehlung zu gelten, gerade das Gegentheil bewirken dürfte. Man pflegt meistentheils in Reihenentwickelungen nur ein unbequemes Verfahren zu erblicken, und entschliesst sich erst dazu, wenn geschlossene Formen durchaus den Dienst versagen. Bei vielen Lesern mag sogar der Zweifel rege werden, ob denn doch diese Auflösungsmethode eine neue sei, da bekanntlich mittelst der Taylor'schen und Mac-Laurin'schen Formel die Entwickelung explicirter und implicirter Functionen in Reihen gelingt. Wir haben auch die volle Überzeugung, dass diese Auflösungsmethode nur allmählich sich Geltung verschaffen werde, bis eine klare Vorstellung über den praktischen Zweck derselben wird Platz gegriffen haben, dann aber kein Zweifel mehr bestehen könne, dass sie alles leiste, was man vernünftigerweise von ihr zu fordern berechtigt ist.

Der leichteren Übersicht wegen ist die Behandlung des vorliegenden Problemes in vier Abschnitte getheilt worden:

Der erste Abschnitt lehrt die absteigend nach Potenzen von a geordnete Reihen-Entwickelung.

Der zweite Abschnitt zeigt, wie die aufsteigend nach Potenzen einer Grösse $a - \alpha$ geordnete Reihen-Entwickelung einzuleiten ist und zwar für beliebige aber bestimmte Zahlwerthe von α.

Der dritte Abschnitt enthält die Untersuchungen, die auf die Unterbrechung der Stätigkeit bei den Genüge leistenden Functionen Bezug haben, ferner die Ermittlung aller Nenner und Irrationalgrössen, die in den Wurzeln erscheinen. Es sind dort auch die Grundzüge jener Untersuchungen aufgeführt, welche bisweilen zu geschlossenen Formen der der Wurzeln führen.

Der vierte Abschnitt hat die Bestimmung des Ergänzungsgliedes und die Untersuchungen über die Convergenz der unendlichen Reihen zum Gegenstande, zu welchen man bei der Auflösung meistentheils gelangt. Dort finden die gelehrten Methoden ihre wahre Begründung und Rechtfertigung. Ferner geschieht dort Erwähnung von der geometrischen Bedeutung der verschiedenen Entwickelungsweisen, insbesondere ihrer Anwendbarkeit zur Bestimmung Asymptoten bei Curven von einfacher Krümmung.

Die vorliegende Abhandlung umfasst nur die beiden ersten Abschnitte.

Entwickelung der Wurzeln in Form einer nach absteigenden Potenzen der unabhängigen Buchstabengrösse geordneten Reihe.

Einleitung.

Im Folgenden ist eine Methode auseinandergesetzt, die Wurzeln einer algebraischen Gleichung zwischen zwei Buchstabengrössen in eine Reihe zu entwickeln, geordnet nach absteigenden Potenzen der unabhängigen Buchstabengrösse. Die gegebene Gleichung ist:

$$P = 0.$$

P bedeutet eine Summe von Gliedern von der Form $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$. x stellt die unbekannte oder abhängige, a die unabhängige Buchstabengrösse vor, H, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ sind bestimmte Zahlwerthe. Diese Form der Gleichung ist eine sehr allgemeine. In ihr ist die ganze und rationale algebraische Gleichung als specieller Fall enthalten. Sind nämlich alle $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ ganze, positive Zahlen, die Nullwerthe mit eingerechnet, so lässt sich das Gleichungspolynom stets auf die folgende Form bringen:

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + A_1 x + A_0 = 0$$

und in dieser bedeuten A_m, A_{m-1}, A_{m-2}, $\ldots A_1$, A_0 selbst wieder Polynome, deren Glieder die allgemeine Form $H a^{\mathfrak{a}}$ besitzen. Wir suchen hier eine Function von a, die die Eigenschaft besitzt, anstatt x in das Polynom P substituirt, dasselbe in einen identisch, d. h. für jeden beliebigen Werth von a sich auf Null reducirenden Ausdruck zu verwandeln. Wir verfügen jedoch im Voraus über die Form dieser Genüge leistenden Function, und setzen sie in Gestalt eines nach absteigenden Potenzen von a geordneten Polynomes voraus:

$$x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \ldots\ldots - h_r a^{\xi_r}$$

in welchem zwischen den Exponenten die Relation:

$$\xi_0 > \xi_1 > \xi_2 > \ldots\ldots > \xi_r$$

besteht und die Gliederanzahl entweder eine endliche oder unendliche sein kann.

Eine solche willkürliche Voraussetzung der Functionsform fordert allerdings einerseits ihre Rechtfertigung, andererseits aber eine genügende Motivirung. Von der Ersteren dispensiren wir uns vor der Hand, indem wir später ohnehin zeigen werden, dass eine solche Entwickelungsweise der Wurzeln stets zulässig und die dabei erhaltene meistentheils unendliche Reihe für gewisse genügend grosse Werthe der unabhängigen Buchstabengrösse a convergent sei. In Bezug der Letzteren wollen wir hier nur erwähnen, dass man die Auflösungen der Gleichungen des ersten und die der binomischen höheren Grades schon seit langer Zeit in solcher Form zu suchen gewohnt sei, und zu diesem Behufe die bekannten Regeln zur Division und zum Wurzelausziehen besitze. Die im Folgenden behandelte Methode würde daher schon, insoferne sie eine Verallgemeinerung dieser beiden Regeln darstellt, hinreichend motivirt sein. Wir wollen uns auch jetzt mit dieser Motivirung begnügen, und werden später, wenn wir diesen Gegenstand mehr werden erörtert haben, über den Zweck und die eigentliche Bedeutung einer solchen Entwickelungsweise die nöthigen Bemerkungen folgen lassen.

Dadurch, dass wir x in dieser Form auffassen, wird das Problem wesentlich verändert. In der That, da nun x als die Summe von Gliedern von Form ha^{ξ} aufgefasst wird, treten an die Stelle der einzigen Unbekannten x, deren mehrere, nämlich einem jeden einzelnen Gliede $h a^{\xi}$ dieser Reihe entsprechend, deren zwei: der Exponent ξ und der Coëfficient h. Wäre demnach x eine aus $r + 1$ solchen Gliedern zusammengesetze Reihe, wie die folgende:

$$h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \ldots\ldots + h_r a^{\xi_r}$$

so wären an die Stelle der einen Unbekannten x deren $2r + 2$ an der Zahl getreten. Aber diese Vergrösserung der Anzahl der Unbekannten ist hier, weit entfernt ein Nachtheil zu sein, vielmehr ein Vortheil, denn diese neuen Unbekannten sind keine Functionen von a mehr, sondern Zahlen.

Durch die über die Functionsform von x gemachte Voraussetzung ist daher das Problem in ein wesentlich verschiedenes verwandelt worden. Da der Natur der Sache nach x eine bestimmte Function von a bedeutet, so werden die $2r + 2$ Grössen:

$$\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2 \ldots\ldots \xi_r$$
$$h_0,\ h_1,\ h_2 \ldots\ldots h_r$$

$2r + 2$ Bedingungsgleichungen zu erfüllen haben, da nur auf solche Weise diese Grössen ihrem Zahlwerthe nach vollkommen bestimmt sein können. Es ist andererseits bekannt, dass die Gleichung $P = 0$, als nach x einem höheren Grade angehörig, mehrere und in der Regel von einander verschiedene Auflösungen zulasse, und dass demnach nicht ein einziges, sondern mehrere verschiedene Systeme von Zahlwerthen für diese $2r + 2$ Grössen sich werden auffinden lassen. Hieraus wäre man schon geneigt zu vermuthen, dass die zur Bestimmung dieser Grössen dienenden Gleichungen, namentlich für die dem Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ zukommenden Grössen ξ_0 und h_0 von höherem Grade sein werden. Allein wir werden zu unserer nicht geringen Überraschung sehen, dass die Exponenten $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots \xi_r$ stets nur durch Gleichungen des ersten Grades gegeben sind, während allerdings die zur Bestimmung von $h_0, h_1 \ldots\ldots h^r$

dienenden Gleichungen von höherem Grade sein können; und trotzdem entspricht doch im Allgemeinen einer Gleichung höheren Grades nach x nicht ein einziges System von Werthen $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_r$, sondern deren mehrere. Dieser scheinbare Widerspruch wird sich aber alsbald beheben, wenn wir die Bedingungen kennen lernen, welchen die Exponenten $\xi_0, \xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_r$ entsprechen müssen. Diese Bedingungen sind ganz eigenthümlicher Art, so zwar, dass der erste Exponent ξ_0 (gelegentlich auch die späteren $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots$) nicht eine einzige und bestimmte Gleichung, sondern im Gegentheile so viele Bedingungen zu erfüllen hat, als das Polynom P Glieder von der Form $Ha^\alpha x^\xi$ besitzt. Von all' diesen Bedingungen ist eine einzige eine Gleichung, alle übrigen aber Ungleichungen.

Um sich von der Natur dieser Bedingungen eine Vorstellung machen zu können, denke man sich aus einem jeden einzelnen Gliede $Ha^\alpha x^\xi$ des Gleichungspolynoms P eine lineare Function $\alpha + \chi\xi_0$ abgeleitet. Man erhält, dermassen verfahrend, so viele verschiedene Functionen vom ersten Grade nach ξ_0, als Glieder im Gleichungspolynome bestehen. Substituirt man nun anstatt ξ_0 beliebige Werthe, so werden diese Functionen der Reihe nach bestimmte, aber in der Regel gänzlich von einander verschiedene Werthe erlangen. Nur für gewisse Werthe von ξ_0 werden zwei, gelegentlich auch mehrere dieser Functionen gleiche Werthe besitzen. ξ_0 ist nun, um als Exponent im Anfangsgliede von x zu gelten, so zu wählen, dass zwei oder mehrere dieser Functionen gleiche Werthe aufweisen. Man würde dieser Bedingung auf mehrere verschiedene Arten genügen können, in der Regel auf so viele verschiedene Arten, als Combinationen zu Amben zwischen diesen linearen Functionen möglich sind, und es wären demnach in der Regel eben so viele verschiedene Werthe von ξ_0 zulässig. Allein die hier erwähnte Bedingung ist nicht die einzige, die man zu erfüllen hat, man muss noch überdies Sorge tragen, dass alle übrigen Functionen kleinere oder doch wenigstens keine grösseren Werthe erhalten, als die zwei einander gleichgesetzten. Durch diese hinzutretende Bedingung erweisen sich viele jener durch Gleichsetzen von zwei beliebigen Functionen $\alpha + \chi\xi_0$ gewonnenen Werthe ξ_0 als unbrauchbar, weil für dieselben eine oder mehrere der übrigen Functionen grössere Werthe erlangen, und es tritt dadurch eine Verringerung ihrer Anzahl ein. Nichts desto weniger bleiben meistentheils mehrere verschiedene Werthe von ξ_0 übrig, so zwar, dass durch diese neue Bedingung nur gewisse der erwähnten Combinationen zu Amben sich als brauchbar erweisen.

Wir lernen hiemit ein Problem kennen, eigenthümlich in soferne, als die zu suchende Grösse nicht eine bestimmte Gleichung, sondern nebst einer mit einer gewissen Unbestimmtheit versehenen Gleichung noch eine Anzahl von anderen Bedingungen zu erfüllen hat, die nicht durch Gleichungen, sondern durch Ungleichungen ausgedrückt sind. Zur Auflösung dieses Problemes werden wir durch eine geometrische Construction gelangen; aber eigentlich gehören alle derartigen Probleme, in welchen Bedingungen vorkommen, die nicht durch Gleichungen allein, sondern durch Ungleichungen ausgedrückt werden, in ein eigenes Gebiet und erfordern eine eigenthümliche Behandlungsweise. In soferne ist daher die Bestimmung des Exponenten ξ_0 von der Auflösung von Ungleichungen abhängig. Dass wir dieselben hier von einer geometrischen Construction abhängig machen und auf solche Weise die Analyse der Ungleichungen umgehen können, verdanken wir dem günstigen Umstande, dass wir eine eine einzige Unbekannte ξ zu bestimmen haben, und die Abhängigkeit der hier in Betrachtung kommenden Functionen dieser Grösse, nämlich die der verschiedenen $\alpha + \chi\xi$ durch Linien in der Ebene darzustellen vermögen. Übersteigt jedoch die Anzahl dieser Unbekannten die

Zahl zwei, so sind solche geometrische Betrachtungen nicht mehr möglich, und man besitzt kein Mittel, die Auflösung von Ungleichungen zu umgehen. Wir geben hier der geometrischen Auflösungsmethode nur darum den Vorzug vor dem viel vollkommeneren und in Wahrheit bequemeren analytischen Verfahren, weil wir die Theorie der Ungleichungen, deren Wichtigkeit sich hier zum ersten Male ergibt, nicht als bekannt vorauszusetzen berechtigt sind, und weil die geometrischen Constructionen, so zu sagen, eine populäre Darstellung der Natur solcher Probleme und des zu ihrer Auflösung dienenden Verfahrens abgeben. Wir werden in der That darauf hinweisen, wie hier bei der geometrischen Construction Schritt für Schritt genau dasselbe geschieht, wie bei der analytischen Auflösungsmethode.

In der Regel werden die verschiedenen Auflösungen x, in der erwähnten Form aufgestellt, sich schon in dem Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ von einander unterscheiden und es gehört zu den Ausnahmsfällen, dass zwei oder mehrere Auflösungen dasselbe Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ gemeinschaftlich besitzen. Mit der Besimmung der Anfangsglieder wird demnach meistentheils jede einzelne Auflösung schon isolirt und von allen übrigen unterschieden sein. Schreitet man nun zur Bestimmung der nachfolgenden Glieder, so wird sich zu einem bestimmten solchen Anfangsgliede nur eine einzige Reihe von Folgegliedern ergeben. Wir ersehen also hieraus, dass die Bestimmung des Anfangsgliedes die Trennung der Wurzeln bewerkstellige, während die Bestimmung der Folgeglieder die Approximation vorstellt, analog dem bei Zahlengleichungen eingeleiteten Verfahren, welches gleichfalls in zwei Theile zerfällt, nämlich in die Trennung der Wurzeln und in das eigentliche Approximationsverfahren. Da nun die Bestimmung der Anfangsglieder einen ganz anderen Zweck erfüllt als die Bestimmung der Folgeglieder, so wird auch das zur Bestimmung der Anfangsglieder dienende Verfahren, der Natur der Sache nach, ein ganz anderes und complicirteres sein als dasjenige, welches die Folgeglieder liefert, und es zerfällt daher die Reihe der nachfolgenden Untersuchungen in zwei Hauptabtheilungen. In der ersten wird von der Bestimmung der Anfangsglieder gehandelt, während die zweite die Bestimmung der Folgeglieder lehrt.

I. Bestimmung des Anfangsgliedes.

§. 1.

Das Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ enthält zwei Grössen, nämlich den Exponenten ξ_0 und den Coëfficienten h_0, die ihrem Zahlwerthe nach zu bestimmen sind. Die Bestimmung des Anfangsgliedes wird daher in zwei Theile zerfallen, nämlich in die Bestimmung von ξ_0 und in die von h_0. Eine jede dieser beiden Grössen hat gewisse Bedingungen zu erfüllen. Sind uns diese Bedingungen bekannt, so werden wir auch ihre Zahlwerthe anzugeben im Stande sein, und der nächste Schritt, den wir zu thun haben, besteht in der Erörterung dieser Bedingungen. Haben wir dann diese Bedingungen aufgefunden, so werden wir noch anzugeben haben, wie man diese Bedingungen erfüllen und so zu den Zahlwerthen von ξ_0 und h_0 gelangen könne; denn, wie schon bemerkt wurde, sind zwar ξ_0 und h_0 durch Gleichungen gegeben, allein diese Gleichungen lassen sich nicht unmittelbar bilden, sondern es führt erst eine eigenthümliche Untersuchung zu denselben.

Zu den Bedingungen, welche die beiden Grössen ξ_0 und h_0 zu erfüllen haben, kann man auf sehr verschiedenen Wegen gelangen. Wir wählen hier den von Fourier betretenen Weg der directen Substitution, d. h. wir substituiren eine absteigend geordnete, mit dem Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ versehene Reihe anstatt x in das Gleichungspolynom P, wobei h_0 und ξ_0 unbestimmte Zahlen vorstellen, und untersuchen, für welche Werthe der unbestimmt gelassenen Grössen ξ_0 und h_0 dieses Substitutionsresultat in seinem ersten, mit der höchsten Potenz von a versehenen Gliede auf Null gebracht werden könne. Wir geben dieser Ableitungsweise den Vorzug vor allen übrigen, weil wir so unabhängig von allen Lehrsätzen, die zur allgemeinen Theorie der Gleichungen gehören, zu den gesuchten Bedingungen gelangen und andererseits dabei den Vortheil geniessen, über die Beschaffenheit der mit bestimmten Zahlwerthen versehenen Grössen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ keinerlei beschränkende Annahmen zu machen. Diese Bedingungen gelten daher nicht blos für ganze, rationale und geschlossene Polynome P, sondern auch für solche, denen diese Eigenschaften fehlen.

Schreiten wir nun zur Ausführung dieser Substitution. Eine kurze Überlegung zeigt, dass sich dieselbe nur bis zu einer gewissen Weite hin wird ausführen lassen, so lange über den Zahlwerth des Exponenten ξ_0 keine bestimmte Verfügung getroffen ist. In der That hat man die statt x genommene Reihe zuerst in jedes einzelne Glied des Gleichungspolynoms zu setzen und wird dabei aus einem jeden solchen Gliede $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ einen mehrgliedrigen Ausdruck erhalten, der gleichfalls nach absteigenden Potenzen von a geordnet ist, und ein Anfangsglied von der Form:

$$H h_0^{\mathfrak{x}} a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0} \tag{1}$$

besitzt. Weiter als bis hieher lässt sich die Substitution nicht ausführen, ohne dem ξ_0 einen bestimmten Werth zu ertheilen, denn der nächste Schritt besteht in der Summirung aller dieser verschiedenen Ausdrücke, welche den einzelnen Gliedern des Gleichungspolynoms entsprechen, und hiezu ist es nöthig, die verschiedenen Glieder von der Form (1) in Bezug auf die in ihnen erscheinenden Potenzen von a mit einander zu vergleichen. Gesetzt, ξ_0 wäre mit einem bestimmten Zahlwerthe versehen, so wären es auch die Gradzahlen $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0$ und man könnte ohne alle Schwierigkeit entscheiden, welches der verschiedenen Glieder von der Form (1) die höchste Potenz von a besitzt. So aber, da der Zahlwerth von ξ_0 noch unbestimmt ist, kann eine solche Vergleichung der Gradzahlen $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0$ nicht unternommen und daher auch die Substitution nicht weiter geführt werden. Allein gerade diese nur bis hieher und nicht weiter ausgeführte Substitution gibt die Bedingungen an, welchen bei der Wahl von ξ_0 entsprochen werden muss. Wie eben bemerkt wurde, handelt es sich nun zunächst darum, die verschiedenen Gradzahlen $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0$ mit einander zu vergleichen und unter ihnen die grösste auszuwählen. Der Erfolg einer solchen Vergleichung kann jedoch ein doppelter sein: Entweder findet sich nämlich unter denselben eine einzige solche, mit dem grössten Zahlwerthe versehene Gradzahl; oder es kommt dieser grösste Zahlwerth zweien oder mehreren derselben gemeinschaftlich zu. Der ersterwähnte Fall wird sich häufiger zutragen, während der zweite nur für specielle Werthe von ξ_0 eintreten kann. Die Unterscheidung dieser zwei Fälle ist für den Gang der weiteren Substitution und für die Form des höchsten Gliedes im Substitutionsresultate P_0 von Wichtigkeit. Findet sich nämlich eine einzige Gradzahl der verschiedenen $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0$ mit dem grössten Zahlwerthe versehen, so wird sich bei der Summirung der Ausdrücke, welche den einzelnen Gliedern des Gleichungspolynoms entsprechen, nur ein einziges Glied vorfinden, welches a in

der höchsten Potenz besitzt, und da dasselbe die Form (1) besitzt, so wird der Coëfficient Hh_0^x, mit dem diese höchste Potenz von a multiplicirt erscheint, stets von Null verschieden ausfallen, so lange h_0 von Null verschieden ist. In einem solchen Falle ist daher an ein identisches Nullwerden des Substitutionsresultates P_0 nicht zu denken, weil wenigstens die höchste Potenz von a stets einen von Null verschiedenen Coëfficienten Hh_0^x besitzen wird. Solche Werthe von ξ_0, welche einer einzigen der Gradzahlen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ den grössten Zahlwerth ertheilen, sind demnach nicht geeignet, anstatt ξ_0 im Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ gesetzt zu werden. Ist hingegen ξ_0 so gewählt, dass der grösste Zahlwerth nicht einer einzigen, sondern zweien oder mehreren der Gradzahlen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ gemeinschaftlich zukommt; so sind auch zwei oder mehrere der Glieder (1) vorhanden, welche dieselbe und höchste Potenz von a besitzen; bei der nun einzuleitenden Summirung der einzelnen Ausdrücke stellen sich dieselben zu einem einzigen mit der höchsten Potenz von a versehenen Gliede des Substitutionsresultates P_0 zusammen. Der Coëfficient dieser höchsten Potenz von a ist demnach ein zwei- oder mehrgliedriger Ausdruck , nämlich die Summe von zwei oder mehreren Gliedern von der Form Hh_0^x. Jetzt ist es aber auch möglich, diesen Coëfficienten der Nulle gleich zu machen durch von Null verschiedene aber zweckmässig gewählte Werthe von h_0. Wir sind auf solche Weise schon zu den gesuchten Bedingungen gelangt, welchen die mit ξ_0 und h_0 bezeichneten Grössen im Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ genügen müssen. Wir haben auch gesehen, dass die Wahl jeder dieser beiden Grössen einen eigenthümlichen Zweck erfüllt: die zweckmässige Wahl des Exponten ξ_0 bewirkt nämlich, dass zwei oder mehrere Glieder des Gleichungspolynoms zu dem mit der höchsten Potenz von a versehenen Gliede des Substitutionsresultates P_0 einen Bestandtheil liefern, so zwar, dass der Coëfficient dieser höchsten Potenz von a ein zwei- oder mehrgliedriger, h_0 enthaltender Ausdruck wird, der daher eine Reduction zulässt, wenn man dem h_0 einen bestimmten Zahlwerth ertheilt. Die zweckmässige Wahl der zweiten, mit h_0 bezeichneten Grösse bezweckt, dass bei dieser, zufolge der Wahl von ξ_0, möglich gewordenen Reduction im Coëfficienten des höchsten Gliedes im Substitutionsresultate derselbe den Werth Null erlangt. Wir finden hier unsere früher gemachten Bemerkungen bewahrheitet: ξ_0 nämlich, so wie h_0 sind aus Gleichungen zu ziehen; allein in Bezug auf diese Gleichungen waltet noch eine Unbestimmtheit.

Die Gleichung, welche ξ_0 liefert, ist immer vom ersten Grade, weil sie besagt, dass zwei der Gradzahlen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$, welche, wie man sieht, lineare Functionen von ξ_0 sind, einander gleich sein müssen. Trotzdem ist es dennoch denkbar, dass für ξ_0 mehrere Zahlwerthe erhalten werden können.

Die Möglichkeit mehrerer brauchbarer Zahlwerthe für ξ_0 hat eben in der erwähnten Unbestimmtheit ihren Grund, da der Grössen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ so viele als Glieder des Gleichungspolynoms vorhanden sind, also mit Ausnahme der binomischen Gleichungen stets mehr als zwei; und man wird daher mehrere Gleichungen des ersten Grades aufzustellen im Stande sein, welche die verlangte Gleichheit zweier linearer Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ aussprechen und daher auch mehrere Werthe für ξ_0 finden. Ist eine bestimmte solche Gleichung aufgestellt, und der ihr entsprechende Werth von ξ_0 bestimmt, so ist hiemit auch zugleich die Gleichung bestimmt, welche h_0 liefert. Der aus dieser Gleichung des ersten Grades gezogene Werth von ξ_0 ertheilt nämlich zweien, gelegentlich aber auch mehreren linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ denselben grössten Werth. Dieser grösste Werth ist zugleich der Exponent von a im ersten Gliede des Substitutionsresultates P_0, so lange man noch nicht den Werth von h_0 specialisirt hat. Der Coëfficient,

mit dem diese höchste Potenz von a multiplicirt erscheint, ist ein zwei- oder mehrgliedriges Polynom, welches h_0 in verschiedenen Potenzen enthält, und lässt sich auf eine sehr einfache Weise bilden. Diejenigen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ nämlich, welche einerlei und grössten Werth erlangen, entsprechen gewissen Gliedern des Gleichungspolynomes P.

Setzt man nun in der Summe der so bezeichneten Glieder des Gleichungspolynoms anstatt a und x die Werthe 1 und h_0, so geht dadurch ein in der Regel zwei-, gelegentlich aber mehrgliedriger h_0 enthaltender Ausdruck hervor, welcher eben der gesuchte Coëfficient dieser höchsten Potenz von a im Substitutionsresultate ist.

Diese Regel ergibt sich unmittelbar aus der Betrachtung der Form (1), welche eben das höchste Glied des aus $Ha^\alpha x^r$ hervorgehenden Substitutionsresultates ist. Es ist nun nur noch nöthig, diesen h_0 enthaltenden Ausdruck der Nulle gleich zu setzen, so hat man die dem erwählten ξ_0 entsprechende Bestimmungsgleichung für das zugehörige h_0. Diese Gleichung ist nach h_0 meistentheils von höherem Grade, und es ist daher möglich, zu einem einzigen Werthe von ξ_0 mehrere zugehörige h_0 zu finden. Wir ersehen also hieraus, dass sowohl der Werth von ξ_0, als die zugehörigen Werthe von h_0 bestimmt sind, wenn man durch Gleichsetzen zweier linearer Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ von einer bestimmten Gleichung des ersten Grades in ξ_0 ausgegangen ist. Die bei der Wahl dieser Gleichung bestehende Unbestimmtheit bewirkt daher, trotzdem dass sie nur dem ersten Grade angehört, die Möglichkeit verschiedener ξ_0, deren jedem wieder bestimmte h_0 in einer gewissen Anzahl angehören. Die Unbestimmtheit der Gleichung in ξ_0 erstreckt sich aber keineswegs so weit, dass man nur beliebige zwei der linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ einander gleichsetzen dürfte, um einen brauchbaren Werth für ξ_0 zu erhalten; die Wahl der beiden einander gleichzusetzenden Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ ist vielmehr durch weitere Bedingungen von eigenthümlicher Art beschränkt. Es ist nämlich nicht hinreichend, dass ξ_0 so gewählt werde, dass zwei oder mehrere lineare Functionen gleich werden, sondern die gleichgesetzten Functionen müssen zugleich den grössten Werth besitzen. Wollte man daher, um zu allen möglichen verschiedenen Werthen von ξ_0 zu gelangen, die linearen Functionen zu je zweien auf alle denkbaren Weisen einander gleichsetzen, so müsste hinterher erst eine Untersuchung der so gewonnenen Werthe für ξ_0 folgen, welche zu entscheiden hätte, ob keine der übrigen linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ einen grösseren Werth erhält als die zwei einander gleichgesetzten. Diese Untersuchung wäre mit jedem einzelnen der gewonnenen Zahlwerthe von ξ_0 vorzunehmen, und nur jene von ihnen, welche dieser Bedingung entsprechen, sind als brauchbare Werthe von ξ_0 anzusehen, alle übrigen aber nicht.

Es versteht sich wohl von selbst, dass dieser Weg, zu den Werthen von ξ_0 zu gelangen, nicht der bequemste und kürzeste sei, weil in der Mehrzahl der Fälle bei einem solchen Gleichsetzen zweier ganz willkürlich erwählter linearer Functionen die nachträgliche Untersuchung des gewonnenen Werthes denselben als unbrauchbar bezeichnen würde. Wir wollen daher zu einem directen Verfahren schreiten, welches gleichzeitig auf alle Bedingungen Rücksicht nimmt, und welches ohne alle Umwege und fruchtlose Versuche zu allen möglichen Werthen von ξ_0 führt. Haben wir diesen Zweck erreicht, so wird auch die Aufstellung der entsprechenden Gleichungen in h_0, wie wir bereits gesehen haben, keinerlei Unbestimmtheit und Schwierigkeit unterliegen. Wie schon früher bemerkt wurde, gehört dieses Problem eigentlich in das Gebiet der Auflösung von Ungleichungen. Wir werden auch später uns darüber deutlicher erklären. Vor der Hand aber versuchen wir durch geometrische Constructionen zur Auflösung zu gelangen.

§. 2.

Das Problem ist folgendes: Es ist ein Polynom P gegeben, bestehend aus mehreren Gliedern von der Form $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$; aus den Exponenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ eines jeden einzelnen solchen Gliedes bilde man eine Function von ξ_0, nämlich die $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0$, deren Bildungsweise von selbst ersichtlich ist; nun sollen jene Zahlwerthe von ξ_0 angegeben werden, welche unter all diesen verschiedenen Functionen zweien oder mehreren denselben gleiche, allen übrigen aber kleinere Werthe ertheilen. Diese Bedingungen sind es, welche ξ_0 zu erfüllen hat. Betrachten wir nun ξ_0 als Abscisse, die lineare Function $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0=\eta$ als zugehörige Ordinate, so lässt sich für jede lineare Function die zwischen ξ und η bestehende Abhängigkeit durch eine Linie, und zwar durch eine gerade Linie darstellen. Diese gerade Linie stellt die Gesammtheit aller Punkte auf der Ebene dar, deren Coordinaten ξ und η in derjenigen Abhängigkeit zu einander stehen, wie sie die Gleichung

$$\eta = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$$

zwischen ihnen feststellt. Für jede einzelne lineare Function, gewissermassen also für jedes einzelne Glied $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$ ergibt sich eine bestimmte solche Gerade, also für alle die verschiedenen linearen Functionen ein ganzes System solcher Linien, deren jede eine andere Lage besitzt. Hier in der verzeichneten Figur ist es nicht schwer zu sehen, welche der linearen Functionen für einen gewissen Bereich der Werthe von ξ den grössten Werth besitzt.

Um hievon eine deutliche Darstellung zu geben, wählen wir ein Beispiel, nämlich die Gleichung

$$\underset{a}{ax^4} + \underset{b}{x^4} + \underset{c}{x^3} + \underset{d}{a^2x^2} - \underset{e}{x^2} - \underset{f}{a^2x} + \underset{g}{2ax} + \underset{h}{a^2} - \underset{i}{a} = 0.$$

Die linearen Functionen der einzelnen Glieder sind folgende:

$$\eta_a = 1 + 4\xi,\ \eta_b = 4\xi,\quad \eta_c = 3\xi,\quad \eta_d = 2 + 2\xi,$$
$$\eta_e = 2\xi,\quad \eta_f = 2 + \xi,\ \eta_g = 1 + \xi,\ \eta_h = 2,\quad \eta_i = 1.$$

Das durch diese Gleichungen bestimmte System von Linien ist in Fig. 1 dargestellt. Jede Linie ist mit denselben Buchstaben bezeichnet, welche den entsprechenden η und den correspondirenden Gliedern des Gleichungspolynoms angefügt sind. In dieser Zeichnung sehen wir alsbald, dass für alle möglichen Werthe von ξ nur drei Linien die oberste Lage einnehmen, nämlich für $\xi<0$ ist die mit h bezeichnete Linie die am höchsten gelegene, für jene Werthe von ξ die zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen die Linien d und für grössere ξ als $\frac{1}{2}$ die Linie a. In den Durchschnittspunkten A und B, welchen die Werthe $\xi=0$ und $\xi=\frac{1}{2}$ entsprechen, ist es nicht mehr eine einzige Linie, welche das grösste η besitzt, sondern es sind deren mehrere. Im Punkte A schneiden sich drei Linien, nämlich die h, f und d; sie besitzen alle drei dort dieselbe höchste Lage, allen dreien entspricht dieselbe grösste Ordinate $\eta=2$, während alle übrigen Linien kleinere Werthe für ihre Ordinaten liefern. Wir schliessen hieraus, dass wenn man anstatt x in das Gleichungspolynom eine absteigend geordnete, mit dem Anfangsgliede $ha^0=h$ beginnende Reihe substituirt, ein Substitutionsresultat hervorgeht, in welchem a^2 die höchste darin erscheinende Potenz von a ist, und dass dieses mit a^2 versehene höchste Glied des Substitutionsresultates sich aus drei Bestandtheilen zusammensetzen werde, welche aus den drei durch die Linien h, f und d bezeichneten Gliedern: a^2, $-a^2x$, a^2x^2 hervorgehen. Der in diesem höchsten Gliede erscheinende Coëfficient ist demnach ein Trinom, namentlich das folgende:

$$1 - h + h^2,$$

welches, der Nulle gleichgesetzt, die quadratische Bestimmungsgleichung:

$$h^2 - h + 1 = 0,$$

und demnach die zwei imaginären Werthe

$$h_0 = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-3})$$

liefert. Wir haben somit zwei verschiedene Anfangsglieder der nach absteigenden Potenzen von a geordneten Reihenentwickelung von x kennen gelernt, sie sind:

$$x_0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3}) \text{ und } x_0 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}).$$

Wenden wir uns nun zu dem zweiten Durchschnittspunkte B. Dort schneiden sich die zwei Linien d und a, sie besitzen dort, d. h. für $\xi = \frac{1}{2}$ dieselbe und grösste Ordinate $\eta = 3$, während alle übrigen Linien gleichfalls kleinere Ordinaten aufweisen. Wir schliessen hieraus auf ein Anfangsglied von der Form $h_0 x^{\frac{1}{2}}$. Die zur Bestimmung des Coëfficienten h_0 dienende Gleichung ist aus den durch die Linien d und a bezeichneten Glieder $a^2 x^2$ und $a x^4$ abzuleiten und ist folgende:

$$h^4 + h^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist vom vierten Grade und besitzt die Wurzeln: $0, \sqrt{-1}, -\sqrt{-1}$. Wir erhalten also zwei neue Anfangsglieder von x, nämlich:

$$x_0 = \sqrt{-a}$$

$$x_0 = \sqrt{-a}.$$

Es darf hier nicht befremden, dass diese Bestimmungsgleichung in h dem vierten Grade angehört, in Wahrheit aber nur zwei brauchbare Werthe für h liefert: Fassen wir nämlich die vier verschiedenen Anfangsglieder zusammen, so können wir alle vier dadurch angedeuteten Wurzeln unbeschadet mit einem Anfangsgliede wie $h_0 a^{\frac{1}{2}}$ beginnend ansehen, nur muss dann der Coëfficient h_0 den beiden zuerst aufgefundenen Auflösungen entsprechend den Werth 0 bekommen, und so hätten wir die Bedeutung der zwei gleichen Nullwurzeln dargethan. Wir sehen an diesem Beispiele, dass es sich um das Auffinden bestimmter Durchschnittspunkte handelt, die aber von den am höchsten gelegenen Linien des verzeichneten Systemes gebildet werden.

In der Figur bestehen noch unzählig viele Durchschnittspunkte, aber sie sind für das gegenwärtige Problem, nämlich für die Bestimmung des Anfangsgliedes der absteigenden Entwickelung ohne allen Werth. Das, was wir also hier noch zu geben haben, ist ein Verfahren, diese am höchsten gelegenen Durchschnittspunkte aufzufinden. Hierzu werden uns folgende Bemerkungen leiten: Zwischen je zwei solchen unmittelbar auf einander folgenden Durchschnittspunkten liegt als Verbindungslinie ein abgegrenztes Stück einer Geraden. In unserem Beispiele gehört dieses Stück AB der mit d bezeichneten Linie an. Wären mehrere Durchschnittspunkte vorhanden, so würden mehrere solche Verbindungslinien bestehen. Jede solche Verbindungslinie zwischen zwei nächstgelegenen Durchschnittspunkten ist das Stück einer Geraden im Systeme, welche dort die höchste Lage einnimmt und das grösste η aufweist. Alle diese Stücke reihen sich an einander, und bilden eine zusammenhängende gebrochene Linie. Fügen wir zu diesen abgegrenzten geraden Linienstücken noch jene zwei Linienstücke hinzu, deren eine sich von dem

am meisten links gelegenen Durchschnittspunkte in der Richtung der negativen ξ, deren andere aber von dem am meisten rechts gelegenen Durchschnittspunkte in der Richtung der positiven ξ gleichfalls ins Unendliche sich erstreckt, und welche in diesen Bereichen die höchste Lage einnehmen, so ergänzen sich diese zwei nach einer Richtung hin abgegrenzten, nach der andern aber unbegrenzten Linien mit den früher erwähnten Verbindungslinien zweier nächster Durchschnittspunkte zu einer gebrochenen Linie, die sich von $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$ ausdehnt. In unserem Beispiele ist diese gebrochene Linie die $hABa$. Sie vereinigt in sich jene Linienstücke des verzeichneten Systemes, welche die grössten Ordinaten η aufweisen, und ist aus einer endlichen Anzahl von geraden Stücken zusammengesetzt, die in den Durchschnittspunkten an einander stossen. Die beiden Endstücke dieser gebrochenen Linie sind nach einer Richtung hin unbegrenzt, alle übrigen Mittelstücke sind aber nach beiden Richtungen begrenzt. Diese gebrochene Linie gibt ein Bild von der Abhängigkeit, in welcher der Exponent η der höchsten Potenz von a, die im Substitutionsresultate P_0 erscheint, und der Exponent ξ_0 des Anfangsgliedes der anstatt x substituirten Reihe zu einander stehen.

Wir ersehen hieraus, dass diese zwei Grössen nicht in einem stätigen Zusammenhange zu einander stehen, im Gegentheile besteht eine bestimmte Abhängigkeit nur innerhalb gewisser Grenzen, überschreitet man diesen Bereich, so tritt eine neue Relation zwischen ihnen auf. Wir haben auch den Grund hievon bereits kennen gelernt, und diese Erscheinung findet darin ihre Erklärung, dass das mit der höchsten Potenz von a versehene Glied des Substitutionsresultates je nach dem dem ξ_0 im Anfangsgliede von x ertheilten Zahlwerthe bald aus dem einen, bald aus einem anderen Gliede des Gleichungspolynoms P hervorgeht. Die gebrochene Linie gibt von diesem Überspringen von Glied zu Glied ein klares Bild und gibt auch Aufschluss über die Art und Weise, in welcher dieses Überspringen geschieht. Die gebrochene Linie weist nämlich eine eigenthümliche Gesetzmässigkeit in der Aufeinanderfolge der sie zusammensetzenden Linienstücke aus. Übergehen wir nämlich von $\xi = -\infty$ durch alle möglichen Zwischenstufen zu $\xi = +\infty$, also von kleineren ξ zu immer grösseren, so wird sich zeigen, dass die Linienstücke in solcher Weise auf einander folgen, dass diejenige den Anfang macht, welcher das kleinste χ entspricht, d. h. jene Linie, die mit der Abscissenaxe den kleinsten Winkel einschliesst, und dass die nachfolgenden Linien immer grössere χ aufweisen, also stets grössere Winkel mit der Abscissenaxe einschliessen. Man gelangt also so zur Wahrnehmung, dass sie steigend nach χ geordnet erscheinen. Bei dem gewählten Beispiele findet man diese Bemerkung bestätigt. Es ist auch leicht einzusehen, dass es sich so verhalten müsse, denn von zwei verschiedenen $\eta = \alpha + \chi\xi$ wird bei wachsendem ξ diejenige rascher wachsen, welche das grössere χ besitzt, so zwar, dass wenn eine gewisse lineare Function $\eta = \alpha + \chi\xi$ für ein bestimmtes ξ den grössten Werth erhalten hat, für grössere ξ nur diejenigen Functionen sie erreichen und übersteigen können, welchen ein grösseres χ und demgemäss ein rascheres Wachsthum eigen ist. Die gebrochene Linie wird folglich nach links diejenigen Linienstücke aufweisen, die die kleinsten, nach rechts aber jene, welche die grössten Winkel mit der Abscissenaxe einschliessen, namentlich werden die beiden Endstücke den beiden Functionen mit den extremen Werthen von χ, und zwar das linke Ende der mit dem kleinsten χ, das rechte Ende aber der mit dem grössten χ versehenen Function entsprechen. Zufolge dieser Anordnung der Linienstücke, dass auf ein bestimmtes derselben nur immer ein solches folgen kann, welches einen grösseren Winkel mit der Abscissenaxe einschliesst, wird diese gebrochene Linie ihre Concavität nach auf-, ihre Convexität nach abwärts wenden (wenn es uns gestattet ist

diese nur bei krummen Linien gebräuchlichen Bezeichnungen auf gebrochene auszudehnen). Wir ersehen hieraus, dass, wenn wir von den kleinsten Werthen von ξ zu immer grösseren überschreiten, und zwar durch alle möglichen Zwischenstufen das grösste η sprungweise von einer Geraden des Systemes zu einer anderen, jedoch mit einem grösseren $\mathfrak{x}$ versehenen übergeht. Ein solcher Sprung findet immer Statt bei den Eckpunkten der gebrochenen Linie. Bei diesem Übergange von den kleinsten ξ zu den grössten zeigt sich aber, dass nicht alle Linien des verzeichneten Systemes an der gebrochenen Linie Theil nehmen, sondern nur einige derselben. Von einigen derselben ist es schon von vorne her ersichtlich, dass sie niemals das grösste η aufweisen können. Ergeben sich nämlich mehrere parallele Linien, wie die a und b, die d und e, f und g, h und i, in dem erwähute Beispiele, so behält von solchen parallelen Linien die eine stets die höchste Lage gegen alle übrigen; man kann demnach die Zeichnung in allen solchen Fällen dadurch vereinfachen, dass man von solchen parallelen Linien nur diejenige beibehält, welche unter ihnen stets das grösste η ausweist, alle übrigen aber auslässt. Dies wird geschehen, wenn man von denjenigen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$, welche dasselbe $\mathfrak{x}$ aber verschiedene $\mathfrak{a}$ ausweisen, nur eine einzige, nämlich die mit dem grössten $\mathfrak{a}$ versehene erwählt, und ihr entsprechend die Gerade im Systeme verzeichnet. So würde in dem erwählten Beispiele, welches auch so geschrieben werden kann:

$$(2) \qquad (a+1)x^4 + x^3 + (a^2-1)x^2 - (a^2-2a)x + (a^2-a) = 0$$

die Berücksichtigung der linearen Functionen:

$$\eta = 1 + 4\xi, \quad \eta = 3\xi, \quad \eta = 2 + 2\xi, \quad \eta = 2 + \xi, \quad \eta = 2$$

vollkommen hinreichen. Diese linearen Functionen sind aus den Gradzahlen der Unbekannten x und der mit ihnen multiplicirten Polynome in a gebildet. Durch diesen Vorgang werden also gewisse lineare Functionen beseitigt. Hieraus folgt aber keineswegs, dass alle übrig bleibenden linearen Functionen wirklich an der gebrochenen Linie einen Antheil nehmen, nur lässt sich darüber nicht ohne eine weitere Untersuchung entscheiden. So sehen wir z. B. in dem gewählten Beispiele, dass nur vier derselben, nämlich die: 2, $2+\xi$, $2+2\xi$, $1+4\xi$, zu dem grössten Werthe gelangen, und daher zur gebrochenen Linie einen Bestandtheil liefern, während die 3ξ in der ganzen Ausdehnung der Werthe von ξ unter diesem grössten Werthe bleibt, und daher unter der gebrochenen Linie verläuft. Die lineare Function $2 + \xi$ nimmt für kein endliches Interval, sondern nur für den einzigen Werth $\xi = 0$ an der gebrochenen Linie Antheil.

Die linearen Functionen lassen sich daher in drei Abtheilungen theilen: 1. solche, welche ein Linienstück zur gebrochenen Linie liefern, 2. solche, welche nur einen Punkt und zwar einen Eckpunkt geben, und 3. solche, welche an der gebrochenen Linie gar keinen Antheil nehmen. Wie sich die linearen Functionen eintheilen, eben so trennen sich die Glieder des Gleichungspolynoms in drei Gruppen. Den ersterwähnten linearen Functionen entsprechen nämlich jene Glieder des Gleichungspolynoms, deren jedes für ein bestimmtes Intervall der Werthe ξ das höchste Glied des Substitutionsresultates liefert, hingegen die zuletzt erwähnte Abtheilung von linearen Functionen entspricht allen jenen Gliedern des Gleichungspolynoms, welche für keinen, wie immer gewählten Werth von ξ die höchste Potenz von a im Substitutionsresultate abgeben; in der Mitte zwischen beiden, und an der Grenze derselben, stehen jene Glieder, deren lineare Functionen der zweiten Abtheilung zugezählt wurden. Diese liefern nur für einen speciellen Zahlwerth von ξ gleichzeitig mit anderen einen Bestandtheil zum höchsten Gliede des Substitutionsresultates. Substituirt man anstatt x in das Gleichungs-

polynom eine absteigend geordnete Reihe, deren Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ ist, und ertheilt man dem ξ_0 alle denkbaren Werthe, indem man von dem grössten beginnt und zu immer kleineren, durch alle möglichen Zwischenstufen herabsteigt, so wird sich zeigen, dass anfangs das mit der höchsten Potenz von a versehene Anfangsglied des Substitutionsresultates aus demjenigen Gliede des Gleichungspolynoms hervorgeht, welches x in der höchsten Potenz, und falls mehrere solche sich vorfinden sollten, unter diesen wieder dasjenige, welches a in der höchsten Potenz enthält, dem also das grösste $\mathfrak{x}$, und unter diesen wieder das grösste $\mathfrak{a}$ entspricht. Dies dauert so lange fort, als man sich oberhalb desjenigen Werthes von ξ befindet, der dem am meisten nach rechts gelegenen Eckpunkte in der gebrochenen Linie entspricht. Kommt man endlich auf diesen speciellen Werth von ξ, so liefert dieses nach x höchste Glied noch immer ein mit der höchsten Potenz von a versehenes Glied zum Substitutionsresultate, allein es tauchen noch ein zweites, gelegentlich auch mehrere Glieder auf, welche gleichfalls einen solchen Bestandtheil mit derselben höchsten Potenz von a liefern. Diese Bestandtheile, in der Regel zwei, manchmal aber auch mehrere an der Zahl, setzen nun das höchste Glied des Substitutionsresultates zusammen, während es früher nur aus einem einzigen Gliede hervorging. Verringert man diesen speciellen Werth von ξ um eine beliebig kleine Grösse, so bleibt von all diesen Gliedern, welche die höchste Potenz lieferten, nur ein einziges übrig, und zwar unter ihnen gerade dasjenige, welches das kleinste $\mathfrak{x}$ besitzt. Dieses Glied liefert nun wieder für ein endliches Intervall der Werthe ξ das höchste Glied des Substitutionsresultates ganz allein. Dieses Intervall erstreckt sich auf der Abscissenaxe von dem eben verlassenen Eckpunkte der gebrochenen Linie bis zum nächsten Eckpunkte. Erreicht man endlich, diesem zweiten Eckpunkte entsprechend, den an der unteren Grenze dieses Intervalles liegenden Werth von ξ, so tritt eine ähnliche Erscheinung auf wie früher. Für diesen speciellen Werth von ξ geht nämlich wieder das höchste Glied des Substitutionsresultates nicht aus einem einzigen, sondern aus zweien oder mehreren Gliedern des Gleichungspolynoms hervor. Auf solche Weise übergeht die Rolle, das höchste Glied des Substitutionsresultates zu liefern, von Glied zu Glied des Gleichungspolynoms sprungweise. Der Sprung findet immer Statt, wenn ξ einen Eckpunkt der gebrochenen Linie erreicht, so zwar, dass dort diese Rolle von mehreren Gliedern des Gleichungspolynoms übernommen wird. Auf solche Weise wandert diese Rolle vom höchsten Gliede des Gleichungspolynoms sprungweise zu stets niedrigeren, endlich bis zu dem niedrigsten. Von der Art dieser Wanderung, so wie über die Stelle, wo dieser sprungweise Wechsel der Rollen stattfindet, gibt die gebrochene Linie Aufschluss.

Wie wir gezeigt haben, lassen sich alle auf das Anfangsglied der absteigenden Entwickelungsform von x bezüglichen Fragen aus dem verzeichneten Systeme von geraden Linien beantworten, indem man die Durchschnittspunkte der am höchsten liegenden Linien ins Auge fasst. Die durch diese Durchschnittspunkte gehende gebrochene Linie gibt über die Form des höchsten Gliedes im Substitutionsresultate P_0 die nöthigen Aufschlüsse. Es gehört auch keineswegs zu den schwierigen Aufgaben, diese Durchschnittspunkte und die gebrochene Linie aus dem verzeichneten Systeme abzuleiten. Das hiezu einzuleitende Verfahren ist im Wesentlichen folgendes: Beginnen wir mit derjenigen Geraden, deren Gleichung $\eta = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ das grösste $\mathfrak{x}$ aufweist, also mit derjenigen, welche mit der Abscissenaxe den grössten Winkel einschliesst, und schreiten wir auf ihr in der Richtung der negativen ξ vor, bis wir einem Durchschnittspunkte begegnen. Bei diesem Durchschnittspunkte angelangt, bemerken wir den zugehörigen Werth von ξ; derselbe ist ein brauchbarer Exponent für das Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ und zwar unter

allen der grösste, und notiren zugleich alle Geraden, die sich dort schneiden, oder vielmehr die ihnen zugehörigen Glieder des Gleichungspolynoms; sie liefern die Bestimmungsgleichung für die zugehörigen Coëfficientenwerthe von h_0. Nun verlassen wir diese zuerst betretene Gerade und erwählen dafür die sie schneidende Gerade, oder, falls mehrere solche vorhanden wären, unter ihnen die mit dem kleinsten $\mathfrak{x}$ versehene — diese nämlich bildet das anstossende Stück der gebrochenen Linie — und schreiten auf ihr in der angegebenen Richtung der negativen ξ wieder so lange fort, bis wir abermals einem Durchschnittspunkte begegnen, wo wir uns gerade so wie beim ersten benehmen. Auf solche Weise gelangen wir der Reihe nach zu allen Durchschnittspunkten, und das Verfahren schliesst sich endlich von selbst, weil wir zuletzt zu einer Linie kommen, die keinen Durchschnittspunkt in der angegebenen Richtung mehr aufweist. Bei diesem Verfahren ergeben sich die Werthe von ξ_0 alle, und zwar in fallender Reihenfolge. Gleichzeitig werden auch die Bestimmungsgleichungen für die zugehörigen Coëfficienten erhalten, die meistentheils binomisch sind. Man könnte dieses Verfahren auch entsprechend modificiren, so dass man, am linken Ende der gebrochenen Linie beginnend, die Werthe von ξ_0 in steigender Reihenfolge bekäme.

Es ist wohl von selbst einleuchtend, dass dies nicht die einzige Constructionsweise sei, welche zu dem verlangten Ziele führt, im Gegentheile lässt sich sehr leicht die Anzahl der möglichen Constructionsweisen angeben. In der That handelt es sich stets immer nur um eine graphische Darstellung der durch die Gleichungen $\eta = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ festgestellten Abhängigkeit. Allein man könnte diese vier Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{x}$, ξ und η unter einander die ihnen hier angewiesenen Bedeutungen vertauschen lassen, und würde dadurch zu anscheinend verschiedenen, vielleicht sogar in gewisser Hinsicht bequemeren Constructionen gelangen. Wir wollen hier uns jedoch mit geometrischen Constructionen nicht länger befassen, sondern im Gegentheile dieselben so bald als möglich verlassen und durch ein analytisches Verfahren ersetzen, welches jedenfalls alle geometrischen Constructionen an Bequemlichkeit und Kürze übertrifft. Wir hatten überhaupt keine andere Absicht, als durch ein geometrisches Bild die Klarheit zu erhöhen, um das analytische Verfahren, welches wir nun auseinandersetzen werden, anschaulich zu machen.

§. 3.

Um die analytische Verfahrungsweise abzuleiten, haben wir nur jeden einzelnen geometrischen Vorgang durch die entsprechende analytische Operation zu ersetzen. Wir beginnen also damit, aus den einzelnen Gliedern des Gleichungspolynoms P auf die bekannte Weise die linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ abzuleiten, wobei wir gleich, wie in der Zeichnung die parallelen überflüssigen Linien beseitigt wurden, diejenigen linearen Functionen zu bilden unterlassen, welche einem Gliede entsprechen, welches mit einem anderen dieselbe Potenz von x gemeinschaftlich hat, aber eine niedrigere Potenz von a ausweist. Dies werden wir am schnellsten erreichen, wenn wir, wie im Beispiele (2) geschehen ist, die Potenzen von x als Factoren sondern, und als zweiten Factor, gewissermassen als Coëfficienten, das damit multiplicirte Polynom nach absteigenden Potenzen von a geordnet hinschreiben. Dadurch sind unmittelbar diejenigen Glieder ersichtlich gemacht, welche bei gleicher Potenz von x die höchste von a besitzen. Die so gebildeten linearen Functionen ordne man absteigend nach den Zahlwerthen von $\mathfrak{x}$, ja man wird sie schon in solcher Weise geordnet erhalten, wenn das Gleichungspolynom nach absteigen-

den Potenzen von x geordnet ist. Nun beginnt ein regelmässiges Untersuchungsverfahren, analog dem Fortschreiten auf der gebrochenen Linie in der Richtung der negativen ξ bis zum ersten sich darstellenden Durchschnittspunkte. Diese Untersuchung beginnt mit der ersten der auf die angegebene Weise geordneten linearen Functionen, und bezweckt die Ermittlung und Vergleichung der den Durchschnittspunkten dieser Linie mit den übrigen im Systeme entsprechenden Werthe von ξ. Von all diesen Werthen ist der grösste auszuwählen und als Exponent ξ_0 zu notiren, gleichzeitig sind alle jene Glieder zu bezeichnen, deren lineare Functionen diesen Durchschnittspunkt bilden helfen, weil aus ihnen die Bestimmungsgleichung für h_0 hervorgeht. Zu diesem Ende subtrahirt man diese erste lineare Function der Reihe nach von allen übrigen, setzt jeden dieser Unterschiede, welche alle ξ in sich enthalten, der Nulle gleich und sucht die Genüge leistenden Werthe von ξ. Von all diesen Genüge leistenden Werthen bestimmt man den grössten und bezeichnet ihn als brauchbaren Werth von ξ_0. Um die Bestimmungsgleichung für das zugehörige h_0 zu bilden, notirt man jene Glieder des Gleichungspolynoms, welche der subtrahirten linearen Function und jener anderen entsprechen, aus welcher eben jener Rest hervorgegangen ist, der gleich Null gesetzt, das grösste ξ_0 geliefert hat. Ist dieser grösste Werth ξ_0 mehrmals erhalten worden, so sind alle diese entsprechenden Glieder zu notiren. Hiemit ist nun eine Untersuchung geschlossen und es kommt eine nächste Function an die Reihe, welche derselben Untersuchung unterworfen wird. Allein man geht nicht zur nächstfolgenden, hier zur zweiten linearen Function über, da es sich treffen kann, dass dieselbe gar nie den grössten Werth erlangt und somit auch an der gebrochenen Linie keinen Antheil nimmt. Die vorhergegangene Untersuchung der ersten linearen Function lehrt aber schon darüber das Nöthige, denn sie zeigt zugleich an, welche Function in dem angrenzenden Bereiche den grössten Werth besitzt und demnach zunächst der Untersuchung zu unterziehen ist. Diese Function findet sich nämlich unter den bereits notirten vor, welchen der gefundene Werth von ξ_0 als Auflösung des der Nulle gleichgesetzten Unterschiedes entspricht. Sollten mehrere solche zugegen sein, so ist unter ihnen die mit dem kleinsten χ versehene, also die späteste diejenige, welche nun an die Reihe kommt. Die bisherige Untersuchung hat auch gelehrt, dass alle hiebei vielleicht in der Reihenfolge übersprungenen Functionen niemals zum grössten Werthe gelangen, und sie können daher bei jeder weiteren Untersuchung unberücksichtigt bleiben. Man wird daher mit dieser für die unmittelbar nächstfolgende Untersuchung bezeichneten Function gerade so verfahren, wie mit der ersten, sie nur mit den darauffolgenden Functionen combinirend. Dieses Verfahren führt von selbst zu den verschiedenen zu untersuchenden Functionen, und schliesst sich, hinreichend oft wiederholt, gleichfalls von selbst, wenn sie zur letzten derselben geleitet hat. Auf solche Weise gelangt man durch ein einfaches combinatorisches Verfahren zu allen möglichen Werthen von ξ_0 und zu den entsprechenden Gliedersummen, und hat nur noch die Substitution $a = 1$, $x = h_0$ in dieselben auszuführen und diese Ausdrücke gleich Null zu setzen, um zugleich auch die zugehörigen Werthe von h_0 durch Auflösung von Zahlengleichungen zu finden.

Wir wollen nun an der früher behandelten Gleichung dieses analytische Verfahren zeigen. Die Gleichung ist:

$$(a + 1)\, x^4 + x^3 + (a^2 - - 1)\, x^2 - (a^2 - 2\, a)\, x + a^2 - a = 0,$$

die linearen Functionen sind daher folgende:

$$1 + 4\,\xi \quad , \quad 3\,\xi \quad , \quad 2 + 2\,\xi \quad , \quad 2 + \xi \quad , \quad 2$$

1. Untersuchung der Function $1 + 4\xi$. Die Differenzen, der Nulle gleichgesetzt, geben die Gleichungen:

$$-1- \quad \xi = 0 \quad , \quad 1 - 2\xi = 0 \quad , \quad 1 - 3\xi = 0 \quad , \quad 1 - 4\xi = 0,$$

welchen die Werthe $\xi = -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ entsprechen. Unter ihnen ist $\xi = \frac{1}{2}$ der grösste und somit zu notirende Werth von ξ_0. Ihm entsprechend besitzen die zwei linearen Functionen $1 + 4\xi$ und $2 + 2\xi$ gleiche, alle übrigen aber kleinere Werthe. Hieraus folgt daher die Bestimmungsgleichung für den zugehörigen Coëfficienten h_0 aus den beiden Gliedern $a x^4 + a^2 x^2$ und ist folgende:

$$h^4 + h^2 = 0.$$

Sie liefert zwei brauchbare Werthe $h = +\sqrt{-1}$ und $h = -\sqrt{-1}$, ferner zwei Nullwurzeln, welche nur besagen, dass noch zwei Auflösungen bestehen, die jedoch mit einer niedrigen Potenz von a beginnen. Es ist hiermit zugleich die lineare Function $2 + 2\xi$ für die nächstfolgende Untersuchung bezeichnet.

2. Untersuchung der Function $2 + 2\xi$. Die Differenzen sind gleich Null gesetzt folgende:

$$-\xi = 0 \quad , \quad -2\xi = 0,$$

beide liefern denselben Werth $\xi = 0$. Hieraus folgt, dass für $\xi = 0$ die drei linearen Functionen: $2 + 2\xi$, $2 + \xi$ und 2 den grössten Werth gemeinschaftlich besitzen. Der Werth $\xi_0 = 0$ ist zu notiren, so wie die Summe der drei Glieder $a^2 x^2 - a^2 x + a^2$. Die Bestimmungsgleichung für den zugehörigen Coëfficienten ist:

$$h^2 - h + 1 = 0.$$

Ihr entsprechen zwei Werthe, nämlich $h_0 = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$ und $h_0 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$. Wir gelangen also hier auf dem analytischen Wege zu denselben Anfangsgliedern, wie früher durch geometrische Constructionen. Sie sind folgende:

$$x_0 = \sqrt{-a}$$
$$x_0 = -\sqrt{-a}$$
$$x_0 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{-3})$$
$$x_0 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{-3}).$$

Es ist vielleicht nicht unerspriesslich, hier an diesem Beispiele eine bequemere Art, diese Rechnungen zu Papier zu bringen, anzuführen.

Sie ist in diesem Schema dargestellt:

$$(a + 1)x^4 + x^3 + (a^2 - 1)x^2 - (a^2 - 2a)x + a^2 - a = 0.$$

Erste Reihe von Quotienten:

$$\frac{-1}{1} \qquad \frac{+1}{2} \qquad \frac{+1}{3} \qquad \frac{+1}{4}$$

unter ihnen ist $\frac{1}{2}$ am grössten und somit zu notiren.

Zweite Reihe von Quotienten:

$$\frac{0}{1} \qquad \frac{0}{2}$$

also 0 der zweite und letzte zu notirende Werth von ξ_0.

Die Bestimmungsgleichungen für h_0 sind:

$$\text{für } \xi_0 = \tfrac{1}{2} \qquad h^4 + h^2 = 0$$
$$\text{für } \xi_0 = 0 \qquad h^2 - h + 1 = 0\,.$$

Dabei ist die Rechnung auf den kleinsten Raum zusammengepresst, und die Bildung der linearen Functionen umgangen. Die Bildung der Quotienten geschieht nach einem einfachen unmittelbar ersichtlichen Gesetze. Sie sind nämlich Brüche, deren Zähler die Differenz des Exponenten von a ist, erhalten durch Subtraction dieses Exponenten im untersuchten Gliede von dem im nachfolgenden. Der Nenner aber stellt die im entgegengesetzten Sinne erhaltene Differenz der Exponenten von x dar. In jeder solchen Reihe wird die grösste Zahl bezeichnet und hierauf die Bestimmungsgleichung aus den entsprechenden Gliedern, die hier gleichfalls in die Augen fallen, abgeleitet. Darunter befindet sich die zweite Reihe, entsprechend der zweiten bei dem Gliede a^2x^2 beginnenden Untersuchung.

§. 4.

Wir haben in dem Vorhergehenden eine Methode auseinandergesetzt, die Anfangsglieder für die absteigende Entwickelung von x in Reihenform zu bestimmen, und sind, durch geometrische Betrachtungsweisen geleitet, zu einer Construction und später zu einer analytischen Regel gelangt, welche die Gleichungen für den Exponenten ξ_0 und für den Coëfficienten h_0 liefert. Diese Methode stimmt mit jenem Verfahren überein, welches die bekannten Regeln zur Division und zum Wurzelausziehen vorschreiben, und es erscheint somit, wie zu erwarten stand, die Auflösungsart der Gleichungen des ersten Grades und der binomischen höheren Grades als ein specieller Fall des hier behandelten Verfahrens. Es ist zugleich ersichtlich, dass dort diese eigenthümliche Untersuchung, wie sie hier auseinandergesetzt wurde, überflüssig erscheint, weil nur eine einzige Gleichung des ersten Grades zur Bestimmung von ξ_0 vorliegt, und daher jene Unbestimmtheit nicht besteht, welche diese Untersuchungen nothwendig machte.

Es bleibt uns nun noch übrig zu zeigen, in wie ferne unsere frühere Behauptung wahr sei, dass die Bestimmung des Werthes von ξ_0 von der Auflösung eines Systemes linearer Ungleichungen abhängig sei und dass überhaupt zwischen der Auflösung von Buchstabengleichungen und der Theorie der Ungleichungen ein inniger Zusammenhang bestehe. Es wurde von uns anfänglich zur Bestimmung der Werthe von ξ_0 eine geometrische Construction gebraucht, bestehend aus einem Systeme sich verschiedenartig schneidender Geraden. Das ganze Verfahren bestand dort in dem Abscheiden einer gebrochenen Linie, welche aus den höchstgelegenen Linienstücken zusammengesetzt war. Diese gebrochene Linie begrenzt einen Theil der Ebene, welche sich oberhalb sämmtlicher Linien des verzeichneten Systemes befindet, und die Gestalt eines Polygones besitzt, welches sich nach oben, und zu beiden Seiten ins Unendliche ausdehnt, nach unten zu aber eben diese gebrochene Linie als Begrenzungslinie besitzt. Die Punkte, welche in diesem Polynome liegen, weisen sämmtlich grössere Ordinaten η auf, als alle

Punkte der verzeichneten Geraden die dasselbe ξ besitzen, so zwar, dass sie ein System von Ungleichungen erfüllen, deren jede die Form

$$\eta > \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\,\xi$$

besitzt. Einer jeden Geraden des Systemes, also jedem einzelnen Gliede $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\xi}$ des Gleichungspolynomes entspricht eine solche Ungleichung. Es ist leicht einzusehen, dass dieses System von Ungleichungen, deren Anzahl gleichkommt der Anzahl der Glieder im Gleichungspolynome, und deren Ableitungsweise aus den Exponenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ der einzelnen Glieder ersichtlich ist, diesen abgegrenzten Theil der Ebene bestimmt, denn jeder in diesem Polygone liegende Punkt und nur diese erfüllen alle diese Ungleichungen.

Zu den Auflösungen dieser Ungleichungen sind die auf der gebrochenen Linie liegenden Punkte eigentlich nicht mehr zu zählen, weil sie anstatt einer Ungleichung die entsprechende Gleichung

$$\eta = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\,\xi$$

erfüllen. In Bezug dieser Eigenschaft nun können wir sie als Grenzwerthe der Auflösungen betrachten, da sie in der Mitte stehen zwischen den Genüge leistenden und widersprechenden Punkten. Die Punkte der gebrochenen Linie zeigen aber ein doppeltes Verhalten. Die Punkte in der Mitte einer Polygonseite liegen nur auf einer einzigen Linie des Systemes, aber oberhalb aller übrigen; sie verwandeln daher eine einzige Ungleichung in eine Gleichung und erfüllen alle übrigen Ungleichungen. Hingegen die Eckpunkte der gebrochenen Linie liegen gleichzeitig auf zwei, gelegentlich auf mehreren Linien des verzeichneten Systemes, und oberhalb aller übrigen. Diese Eckpunkte verwandeln daher zwei, manchmal auch mehrere Ungleichungen in Gleichungen, während sie die übrigen erfüllen. Wir kommen hiedurch zu der Überzeugung, dass man bei einem Systeme von Ungleichungen nicht wie bei den Gleichungen blos mit Genüge leistenden und mit widersprechenden Werthen zu thun hat. Nebst den Auflösungen und den widersprechenden Werthen bestehen hier noch die Grenzwerthe, die zwischen beiden die Mitte halten. Als Grenzwerthe bezeichnen wir nämlich alle jene Werthe der Unbekannten, welche eine oder mehrere Ungleichungen zwar nicht mehr, aber die entsprechenden Gleichungen erfüllen. Die Grenzwerthe theilen sich wieder in mehrere Abtheilungen. Die Grenzwerthe erfüllen nämlich ausser den Ungleichungen eine gewisse Anzahl von Gleichungen, in die sie die Ungleichungen verwandeln. Nach der Anzahl dieser Gleichungen (in so weit sie sämmtlich von einander verschieden sind) lassen sich die Grenzwerthe in Ordnungen eintheilen. Es ist klar, dass die Anzahl dieser von einander verschiedenen Gleichungen nicht die Anzahl der im Systeme von Ungleichungen enthaltenen Unbekannten überschreiten kann, weil bekanntlich bei Gleichungen niemals die Anzahl derselben die der Unbekannten übersteigen darf. Hier, wo nur zwei Unbekannte (ξ und η nämlich) bestehen, werden daher gleichfalls nur Grenzwerthe der ersten und der zweiten Ordnung vorkommen. Die Grenzwerthe der ersten Ordnung sind durch die Polygonseiten, die der zweiten Ordnung durch die Ecken des Polygons dargestellt. Es ist nach diesen Erklärungen klar, dass nur die Grenzwerthe der höchsten, hier zweiten Ordnung in endlicher Zahl, vorhanden sind, da jede Unbekannte einen bestimmten Zahlwerth bekommt, durch die gleiche Anzahl von Gleichungen. Alle anderen Grenzwerthe sind in unendlich grosser Anzahl vorhanden, und ihre Aufzählung daher unmöglich. Sie bilden aber zusammenhängende und abgegrenzte Gebilde, mit einer bestimmten Anzahl von Dimensionen. In dem gegenwärtigen Falle stellt das Polygon die

Auflösung des Systemes linearer Ungleichungen mit zwei Unbekannten vor und ist ein Gebilde von zwei Dimensionen, entsprechend den zwei Unbekannten ξ und η. Dieses Polygon ist zunächst begrenzt von einer Anzahl von Seiten, nämlich abgegrenzten geraden Linien. Diese Linien sind die Grenzwerthe der ersten Ordnung, und besitzen um eine Dimension weniger, weil eine Unbekannte durch die auftretende Gleichung schon bestimmt ist. Diese Polygonseiten sind wieder abgegrenzt durch die Eckpunkte oder die Grenzwerthe der zweiten Ordnung, Gebilde von Null Dimensionen, da zwei Gleichungen keiner der zwei Unbekannten mehr einen Spielraum für ihre beliebige Wahl gestatten. Da nur die Grenzwerthe der höchsten Ordnung aufzählbar sind, so ist es eigentlich immer nur ihre Bestimmung, um die es sich bei der Auflösung eines Systemes linearer Ungleichungen handelt. Wie dieselben durch ein einfaches combinatorisches Verfahren ermittelt werden, wurde eben früher gezeigt, nur gelangten wir zu diesem Verfahren auf einem anscheinend ganz verschiedenen Wege, nämlich durch geometrische Betrachtungen. Das Gesagte dürfte hinreichen, um zu zeigen, dass die Bestimmung des Exponenten ξ_0 im Anfangsgliede eigentlich von der Auflösung eines Systemes von Ungleichungen zwischen zwei Unbekannten ξ und η und namentlich von der Bestimmung der Grenzwerthe zweiter Ordnung abhängig sei.

Es ist hier gewiss nicht überflüssig, dem Leser einen kurzen Überblick zu geben über die Art, wie das so eben erledigte Problem von verschiedenen Mathematikern behandelt wurde.

Der erste glückliche Versuch, dieses Problem zu erledigen, findet sich in den Werken Newton's. Derselbe nahm zu einer geometrischen Construction seine Zuflucht und belegte dieselbe mit dem Namen: „analytisches Parallelogramm“. Das Verfahren ist dabei folgendes: Man denke sich auf der Ebene zwei orthogonale Coordinatenaxen angenommen, und nun einem jeden einzelnen Gliede $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes P einen Platz auf derselben angewiesen, indem man $\mathfrak{x}$ als Abscisse und $\mathfrak{a}$ als die zugehörige Ordinate eines Punktes ansieht. Hat man in solcher Weise für ein jedes einzelne Glied des Gleichungspolynoms den entsprechenden Punkt oder Platz construirt, so hat man zuletzt eine gewisse Anzahl von Punkten auf der Ebene zerstreut, und nun verbinde man die äussersten dieser Punkte durch gerade Linien, jedoch dermassen, dass ein geschlossenes Polygon mit lauter auswärts springenden Winkeln entsteht, ausserhalb dessen kein Punkt sich befindet. Die construirten Punkte liegen nun alle entweder im Innern dieses Polygons oder auf seiner Begrenzung und diese letzteren sind entweder Eckpunkte des Polygones oder liegen auf einer Polygonseite. Mit Hilfe dieses Polygones nun lassen sich alle Anfangsglieder der Wurzeln der Gleichung bilden und zwar sowohl in absteigender wie in aufsteigender Entwickelungsform. Will man x absteigend nach Potenzen von x entwickeln, so hat man nur jene Polygonseiten zu berücksichtigen, welche die obere Begrenzung des in Rede stehenden Polygones bilden. Jede solche Polygonseite bezeichnet gewisse Glieder des Gleichungspolynomes, diejenigen nämlich, deren Punkte auf dieser Polygonseite liegen oder ihre Eckpunkte bilden. Die Summe aller dieser Glieder $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$, welche einer bestimmten Polygonseite angehören, gleich Null gesetzt, liefert eine partielle Gleichung, und die Auflösung derselben nach x eine gewisse Anzahl von Anfangsgliedern. Die Auflösung dieser partiellen Gleichungen, wiewohl sie Buchstabengleichungen sind, lässt sich ohne Schwierigkeit nach denselben Methoden bewerkstelligen, welche für numerische Gleichungen gelten. Jede obere Polygonseite liefert eine solche partielle Gleichung und diese wieder gewisse Anfangsglieder.

Diese von Newton angewendete Construction ist der Form nach wohl wesentlich verschieden von der hier auseinandergesetzten, unterscheidet sich von ihr aber nur darin, dass $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{a}$ die Rolle von ξ und η übernommen haben.

Später wurde die von Newton angewendete Methode: das analytische Parallelogramm von De Gua in einer höchst unwesentlichen Weise modificirt und mit einem neuen Namen: analytisches Dreieck belegt. Der Grund dieser Reform war das Unrichtige der Benennung Parallelogramm. Die Glieder eines Gleichungspolynomes werden nämlich, in der eben früher angegebenen Weise durch Punkte auf der Ebene bezeichnet, nur dann ein Parallelogramm formiren, wenn wirklich alle Potenzen, a^0, a, a^2, ... a^n mit x^0, x, x^2, x^3, . . . x^m in allen möglichen Weisen combinirt erscheinen. Würden nicht alle diese Combinationen, sondern nur alle jene derselben erscheinen, welche die Gesammtgradzahl m nicht übersteigen, so würden die Punkte ein rechtwinkeliges Dreieck bilden. Dies war die Veranlassung zur neuen Benennung: analytisches Dreieck. Sie ist aber eben so unrichtig wie die frühere, weil die Punkte in der Ebene jedes beliebige Polygon formiren können.

Wichtiger waren die darauffolgenden Bestrebungen von Lagrange. Derselbe ersetzte die erwähnte Construction durch ein rein analytisches Verfahren, welches wir in §. 3 auseinandergesetzt und an einem Beispiele in Anwendung gebracht haben. Hiemit hätte dieses Problem überhaupt seinen vollkommenen Abschluss gefunden, wenn man eben nur den sehr speciellen Fall einer einzelnen Buchstabengleichung mit nur zwei Buchstabengrössen zum Gegenstande gewählt hätte. Allein über diese Grenze hinaus verlieren alle bisher erwähnten Methoden ihre Wirksamkeit.

Fourier aber ging noch weiter und behandelte dieses Problem von dem allgemeinsten Gesichtspunkte ausgehend und verschaffte dadurch der von Newton und Lagrange für einen sehr speciellen Fall entwickelten Methode den Höhepunkt der grössten Allgemeinheit, so zwar dass sie in gleicher Weise sowohl auf einzelne Gleichungen wie auch auf Systeme von beliebig vielen Gleichungen mit einer oder mit einer beliebig grossen Anzahl von überschüssigen Buchstabengrössen ihre Anwendung verstattet. Aus den hinterlassenen Andeutungen dieses grossen Mathematikers geht hervor, dass derselbe zwei neue Wege zur Behandlung dieses Problemes gefunden hat. Erstlich nämlich eine geometrische Construction, welche von der von Newton angewendeten verschieden ist und auch über die Natur des Problemes ein neues Licht verbreitet. Sie wurde von uns im Vorhergehenden erörtert in ihrer Anwendung auf den hier behandelten speciellen Fall einer einzigen Gleichung mit nur zwei Buchstabengrössen a, x. Dieselbe verstattet aber eine Verallgemeinerung auch auf andere Gleichungen und Systeme von zwei solchen, so lange die Gesammtzahl der darin erscheinenden Buchstaben die Zahl drei nicht übersteigt. Sie verliert aber gleichfalls ihre Anwendbarkeit vollkommen, sobald mehr als drei Buchstaben erscheinen. Um nun auch diese complicirteren Fälle der Auflösung zugänglich zu machen, hat Fourier dieses Problem unabhängig gemacht von jeder geometrischen Betrachtung und ein rein analytisches Verfahren an seine Stelle gesetzt, welches auch selbst über die Anzahl drei hinaus ins Unbegrenzte Giltigkeit hat. Dieses analytische Verfahren ist wesentlich neu und, wie man mit Recht behaupten kann, selbst in seinen einfachsten Grundzügen der bestehenden Analysis fremd, und wurde von ihrem Erfinder mit der Bezeichnung: Analyse der linearen Ungleichungen belegt. Diese bietet den allgemeinen Schlüssel für alle Buchstabengleichungen und Systeme von solchen. Alle früheren Bestrebungen von Newton und Lagrange sind eigentlich nur eine sehr specielle Behandlung dieses allgemeinen Problemes.

Die zuerst erwähnte, von Fourier herrührende Construction hat auchkeineswegs den Zweck, wirklich angewendet zu werden, indem die analytische Behandlung weit bequemer ist, allein sie bereitet den Leser durch die Betrachtung der speciellen Fälle vor zum besseren Verständnisse des complicirten Falles und seiner allgemeinen Behandlung mit Hilfe der Analyse der linearen Ungleichungen. Von diesem Gesichtspunkte soll auch der Leser die im Vorhergehenden gegebene Darstellung betrachten, um sich keinen irrigen Begriff von dem Werthe der von Fourier herrührenden Arbeiten zu bilden.

§. 5.

Wir wollen nun die Bestimmungsgleichung für den Coëfficienten h_0 noch einer genaueren Betrachtung unterziehen und daran einige für die Folge wichtige Bemerkungen knüpfen. Diese Bestimmungsgleichung leitet sich ab aus gewissen Gliedern des Gleichungspolynoms, denjenigen nämlich, welche für den bestimmten Werth von ξ_0 zu dem höchsten Gliede des Substitutionsresultates einen Bestandtheil liefern. Diese Gleichung ist in der Regel einem höheren Grade angehörig, weil in ihren Gliedern die Unbekannte h_0 zu denselben Potenzen erhoben erscheint, wie die Unbekannte x in den entsprechenden Gliedern des Gleichungspolynoms. Ist die ursprünglich gegebene Gleichung $P = o$ ganz und rational, so ist es auch diese Bestimmungsgleichung für h_0 und liefert daher in der Regel so viele Werthe dieser Grösse, als ihre Gradzahl Einheiten enthält. Unter diesen Auflösungen können alle jene, welche von Null verschieden sind, als brauchbare Coëfficientenwerthe angenommen werden und es ergeben sich auf solche Weise eben so viele verschiedene Anfangsglieder, entsprechend der gefundenen Gradzahl ξ_0, als diese Bestimmungsgleichung von Null und von einander verschiedene Auflösungen zulässt. Sehr oft treten aber mehrere Nullwerthe für h_0 auf, und zwar jedesmal dann, wenn noch ein kleinerer Werth von ξ_0 besteht. Die Anzahl dieser Nullwerthe h_0, welche in einer gleichen Anzahl Factoren h ihren Grund hat, welche im ersten Theile der Bestimmungsgleichung erscheinen, kommt dann stets gleich der Anzahl der Auflösungen, welche mit einem niedrigeren significativen Gliede bei der Reihenentwickelung beginnen. Nur wenn ξ_0 unter allen möglichen Werthen den kleinsten besitzt, weist die Bestimmungsgleichung in h keine Nullwurzeln auf. Von grösserer Wichtigkeit als die Nullwurzeln, ist für die wirkliche Auflösung die Berücksichtigung gleicher Wurzeln h_0. Zeigt die Gleichung in h solche gleiche Wurzeln, so schliessen wir hieraus auf ein Anfangsglied, welches zwei oder mehreren Auflösungen gemeinschaftlich zukommt, wie die späteren Untersuchungen darthun werden. Die Anzahl dieser im Anfangsgliede übereinstimmenden Auflösungen wird durch die Anzahl der gleichen Wurzeln angegeben. Dass das Auftreten solcher gleicher Wurzeln h_0 wirklich zwei oder mehrere Auflösungen anzeige, welche dasselbe Anfangsglied gemeinschaftlich besitzen, werden wir erst später nachzuweisen im Stande sein, wo wir zeigen werden, dass man bei der Bestimmung der Folgeglieder entweder zu dem einen Anfangsgliede mehrere Systeme von Folgegliedern, oder zu dem einen Anfangsgliede nur eine einzige Reihe von Folgegliedern oder wenigstens eine geringere Anzahl solcher findet, die aber alle durch Gleichungen höheren Grades mit gleichen Wurzeln gegeben sind. Im ersten Falle bestehen also wirklich mehrere Auflösungen, die dasselbe Anfangsglied gemeinschaftlich besitzen, und die sich erst in den Folgegliedern von einander unterscheiden, im zweiten jedoch lässt sich erweisen, dass diese einzige Auflösung nicht nur der Gleichung $P = o$, sondern auch einer oder mehreren der daraus

abgeleiteten, nämlich den $\frac{dP}{dx}=o$, $\frac{d^2P}{dx^2}=o$ u. s. w. Genüge leistet, womit der Beweis hergestellt ist, dass $P=o$ gleiche Wurzeln besitze. Das Auftreten gleicher Wurzelwerthe für h_0 hat auch, wie wir später zeigen werden, auf die Bestimmung der Folgeglieder Einfluss. Während sonst jedes derselben durch die Auflösung von Gleichungen des ersten Grades erhalten wird, ist hier die Auflösung einer Gleichung höheren Grades erforderlich, deren Gradzahl mit der Anzahl der gleichen Wurzeln h_0 übereinstimmt. Diese Gleichung höheren Grades liefert zu dem gemeinschaftlichen Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ die zugehörigen ersten Folgeglieder $h_1 a^{\xi_1}$ und zwar entweder deren mehrere und von einander verschiedene, oder es ergeben sich unter ihnen wieder gleiche. Sobald nur von einander verschiedene Folgeglieder und keine gleichen mehr erhalten werden, ist jede einzelne Auflösung gesondert, nur geschieht dies nicht durch das Anfangsglied, sondern erst durch das zweite Glied der Entwickelung, und das weitere Verfahren zur Bestimmung der übrigen Glieder ist jetzt das gewöhnliche, beruhend auf der Auflösung von Gleichungen des ersten Grades. Sind jedoch unter den erhaltenen Folgegliedern gleiche, begründet in dem Auftreten gleicher Wurzeln h_1; so sind die ihnen entsprechenden Auflösungen x noch nicht getrennt und die weitere Bestimmung der Folgeglieder hängt noch von einer Gleichung höheren Grades ab. Auf solche Art bewirkt das Auftreten gleicher Wurzeln h_0 eine Veränderung des weiteren Approximations-Verfahrens, welches sich erst dann in das gewöhnliche verwandelt, wenn durch Bestimmung einer hinreichenden Anzahl von Anfangsgliedern der Reihe die Trennung der Wurzeln x erfolgt ist.

Da wir über die Beschaffenheit der Exponenten α und χ in den einzelnen Gliedern des Gleichungspolynomes keinerlei Beschränkung getroffen haben, und daher unsere Untersuchungen auch für gebrochene und irrationale solche Gleichungspolynome gelten, so müssen wir auch bezüglich dieser, besonders der letzteren einige Bemerkungen folgen lassen. Erscheinen nämlich unter den Exponenten χ auch gebrochene Zahlwerthe, so kann es sich treffen, dass die Bestimmungsgleichung in h irrational ist, und ihr gelegentlich gar keine Auflösung zukommt, weil man verhalten ist, die Wurzelgrösse in ihrer bestimmten Bedeutung zu nehmen, keineswegs aber die Berechtigung besitzt, ihr alle möglichen Bedeutungen zu ertheilen, oder mit andern Worten, die entsprechende rationale Gleichung in allen ihren Auflösungen zu benützen. In einem solchen Falle lässt sich daher wohl ein den Bedingungen entsprechendes ξ_0, aber kein Werth von h_0 auffinden, und es besteht demnach für diesen Werth von ξ_0 keine Auflösung x. Wir gelangen auf solche Weise zu der Einsicht, dass irrationale Buchstabengleichungen mitunter keine Auflösung zulassen, genau so wie dies bei den irrationalen Zahlengleichungen der Fall ist.

§. 6.

Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Anfangsglieder für die absteigende Entwickelung ist sonach folgende: Man ordne das Gleichungspolynom P in erster Instanz absteigend nach Potenzen von x, d. h. man bringe dasselbe auf die Form:

$$A_1 x^{\chi_1} + A_2 x^{\chi_2} + A_3 x^{\chi_3} + \ldots\ldots + A_m x^{\chi_m} = o;$$

die Potenzen A_1, A_2, A_3, ... A_m aber ordne man gleichfalls nach Potenzen von a absteigend. Nun bilde man aus einem jeden solchen Bestandtheile:

$$A_1 x^{\chi_1} \ , \ A_2 x^{\chi_2} \ , \ A_3 x^{\chi_3} \ , \ \ldots\ldots \ A_m x^{\chi_m}$$

des Gleichungspolynomes oder vielmehr nur aus den Exponenten $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ ihres mit der höchsten Potenz von a versehenen Gliedes:

$$H_1 a^{\mathfrak{a}_1} x^{\mathfrak{x}_1} \ , \ H_2 a^{\mathfrak{a}_2} x^{\mathfrak{x}_2} \ , \ H_3 a^{\mathfrak{a}_3} x^{\mathfrak{x}_3} \ , \ \ldots\ldots \ H_m a^{\mathfrak{a}_m} x^{\mathfrak{x}_m}$$

eine lineare Ungleichung durch das hier von selbst einleuchtende Verfahren:

$$\eta > \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi \ , \ \eta > \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{x}_2 \xi \ , \ \eta > \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{x}_3 \xi \ , \ \ldots\ldots \ \eta > \mathfrak{a}_m + \mathfrak{x}_m \xi$$

und suche nun die diesem Systeme von Ungleichungen entsprechenden Grenzwerthe der zweiten Ordnung. Hat man dieselben alle gefunden, — wir wollen sie hier mit: ξ_0' , ξ_0'' , ξ_0''' , $\ldots\ldots \xi_0^{(r)}$, η_0' , η_0'' , η_0''' , $\ldots\ldots \eta_0^{(r)}$ bezeichnen — und gleichzeitig für jeden solchen Grenzwerth diejenigen Ungleichungen, welche in Gleichungen übergehen, oder vielmehr die ihnen correspondirenden Glieder des Gleichungspolynomes P notirt, so hat man nur noch einem jeden einzelnen Grenzwerthe entsprechend eine numerische Gleichung zu bilden und aufzulösen. Man substituirt nämlich in die entsprechenden und schon notirten Glieder $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes, welche dem eben hervorgehobenen Grenzwerthe angehören, $x = h$, $a = 1$, summirt sie dann und setzt diese Summe gleich Null, so hat man die gesuchte numerische Gleichung in h und löst nun dieselbe auf. Die von Null verschiedenen Wurzeln sind brauchbare, zu dem hervorgehobenen Grenzwerthe ξ_0 gehörige Werthe von h_0. Vollführt man diese Untersuchung der Reihe nach für alle früher ermittelten Grenzwerthe, so erhält man eine Reihe von zusammengehörigen Werthen der beiden Grössen ξ_0 und h_0:

$$\begin{matrix} \xi_0' \ , \ \xi_0'' \ , \ \xi_0''' \ , \ \ldots\ldots \ \xi_0^{(s)} \\ h_0' \ , \ h_0'' \ , \ h_0''' \ , \ \ldots\ldots \ h_0^{(s)} \end{matrix}$$

und dieselben liefern nun unmittelbar die Anfangsglieder:

$$h_0' a^{\xi_0'} \ , \ h_0'' a^{\xi_0''} \ , \ h_0''' a^{\xi_0'''} \ , \ \ldots\ldots \ h_0^{(s)} a^{\xi_0^{(s)}}$$

der verschiedenen Wurzeln x für die absteigende Entwickelungsform.

Die Auflösung der oberwähnten linearen Ungleichungen:

$$\eta > \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi \ , \ \eta > \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{x}_2 \xi \ , \ \eta > \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{x}_3 \xi \ , \ \ldots\ldots \ \eta > \mathfrak{a}_m + \mathfrak{x}_m \xi$$

bewerkstelligt man nach einer allgemeinen Regel durch ein combinatorisches Verfahren, welches von einer Ungleichung zur nächstfolgenden weiterschreitet, gerade so, wie wenn man sie als combinatorische Elemente betrachten und aus ihnen alle möglichen Amben bilden wollte. Man subtrahirt nämlich, mit der ersten von ihnen $\eta > \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi$ beginnend, die in ihr erscheinende lineare Function $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi$ der Reihe nach von allen in den darauffolgenden Ungleichungen vorkommenden Functionen:

$$\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{x}_2 \xi \ , \ \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{x}_3 \xi \ , \ \mathfrak{a}_4 + \mathfrak{x}_1 \xi \ , \ \ldots\ldots \ \mathfrak{a}_m + \mathfrak{x}_m \xi$$

und erhält demgemäss eine Reihe von Differenzen:

$$\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)\xi \ , \ \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1)\xi \ , \ \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{x}_4 - \mathfrak{x}_1)\xi \ , \ \ldots\ldots \ \mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_1)\xi$$

und durch Nullsetzen derselben eine Reihe von Gleichungen, welche nach ξ aufgelöst die Werthe liefern:

$$-\frac{\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1} \ , \ -\frac{\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1} \ , \ -\frac{\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_4 - \mathfrak{x}_1} \ , \ -\frac{\mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_1}$$

Von diesen bestimmten Zahlen sucht man die grössten. Diese stellen den ersten Werth ξ'_0 vor. Man kann entweder nur einen einzigen, bisweilen aber mehrere gleiche darunter finden. Gleichzeitig bezeichnet man jene Glieder des Gleichungspolynomes, welche diesem grössten Quotienten entsprechen. Ihre Summe $\Sigma[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}]$ führt auf die früher erwähnte Weise, nämlich durch die Substitution $a=1$, $x=h$ zur Bestimmungsgleichung in h'_0.

Nachdem nun dieses Rechnungsverfahren abgeschlossen ist, welchem die erste Ungleichung $\eta > \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi$ als Ausgangspunkt gedient hat und das sich symbolisch auf die Bildung aller Amben aus diesem ersten combinatorischen Elemente mit allen nachfolgenden zurückführen lässt, erwählt man hierauf eines der späteren combinatorischen Elemente zum Ausgangspunkt eines ähnlichen Verfahrens, aber nicht das unmittelbar nächste zweite, sondern nach Umständen bald dieses, bald ein viel späteres. Den Fingerzeig hiezu gibt die frühere Untersuchung. Das letzte Glied $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$ in der ersten dem ξ'_0 entsprechenden bezeichneten Gliedersumme $\Sigma[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}]$ oder vielmehr die demselben entsprechende lineare Function $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi$ hat nun an die Stelle des ersten Gliedes $H_1 a^{\mathfrak{a}_1} x^{\mathfrak{x}_1}$ und der ersten linearen Function $\mathfrak{a}_1+\mathfrak{x}_1\xi$ zu treten, und wird nun in gleicher Weise von allen darauffolgenden linearen Functionen subtrahirt und hieraus durch Nullsetzen der erhaltenen Differenzen die entsprechende Quotientenreihe abgeleitet, und unter diesen wieder die grössten gesucht. Diese stellen ξ''_0 vor und bezeichnen nebst dem hier als Ausgangspunkt benützten Gliede noch ein oder mehrere spätere Glieder zum Zwecke der Bildung der Bestimmungsgleichung in h''_0. Das letzte dieser bezeichneten Glieder aber ist der Ausgangspunkt für die nächstfolgende Combination zu Amben. In solcher Weise wird das combinatorische Verfahren fortgesetzt, bis alle Elemente erschöpft sind, was dann eintritt, wenn das $H_{\mathrm{m}} a^{\mathfrak{a}_{\mathrm{m}}} x^{\mathfrak{x}_{\mathrm{m}}}$ unter den bezeichneten Gliedern auftritt, denn dieses wäre der Ausgangspunkt für ein ferneres Combiniren, wenn nicht eben die Elemente erschöpft wären.

Die zu verrichtenden Rechnungen hängen somit zusammen, ungefähr so wie die Glieder einer Kette. Sie beginnen bei der ersten Ungleichung und endigen bei der letzten. Die dabei gewonnenen Werthe von ξ_0 sind in diesem Falle absteigend geordnet.

Es braucht wohl kaum bemerktzu werden, dass das Aufschreiben der linearen Ungleichungen, so wie jenes der jedesmaligen Differenzen nicht nothwendig, sondern dass man alsogleich die Quotienten zu bilden im Stande sei, indem hier nur eine einzige Unbekannte ξ_0 erscheint. In der That entsprechen den Gliedern:

$$H_1 a^{\mathfrak{a}_1} x^{\mathfrak{x}_1} \;,\; H_2 a^{\mathfrak{a}_2} x^{\mathfrak{x}_2} \;,\; H_3 a^{\mathfrak{a}_3} x^{\mathfrak{x}_3} \;,\; \ldots\ldots \; H_{\mathrm{m}} a^{\mathfrak{a}_{\mathrm{m}}} x^{\mathfrak{x}_{\mathrm{m}}}$$

die zwei Reihen von Exponenten:

$$\begin{array}{llllll} \mathfrak{a}_1 & , & \mathfrak{a}_2 & , \; \mathfrak{a}_3 & , \ldots\ldots & \mathfrak{a}_{\mathrm{m}} \\ \mathfrak{x}_1 & , & \mathfrak{x}_2 & , \; \mathfrak{x}_3 & , \ldots\ldots & \mathfrak{x}_{\mathrm{m}} \end{array}$$

und es ist wohl hinreichend, nur einen Blick auf die Quotienten:

$$-\frac{\mathfrak{a}_2-\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_2-\mathfrak{x}_1} \;,\; -\frac{\mathfrak{a}_3-\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_3-\mathfrak{x}_1} \;;\; -\frac{\mathfrak{a}_{\mathrm{m}}-\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_{\mathrm{m}}-\mathfrak{x}_1}$$

zu werfen, um alsogleich eine Regel zu finden, wie sie unmittelbar daraus abgeleitet werden können. Man subtrahirt nämlich das erste Glied $\mathfrak{a}_1$ von allen späteren Gliedern der ersten Reihe, $\mathfrak{x}_1$ von jenen der zweiten, schreibt diese zwei Differenzen selbst wieder in Reihenform und beziehungsweise unter einander, so braucht man nur zwischen zwei solche unter einander stehende Differenzen den Bruchstrich zu ziehen und das Zeichen — vorzusetzen, um alsogleich die gesuchten Quotienten zu haben. Die grössten unter ihnen ξ'_0 hat man zu suchen und irgend

wie zu bezeichnen, so wie die in derselben Verticalreihe befindlichen Glieder des Gleichungspolynoms nebst dem allerersten. Für die nächste Wiederholung dieses combinatorischen Verfahrens erwählt man nun die letzte dermassen bezeichnete Verticalreihe, und bildet aus den in dieser und allen später erscheinenden a und x wieder eine Quotientenreihe, findet dermassen ξ'_0, eine andere Summe von bezeichneten Gliedern, und eine bestimmte Verticalreihe als Ausgangspunkt für das nächstfolgende combinatorische Verfahren u. s. w., bis sich die Rechnung von selbst schliesst.

Wir lassen nun hier eine Reihe von Beispielen folgen, an denen wir die Bestimmung der Anfangsglieder nach der eben auseinandergesetzten Methode vornehmen wollen:

Erstes Beispiel:

$$5x^4 - 3a^6x^3 + 4a^7x^2 - 3a^7x + [2a^4 - 3a^2 + 3] = 0$$

erste Quotientenreihe: $\frac{6}{1}, \frac{7}{2}, \frac{7}{3}, \frac{4}{4}$, unter ihnen ist der erste $\frac{6}{1} = 6$ der grösste und liefert $\xi_0 = 6$;

zweite Quotientenreihe: $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-2}{3}$, unter ihnen ist der erste $\frac{1}{1} = 1$ der grösste und liefert $\xi_0 = 1$;

dritte Quotientenreihe: $\frac{0}{1}, \frac{-3}{2}$, unter ihnen ist der erste $\frac{0}{1} = 0$ der grösste und liefert $\xi_0 = 0$;

vierte Quotientenreihe: $\frac{-3}{1}$, liefert $\xi_0 = -3$.

Dem Werthe $\xi_0 = 6$ entsprechen die bezeichneten Glieder: $5x^4 - 3a^6x^3$

und die Bestimmungsgleichung: $5h_0^4 - 3h_0^3 = 0$;

diese liefert den Werth: $h_0 = \frac{3}{5}$

und das Anfangsglied: $x_0' = \frac{3}{5}a^6$;

dem Werthe $\xi_0 = 1$ entsprechen die bezeichneten Glieder: $-3a^6x^3 + 4a^7x^2$

und die Bestimmungsgleichung: $-3h_0^3 + 4h_0^2 = 0$;

diese liefert: $h_0 = \frac{4}{3}$

und das Anfangsglied: $x_0'' = \frac{4}{3}a$;

dem Werthe $\xi_0 = 0$ entsprechen die bezeichneten Glieder: $4a^7x^2 - 3a^7x$

und die Bestimmungsgleichung: $4h_0^2 - 3h_0 = 0$;

diese liefert: $h_0 = \frac{3}{4}$

und das Anfangsglied: $x_0''' = \frac{3}{4}$;

dem Werthe $\xi_0 = -3$ entsprechen die bezeichneten Glieder: $-3a^7x + 2a^4$

und die Bestimmungsgleichung: $-3h_0 + 2 = 0$;

diese liefert: $h_0 = \frac{2}{3}$

und das Anfangsglied: $x_0''' = \frac{2}{3a^3}$.

Zweites Beispiel:

$$a^2x^6 - 2ax^5 + (3a + 2)x^4 - (8a^3 + 4)x^3 - 10a^2x^2 + 9ax + 9 = 0$$

$$\begin{array}{cccccc} \frac{-1}{1} & \frac{-1}{2} & \underbrace{\frac{+1}{3}} & \underbrace{\frac{0}{1}} & \underbrace{\frac{-1}{5}} & \underbrace{\frac{-2}{6}} \\ & & & \underbrace{\frac{-1}{1}} & \underbrace{\frac{-2}{2}} & \underbrace{\frac{-3}{3}} \end{array}$$

$$\xi_0 = \tfrac{1}{3}\ ,\ h_0^6 - 8h_0^3 = 0$$
$$h_0 = +2\ ,\ -1+\sqrt{-3}\ ,\ -1-\sqrt{-3}$$
$$x_0 = 2a^{\frac{1}{3}}\ ,\ [-1+\sqrt{-3}]a^{\frac{1}{3}}\ ,\ [-1-\sqrt{-3}]a^{\frac{1}{3}}$$
$$\xi_0 = -1\ ,\ -8h_0^3 - 10h_0^2 + 9h_0 + 9 = 0$$
$$h_0 = +1\ ,\ -\tfrac{3}{4}\ ,\ -\tfrac{3}{2}$$
$$x_0 = \tfrac{1}{a}\ ,\ -\tfrac{3}{4a}\ ,\ -\tfrac{3}{2a}.$$

Drittes Beispiel:

$$(4a+1)x^3 + (3a^2 - 2a + 1)x^2 - 6ax + 3 = 0$$
$$\underbrace{\tfrac{1}{1}} \qquad \tfrac{0}{2}\ \ -\tfrac{1}{3}$$
$$\underbrace{-\tfrac{1}{1}}\ \ \underbrace{-\tfrac{2}{2}}$$

$$\xi_0 = 1\ ,\ 4h_0^3 + 3h_0^2 = 0$$
$$h_0 = -\tfrac{3}{4}$$
$$x_0 = -\tfrac{3}{4}a$$
$$\xi_0 = 1\ ,\ 3h_0^2 - 6h_0 + 3 = 0$$
$$h_0 = 1 \text{ eine doppelte Wurzel}$$
$$x_0 = \tfrac{1}{a} \text{ dieses Anfangsglied ist zweien Wurzeln } x \text{ gemeinschaftlich.}$$

Viertes Beispiel:

$$x^5 + (-5a+5)x^4 + (10a^2 - 20a + 5)x^3 + (-10a^3 + 30a^2 - 15a - 5)x^2 +$$
$$\underbrace{\tfrac{1}{1}} \qquad \underbrace{\tfrac{2}{2}} \qquad \underbrace{\tfrac{3}{3}}$$
$$+ (5a^4 - 20a^3 + 15a^2 + 10a - 6)x + (-a^5 + 5a^4 - 5a^3 - 5a^2 + 6a) = 0$$
$$\underbrace{\tfrac{4}{4}} \qquad \underbrace{\tfrac{5}{5}}$$
$$\xi_0 = 1\ ,\ h_0^5 - 5h_0^4 + 10h_0^3 - 10h_0^2 + 5h_0 - 1 = 0$$
$$h_0 = 1 \text{ ist eine fünffache Wurzel dieser Gleichung,}$$
$$x_0 = a \text{ ist daher allen fünf Auflösungen gemeinschaftlich.}$$

II. Bestimmung der Folgeglieder.

§. 7.

Nachdem nun die Bestimmung der Anfangsglieder gezeigt wurde, bleibt noch der zweite Theil unseres Problemes, nämlich die Bestimmung der Folgeglieder übrig. Wir wollen uns zunächst damit beschäftigen. Bekanntlich führt das früher auseinandergesetzte Verfahren zu einer Reihe von Anfangsgliedern, und da in der Regel ein jedes einzelne derselben einer einzigen Auflösung x entsprechen wird, so ist zu einem jeden Anfangsgliede auch nur eine einzige Reihe von Folgegliedern gehörig, die daher alle nur durch Gleichungen des ersten Grades, also

durch Division erhalten werden. Dies wird der gewöhnlichste Fall sein. In speciellen Fällen jedoch kann es sich treffen, dass zwei oder mehrere Auflösungen ein und dasselbe Anfangsglied gemeinschaftlich besitzen. Wir haben schon früher erwähnt, dass diese Erscheinung jedesmal durch gleiche Wurzeln h_0 angezeigt werde, und werden diese Behauptung im Folgenden zu erweisen Gelegenheit finden. Für jetzt wollen wir nur bemerken, dass einem solchen, mehreren Auflösungen gemeinschaftlich zukommenden Anfangsgliede mehrere Systeme von Folgegliedern zukommen werden, die übrigens in den ersten Gliedern mitunter übereinstimmen können, so dass die vollständige Trennung der Wurzeln erst bei einem späteren Gliede erfolgt; ja es kann sich treffen, dass die Gleichung $P = o$ zwei oder mehrere gleiche Wurzeln x besitzt und daher, wie weit man auch die Entwickelung treiben wollte, niemals eine Trennung dieser Auflösungen eintritt. Man ersieht hieraus, dass die Bestimmung der Folgeglieder in gewissen Ausnahmsfällen wohl eine complicirtere Untersuchung erheischen, in den gewöhnlichen Fällen jedoch eine sehr einfache Gestalt annehmen wird. Die Bestimmung eines Folgegliedes beruht gleichfalls auf der Bestimmung der Zahlwerthe zweier Grössen, nämlich des Exponenten ξ und des Coëfficienten h. Die Bestimmung dieser beiden Grössen wird von der Erfüllung gewisser Bedingungen abhängig sein, deren Aufstellung keinerlei Schwierigkeit unterliegt. Diese zwei Grössen sind nämlich offenbar dazu zu verwenden, um im Substitutionsresultate, nachdem vermöge der zweckmässigen Wahl des Anfangsgliedes $h_0 a^{\xi_0}$ die höchste Potenz bereits eine Reduction auf Null erfahren hat, ein ähnliches Verschwinden auch bei dem Gliede mit der nächst niedrigeren Potenz von a herbeizuführen. Diesem Zwecke entsprechend wird sowohl für ξ_0 als für h_0 ein bestimmter Zahlwerth entfallen. Man kann die Erörterung und neue Ableitung dieser Bedingungen ersparen und dieses Problem gewissermassen auf das frühere, nämlich auf die Bestimmung des Anfangsgliedes zurückführen.

Dies wird durch folgende Transformation gelingen: Setzt man

$$x = x_0 + x', \tag{3}$$

wobei unter x_0 das bereits bekannte Anfangsglied einer Auflösung x, unter x' jedoch die Summe aller Folgeglieder zu verstehen ist, und substituirt nun diesen Werth anstatt x in das Gleichungspolynom P; so geht hieraus eine neue Gleichung hervor, welche anstatt der Unbekannten x die neue Unbekannte x' enthält. Da nun x' offenbar die Summe aller auf x_0 folgenden Glieder bedeutet, so wird das Anfangsglied von x' eben das gesuchte Glied $h_1 a^{\xi_1}$ sein. Man wird also nach dem bereits bekannten Verfahren nur das Anfangsglied von x' aus dieser neuen Gleichung zu bestimmen haben, um zu dem gewünschten Ziele zu gelangen. Auf solche Weise nun wäre durch eine leicht ausführbare Transformation der Gleichung $P = 0$ in eine andere, und durch Anwendung der früher exponirten zur Bestimmung des Anfangsgliedes dienenden Regel unser vorliegendes Problem zur Lösung gebracht, denn genau so, wie die einmalige Transformation von x in x' zu dem zweiten Gliede $h_1 a^{\xi_1}$ führt, wird eine nochmalige Wiederholung dieses Verfahrens, jetzt aber auf x' angewendet, das dritte Glied liefern u. s. w. Allein wir werden bald sehen, dass, wiewohl die angegebene Transformation allerdings zum Ziele führt, mit der Angabe derselben noch keineswegs das Problem vollkommen erledigt sei, und zwar aus folgenden zwei Gründen: Erstens zeigt sich, dass die transformirte Gleichung nach x' von demselben Grade sei, wie die gegebene nach x, und man wird demnach bei der Bestimmung des Anfangsgliedes von x' nicht ein einziges solches, sondern deren mehrere und in der Regel von einander verschiedene finden, während der Natur der Sache nach, doch nur ein

einziges derselben das gesuchte Folgeglied $h_1 a^{\xi_1}$ vorstellen kann. Zweitens: Abgesehen von dieser Vieldeutigkeit, welche sich bei der Betrachtung der gefundenen Anfangsglieder von x' ohne alle Schwierigkeit von selbst beheben würde, so dass dann kein Zweifel mehr obwaltet, welches derselben eigentlich das gesuchte Glied $h_1 a^{\xi_1}$ ist, so hängt dieser Verfahrungsweise eine Anzahl von unnützen Rechnungen an, ein Nachtheil, der hier viel fühlbarer ist, weil sie sich bei der Bestimmung eines jeden einzelnen Entwickelungsgliedes wiederholen. Wenn daher bei der früher gelehrten Bestimmung der Anfangsglieder von x die mögliche Vereinfachung des Verfahrens vielleicht als eine ziemlich unerspriessliche Arbeit angesehen werden könnte, so gilt dieses keineswegs hier, wo sich die unnützen Rechnungsoperationen bei jedem einzelnen Gliede wiederholen, und daher bei Vermeidung derselben die Ersparniss bedeutender und, so zu sagen, für die praktische Ausführbarkeit unerlässlich ist. Wir können daher mit der Angabe dieser Transformation und der Hinweisung auf das bekannte Verfahren zur Bestimmung der Anfangsglieder das Problem keineswegs als erledigt, sondern eben nur als in den allgemeinsten Grundzügen angedeutet betrachten.

Der zuerst erwähnte Punkt, der einer Aufklärung bedarf, betrifft die dem x' anhängende Mehrdeutigkeit. Diese Mehrdeutigkeit findet in der Substitutionsgleichung

$$x = x_0 + x'$$

ihre Erklärung, denn diese Gleichung besagt keineswegs, dass x' eben jene Summe von Folgegliedern bedeute, die wir zunächst darunter zu verstehen geneigt wären, sondern überhaupt einen Ausdruck, der, zu x_0 addirt, einen Genüge leistenden Werth x der Gleichung $P = 0$ liefert. Da nun nicht ein einziger solcher Werth von x, sondern deren mehrere und meist von einander verschiedene bestehen, so werden auch eben so viele und gleichfalls von einander verschiedene x' vorhanden sein, und es darf daher nicht überraschen, dass die transformirte Gleichung nach x' dieselbe Gradzahl, wie die ursprünglich gegebene $P = 0$ nach x ausweist. Da wir aber nicht beabsichtigen diese Zusätze x' zu suchen, sondern von ihnen eben nur jenes x' zu kennen wünschen, welches wir ursprünglich darunter meinten, und das die Summe der zu dem bereits gefundenen x_0 gehörigen Folgeglieder darstellt, so sind wir verhalten, diese Erklärung auch in unsere Rechnung einzuführen und nur eben dieses specielle x' in seinem Anfangsgliede $h_1 a^{\xi_1}$ zu bestimmen. Dies wird dadurch geschehen, dass wir zu der Substitutionsgleichung noch eine fernere Bedingung hinzufügen, durch welche dem x' jene Mehrdeutigkeit benommen und dasselbe auf eben jene specielle Bedeutung zurückgeführt wird, und zwar dadurch, dass wir erklären, x' sei ein Ausdruck von niedrigerem Grade nach a, als x_0. Wir werden daher die Ungleichung

$$\xi_0 > \xi_1$$

noch zur Substitutionsgleichung (3) hinzufügen.

Es ist wohl leicht einzusehen, dass nur unter dieser Bedingung die Summe der Glieder:

$$x = x_0 + x' = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \ldots .$$

nach absteigenden Potenzen von a geordnet erscheinen wird, während alle übrigen x', die mit einem grösseren ξ' in ihrem Anfangsgliede versehen sind, sich dem x_0 nicht rückwärts anfügen lassen, ohne der bei allen unseren Untersuchungen geltenden Ordnungsweise zu widersprechen. Diese hinzugefügte Bedingung bewirkt daher die beabsichtigte Abscheidung des eigentlich gemeinten Folgegliedes von den übrigen Zusätzen x', die keine weitere Berücksichtigung

verdienen. Diese Bedingung besagt, dass man die mittelst der Substitution (3) abgeleitete transformirte Gleichung nicht in Bezug auf alle ihre Anfangsglieder zu untersuchen habe, sondern dass diese Untersuchung nur auf einen beschränkten Bereich der Werthe von ξ' auszudehnen sei. Wir werden daher bei der transformirten Gleichung die Construction der gebrochenen Linie, um die es sich bei der Bestimmung der Anfangsglieder bekanntlich handelt, nicht in der vollen Ausdehnung der Abscissenaxe ξ' vornehmen, wie dies früher der Fall war, sondern wir werden uns auf ein bestimmtes Gebiet beschränken, gegeben durch die Ungleichung: $\xi_0 > \xi'$.

Dieses Gebiet erstreckt sich von $\xi' = -\infty$ bis $\xi' = \xi_0$ und nur in dieser Ausdehnung werden wir die gebrochene Linie entwerfen, weil nur in dieser Ausdehnung brauchbare Werthe für ξ_1 erhalten werden können. Nur in dieser Ausdehnung wird die Bestimmung der Anfangsglieder von x' etwas Neues lehren in Bezug der Auflösung x, während, wie wir gleich zeigen werden, in dem übrigen Bereiche der Werthe ξ' eine solche Untersuchung nur Bekanntes liefern könnte. In der That sind durch die vorhergegangene Untersuchung die verschiedenen Auflösungen x, welche der Gleichung $P = 0$ entsprechen, in ihren Anfangsgliedern bekannt. Auf solche Weise sind alle jene Auflösungen, welchen das Anfangsglied $x_0 = h_0 a^{\xi_0}$ gemeinschaftlich zukommt, geschieden von allen übrigen.

Fügen wir nun zu den verschiedenen Auflösungen x das Anfangsglied x_0 mit entgegengesetztem Zeichen hinzu, so verwandeln sie sich sämmtlich in die entsprechenden x'. Bei dieser Verwandlung zeigen nun jene Auflösungen x, welche das Anfangsglied x_0 besitzen, ein ganz verschiedenes Verhalten von den übrigen, welchen es nicht zukommt. Bei den mit dem Bestandtheile x_0 versehenen Auflösungen x wird der subtractiv hinzugefügte Bestandtheil $-x_0$ den gleichen positiven heben, und das Übrigbleibende ist die Summe der auf x_0 folgenden Glieder, die sämmtlich noch unbekannt sind. Hingegen bei den anderen Auflösungen x, welche den Bestandtheil x_0 gar nicht besitzen, wird ein solches Aufheben nicht stattfinden. Ist nämlich das Anfangsglied von x mit einer höheren Potenz von a versehen, als das Anfangsglied x_0, so wird dieses erstere zugleich auch dem x' angehören. Findet das Entgegengesetzte Statt, so beginnt x' mit dem Anfangsgliede x_0. Es kann sich aber auch treffen, dass das Anfangsglied von x und x_0 mit derselben Potenz von a aber mit verschiedenen Coëfficienten versehen sind, dann beginnt x' mit der Differenz dieser beiden Anfangsglieder. Das auf solche Weise hervorgehende x' besitzt somit entweder dasselbe Anfangsglied, wie das in Rede stehende x, oder es beginnt mit $-x_0$ oder endlich mit der Differenz beider. Wir ersehen hieraus, dass die Anfangsglieder von x' bei allen Auflösungen x, welchen der Bestandtheil x_0 in ihrer absteigenden Entwickelungsform nicht zukommt, bereits bekannt sind, und dass demnach auch die über den Bereich $\xi < \xi_0$ ausgedehnte Bestimmung der Anfangsglieder in der transformirten Gleichung nichts Neues lehren könne. Wir gelangen auf solche Weise zugleich zu einer Vereinfachung der Untersuchungsmethode, indem wir schon im Voraus gewisse Untersuchungen beseitigen, von denen wir wissen, dass sie nur Bekanntes liefern, und überhaupt eine strenge Grenze aufgefunden haben, wie weit sie auszudehnen sei. Mit dieser Begrenzung der Untersuchung ist noch ein weiterer Vortheil und eine nicht unbedeutende Vereinfachung der Rechnung verbunden, da es nun gestattet ist, nur einen Theil der transformirten Gleichung zu berücksichtigen, und die übrigen Glieder unberücksichtigt zu lassen. Es wird folglich auch gestattet sein, nur eben diesen Theil der transformirten Gleichung zu bilden; denn bekanntlich zerfällt man bei der Bestimmung der Anfangsglieder die Gleichung in Theile, und zieht aus einer solchen Partialgleichung das gesuchte Anfangsglied. Es wird daher überflüssig sein, zur

Bestimmung des Folgegliedes $h_1 a^{\xi_1}$ die transformirte Gleichung in x' vollständig zu entwickeln, und vielmehr hinreichen, nur jene Partialgleichung zu bilden, aus der $h_1 a^{\xi_1}$ gezogen werden kann. Wir sehen also, wie durch die Beseitigung der Mehrdeutigkeit von x' zugleich der zweite angeführte Punkt, nämlich die möglichste Vereinfachung des Rechnungsverfahrens, wenigstens bis zu einer gewissen Weite hin seine Erledigung findet.

§. 8.

Wir haben bisher der Substitutionsformel (3) unsere Aufmerksamkeit zugewendet und aus ihr alle unsere Schlüsse gezogen, die Bezug hatten auf die Anfangsglieder von x'. Wir könnten nun auf dem Wege der directen Substitution von $x_0 + x'$ anstatt x in das Gleichungspolynom P die neue Gleichung in x' wirklich ableiten, und an ihr die Bestimmung der Anfangsglieder vornehmen. Es würden sich dabei die eben gemachten Bemerkungen bestätigen.

Wir ziehen es aber vor, von der angegebenen Substitution und den auf solche Weise abgeleiteten neuen Gleichungen in x' ganz und gar abzusehen, und die Bestimmung der Folgeglieder auf dem directen Wege, durch Substitution einer Reihe:

$$h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \ldots\ldots$$

anstatt x abzuleiten, indem wir die Bedingungen erörtern, unter welchen die zweckmässige Wahl der Werthe von ξ_1 und h_1 eine weitere Reduction auf Null in dem Substitutionsresultate herbeiführt. Wir geben dieser Ableitungsweise vor jener anderen, auf die Transformation der Gleichung gestützte den Vorzug, weil einerseits sie die allgemeinere ist und eine deutlichere Einsicht gewährt, andererseits aber, weil man in der That niemals zur Bildung der transformirten Gleichung in x' zu schreiten Ursache findet. Unsere früheren Untersuchungen bezüglich der Bestimmung der Anfangsglieder von x beziehen sich nämlich zunächst nur auf Gleichungen von der Form $S[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}] = 0$, wobei aber $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ keineswegs ganze und positive Zahlen bedeuten müssen; substituirt man aber in eine solche Gleichung $x = x_0 + x'$, so wird, wenn negative oder gebrochene Werthe von $\mathfrak{x}$ erscheinen, die neue Gleichung diese Form keineswegs mehr besitzen, so zwar, dass die früher gelehrte Bestimmungsweise der Anfangsglieder nicht mehr anwendbar erscheint. Man wäre dadurch bemüssigt, entweder solche mit negativen oder gebrochenen Werthen von $\mathfrak{x}$ versehene Gleichungen ganz aus der Betrachtung streichen, oder die Bestimmung der Anfangsglieder früher auch auf andere Formen der algebraischen Gleichungen als die bisher betrachteten, auszudehnen. Wir finden uns veranlasst, weder das eine, noch das andere zu thun, sondern ziehen es vor, den Untersuchungen jenen Grad der Allgemeinheit zu lassen, den sie bereits besitzen.

Der Weg, den wir einzuschlagen gedenken, ist folgender:

Wir substituiren in das Gleichungspolynom P anstatt x eine Reihe, absteigend geordnet nach Potenzen von a, deren höchstes Glied $h_0 a^{\xi_0}$ durch die früheren Untersuchungen angegeben ist, und deren zweites Glied $h_1 a^{\xi_1}$ mit noch unbestimmten Werthen h_1 und ξ_1 versehen erscheint. Wir erhalten dadurch ein gewisses Substitutionsresultat, dessen höchstes Glied, zufolge der getroffenen Wahl des Anfangsgliedes $h_0 a^{\xi_0}$, sich auf Null reducirt und daher wegfällt. Aber es bleiben trotzdem noch von Null verschiedene Glieder übrig. Es soll nun angegeben werden, welche Werthe von h_1 und ξ_1 in dem nunmehr mit der höchsten Potenz von a versehenen Gliede eine Reduction auf Null herbeiführen. Hier ist stillschweigend die Bedingung $\xi_1 < \xi_0$ niedergelegt und wir werden daher auch nur das verlangte Folgeglied $h_1 a^{\xi_1}$ erhalten,

keineswegs aber die Anfangsglieder der verschiedenen Zusätze x', von denen früher Erwähnung geschah. Der erste Schritt dieser Substitution:

$$x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \ldots\ldots \tag{4}$$

besteht in der Entwickelung von x^r. Diese gelingt in den zwei ersten Gliedern ohne Schwierigkeit, und hat die Gestalt:

$$x^r = h_0{}^r a^{r\xi_0} + \mathfrak{r} h_0{}^{r-1} h_1 . a^{(r-1)\xi_0+\xi_1} + \ldots\ldots \tag{5}$$

Jedes einzelne Glied $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{r}}$ des Gleichungspolynomes P liefert daher einen nach absteigenden Potenzen von a geordneten Bestandtheil, wie:

$$Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{r}} = Hh_0{}^{\mathfrak{r}} . a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\xi_0} + \mathfrak{r} Hh_0{}^{\mathfrak{r}-1} h_1 . a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\xi_0-\xi_0+\xi_1} + \ldots\ldots \tag{6}$$

dessen zwei erste Glieder bekannt sind. Die Summe aller dieser Bestandtheile liefert das dem substituirten Werthe (4) entsprechende Substitutionsresultat. Um dasselbe in absteigend geordneter Form zu erhalten, hat man diese verschiedenen Bestandtheile mit gehöriger Rücksicht auf die möglichen Reductionen zu summiren. Das höchste Glied davon ist bereits von einer früheren Untersuchung her bekannt. Wir gehen nun daran, das nächst niedrigere, zweite Glied zu bilden, und werden so zu jenen Bedingungen gelangen, welche die noch unbestimmt gelassenen Grössen ξ_1 und h_1 zu erfüllen haben, und die dazu verwendet werden sollen, den Coëfficienten dieses nächst niedrigeren Gliedes auf Null zu bringen. Wir beginnen mit der Bemerkung, dass die zweiten Glieder der erwähnten Bestandtheile, welche die Form:

$$\mathfrak{r} Hh_0{}^{\mathfrak{r}-1} h_1 . a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\xi_0-\xi_0+\xi_1} \tag{7}$$

besitzen, beim Summiren derselben eine ähnliche Reduction erfahren werden, wie dies bei den ersten Gliedern $Hh_0{}^{\mathfrak{r}} a^{\mathfrak{a}-\mathfrak{r}\xi_0}$ der Fall war, und zwar für jeden beliebigen Werth von ξ_1 und h_1. In der That ist ξ_0 so gewählt, dass von den verschiedenen Gradzahlen $\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\xi_0$ zwei oder mehrere gleich und am grössten ausfallen. Diesen speciellen Werthen von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{r}$ entspricht die Summe der bezeichneten Glieder $\Sigma[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{r}}]$. Jedes derselben liefert ein zweites Glied von der Form (7) und in all' diesen Gliedern erscheint dieselbe Potenz $a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\xi_0-\xi_0+\xi_1}$. Diese Glieder setzen sich daher zu einem einzigen zusammen, welches als Coëfficienten die Summe der Coëfficienten dieser einzelnen Glieder enthält. Dieser Coëfficient erscheint als die Summe von Gliedern die alle die Grösse h_1 als Factor aufweisen, und besitzt die Form:

$$h_1 \Sigma[\mathfrak{r} Hh_0{}^{\mathfrak{r}-1}],$$

während der Coëfficient der höchsten Potenz im Substitutionsresultate die Form:

$$\Sigma[Hh_0{}^{\mathfrak{r}}] = 0$$

besass. Diese Summen sind auf dieselben Werthe von $\mathfrak{r}$ und H auszudehnen, die durch die gebrochene Linie dafür angegeben werden. Man sieht hieraus, dass es in der Regel gelingen wird, unter den verschiedenen zweiten Gliedern (7) diejenigen, welche a in der höchsten Potenz besitzen, ohne Schwierigkeit anzugeben, denn die gebrochene Linie, die zu dem Werthe von ξ_0 und h_0 geführt hat, gibt die entsprechenden Glieder $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{r}}$ an, aus welchen sie abzuleiten wären. Es ist andererseits ersichtlich, dass die Summe $\Sigma[\mathfrak{r} Hh_0{}^{\mathfrak{r}-1}]$ durch einmaliges Differentiiren nach h_0 aus $\Sigma[Hh_0{}^{\mathfrak{r}}]$ abgeleitet werden könne und man wird daher, um die Summe der höchsten Glieder aus der Gruppe der $\mathfrak{r} Hh_0{}^{\mathfrak{r}-1} h_1 a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{r}\xi_0-\xi_0+\xi_1}$ zu erhalten, nur den für noch unbestimmt gelassene h_0 bereits bekannten Coëfficienten der allerhöchsten Potenz im Substitutionsresultate,

$\Sigma[Hh_0^x]$ nämlich, einmal nach h_0 zu differentiiren und der so erhaltenen Summe $\Sigma[x\,Hh_0^{x-1}]$ noch den Factor $h_1 a^{\alpha+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}$ beizufügen haben. Wir haben oben gesagt, dass es in der Regel auf diese Weise gelingen werde, denn es gibt Ausnahmsfälle, welche diesen Vorgang vereiteln. In der That wird meistentheils $\Sigma[x\,Hh_0^{x-1}]$ von Null verschieden ausfallen, weil h_0 der Gleichung $\Sigma[Hh_0^x]=0$ entsprechend gewählt ist. Wenn aber diese Bestimmungsgleichung gleiche Wurzeln besitzt, und das erwählte h_0 eben einen solchen gleichen Wurzelwerth darstellt, so ist die ganze Reihe der früheren Schlussfolgerungen unzulässig, und sie erweisen nur, dass in einem solchen speciellen Falle nicht nur die höchsten Glieder von der Form $Hh_0^x a^{\alpha+x\xi_0}$ sondern auch die der zweiten Form $xHh_0^{x-1}h_1 a^{\alpha+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}$ sich aufheben.

Diese Möglichkeit des Auftretens gleicher Wurzeln h_0 ist es, die unsere folgenden Untersuchungen in einem nicht geringeren Masse compliciren und uns zur Unterscheidung sehr vieler Ausnahmsfälle zwingen wird. Wir werden mit dem einfachsten Falle beginnen, nämlich wo h_0 nur eine einfache Wurzel darstellt, und eine gewisse Regel für die Auffindung des Folgegliedes $h_1 a^{\xi_1}$ ermitteln. Diese Regel verliert ihre Giltigkeit, wenn h_0 eine doppelte Wurzel ist, und es tritt an ihre Stelle eine neue Regel, die gleichfalls unbrauchbar wird, wenn h_0 eine dreifache Wurzel bedeutet u. s. w. Daraus, dass hier sehr viele einzelne Ausnahmsfälle vorkommen, und jeder derselben eine eigene Verfahrungsweise erheischt, möchte man wohl im Voraus mit einer gewissen Peinlichkeit dem nun Folgenden entgegen sehen. Allein der Leser wird sich überzeugen, dass diese verschiedenen Regeln nicht so heterogen seien, dass eine jede derselben einzeln dem Gedächtnisse eingeprägt werden müsste; sie werden im Gegentheile eine grosse Ähnlichkeit besitzen, und sich in eine einzige, allgemein giltige Regel vereinigen lassen.

Beginnen wir also mit dem gewöhnlichen und einfachsten Falle, wo h_0 eine einfache Wurzel der Gleichung

$$\Sigma[Hh^x]=0$$

bedeutet und daher $\Sigma[x\,Hh_0^{x-1}]$ von Null verschieden ausfällt. In einem solchen Falle ist, wie wir gezeigt haben, das durch Summirung der verschiedenen zweiten Glieder (7) hervorgehende höchste Glied folgendes:

$$h_1\Sigma[x\,Hh_0^{x-1}.a^{\alpha+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}]$$

wobei die Summirung auf dieselben Combinationen x und H auszudehnen ist, wie in der bereits für ξ_0 bekannten Gleichung $\Sigma[Hh^x]=0$. Nun liegt uns noch eine zweite Untersuchung ob, nämlich zu entscheiden, welches von denjenigen ersten Gliedern $Hh_0^x.a^{\alpha+x\xi_0}$ das höchste seiner Gradezahl nach sei, nachdem man die bei der Summirung sich tilgenden beseitigt hat. Man wird dazu ohne alle Schwierigkeit gelangen, indem man das bereits bekannte Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ in das Gleichungspolynom P anstatt x substituirt und alle dabei möglichen Reductionen ausführt. Auf solche Weise findet man das höchste Glied, welches wir mit $\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$ anzeigen wollen, und kann nun versichert sein, dass das höchste von Null verschiedene Glied des Substitutionsresultates nur aus den zwei Gliedern

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} \text{ und } h_1\Sigma[x\,Hh_0^{x-1}.a^{\alpha+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}]$$

hervorgehen könne, weil alle übrigen, wie immer aussehenden Glieder erwiesener Massen von niedrigerer Ordnung sind. Jetzt ist es nicht schwer, die Bedingungen anzugeben, welche die noch unbestimmt gelassenen, mit h_1 und ξ_1 bezeichneten Grössen zu erfüllen haben, um eine fernere

Reduction auf Null im Substitutionsresultate P_1 herbeizuführen; es ist nämlich einerseits nothwendig, dass:

$$\mathfrak{A}_0 = a + x\xi_0 - \xi_0 + \xi_1$$

ausfällt, damit beide Glieder dieselbe Potenz von a aufweisen, und demnach eine Reduction zulassen. Diese Gleichung bestimmt den Zahlwerth von ξ_1, weil sowohl $\mathfrak{A}_0$ als auch $a + x\xi_0 - \xi_0$ hier bestimmte Zahlwerthe bedeuten. $a + x\xi_0$ ist namentlich hier die dem Werthe $\xi = \xi_0$ entsprechende Ordinate der gebrochenen Linie, sie mag η_0 heissen; ferner mag $\eta_0 - \xi_0$ durch α ausgedrückt sein. Dieser Zahlwerth von ξ_1 ist demnach ein einziger und zwar folgender:

$$\xi_1 = \mathfrak{A}_0 - \alpha.$$

Ist ξ_1 dermassen gewählt, so erhält diese höchste Potenz von a den Coëfficienten:

$$\mathfrak{H}_0 + h_1 \Sigma[x H h_0^{x-1}]$$

welcher gleich Null werden soll, und daher für h_1 den Werth:

$$h_1 = -\frac{\mathfrak{H}_0}{\Sigma[x H h_0^{x-1}]}$$

liefert. Auf solche Weise ist daher sowohl der Exponent ξ_1 als der Coëfficient h_1 seinem Werthe nach bekannt.

Das hier auseinander gesetzte Verfahren, um das erste Folgeglied $h_1 a^{\xi_1}$ zu bestimmen, welches zu dem Anfangsgliede $h_0 a^{\xi_0}$ gehört, kann in gleicher Weise zur Bestimmung des zweiten Folgegliedes $h_2 a^{\xi_2}$ u. s. w. allgemein zur Bestimmung des r^{ten} Folgegliedes $h_r a^{\xi_r}$ dienen. Setzt man nämlich:

$$x = x_r + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + \ldots\ldots$$

anstatt x in das Gleichungspolynom P, wobei x_r die Summe der bereits bekannten Glieder der Entwickelung:

$$x_r = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \ldots\ldots + h_r a^{\xi_r}$$

bedeutet; so werden sich hier mit den geeigneten Abänderungen alle früheren Schlussfolgerungen wiederholen lassen, denn auch hier erscheint x^x als eine absteigend nach a geordnete Reihe, deren höchste Glieder mit bestimmten Zahlwerthen versehene Exponenten und Coëfficienten besitzen, und in einer gewissen Anzahl von Gliedern mit x_r^x übereinstimmen. Von einer gewissen Potenz an treten zu diesen Gliedern von x_r^x die Glieder von $x x_r^{x-1} h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$.

Es lässt sich nun ohne alle Schwierigkeit zeigen, dass das höchste dieser letzterwähnten Glieder nicht ein einziges, sondern eine Summe von solchen sei, in der bereits bekannten Form:

$$h_{r+1} \Sigma[x\, H h_0^{x-1} \,.\, a^{\alpha + x\xi_0 - \xi_0 + \xi_{r+1}}]$$

erscheine und von Null verschieden sei, so lange h_0 nur eine einfache Wurzel der Gleichung $\Sigma[H h_0^x] = 0$ ist. Das nunmehr höchste und von Null verschiedene Glied des Substitutionsresultates P_{r+1} wird daher aus der Gruppe der zu $S[H a^\alpha x_r^x]$ gehörigen Glieder und aus dem oben aufgestellten zu erwählen sein. Man wird daher den bereits bekannten Bestandtheil x_r anstatt x in das Gleichungspolynom P substituiren, und durch Ausführen der möglichen Reductionen dieses Substitutionsresultat auf die Form eines absteigend nach a geordneten Polynomes bringen. Auf solche Weise ergibt sich das höchste von Null verschiedene Glied desselben $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$

ohne alle Schwierigkeit, mit bestimmtem $\mathfrak{H}_r$ und $\mathfrak{A}_r$, und es werden nun die beiden Glieder:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r} \text{ und } h_{r+1} \Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1} . a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-\xi_0+\xi_{r+1}}]$$

durch schickliche Wahl der noch unbestimmt gelassenen Grössen ξ_{r+1} und h_{r+1} sich gegenseitig aufheben lassen. Dies erfolgt für

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0 - \xi_0 + \xi_{r+1} = \alpha + \xi_{r+1}$$

und

$$\mathfrak{H}_r + h_{r+1} \Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}] = 0.$$

woraus die Werthe:

$$\xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \alpha, \; h_{r+1} = -\frac{\mathfrak{H}_r}{\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}]}$$

folgen.

Wir ersehen hieraus, dass das hier auseinandergesetzte Verfahren zu einer bekannten Summe x_r von Gliedern das unmittelbar nächstfolgende $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ liefert und demnach, beliebig oft wiederholt, der Reihe nach eine beliebige Anzahl von Folgegliedern zu geben und daher x in einer beliebigen Annäherung darzustellen geeignet sei. Dieses Verfahren ist zugleich höchst einfach und schreibt zunächst nur vor, den bereits gefundenen Bestandtheil x_r anstatt x in das Gleichungspolynom P zu substituiren. Hat man das Substitutionsresultat gehörig entwickelt und in geordneter Weise hingestellt, so lässt sich das unmittelbar nachfolgende Glied aus dem ersten Gliede $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$ desselben mit Leichtigkeit ableiten. Man multiplicirt dasselbe nämlich mit dem Factor $\frac{1}{\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}]} a^{-\alpha}$, und erhält so unmittelbar das $r+1$ste Folgeglied:

$$h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} = -\frac{\mathfrak{H}_r}{\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}]} a^{\mathfrak{A}_r - \alpha}.$$

Dieser Factor ist für eine bestimmte Auflösung stets derselbe. Seine Bildung unterliegt keiner Schwierigkeit. Man verfährt hiezu auf folgende Weise: Die Bestimmungsgleichung $\Sigma[H h^{\mathfrak{x}}] = 0$, die für das erwählte ξ_0 besteht, und bereits von der Bestimmung des Anfangsgliedes her bekannt ist, differentiirt man nach der Grösse h Ein Mal und substituirt nun den Werth h_0 anstatt h. Von dem so gewonnenen Zahlwerthe $\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}]$ bildet man den mit entgegengesetzten Zeichen versehenen reciproken Werth. Dieser so erhaltene Zahlwerth $-\frac{1}{\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}]}$ ist der Coëfficient des fraglichen Factors. Der Exponent von a, nämlich $-\alpha$ folgt aus folgender Gleichung:

$$\alpha = \xi_0 - \eta_0$$

wo η_0 den dem ξ_0 entsprechenden grössten Werth der linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$, also die dem ξ_0 entsprechende Ordinate der gebrochenen Linie darstellt. Wie man sich leicht überzeugen kann, ist $\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}] . a^{\alpha}$ das höchste Glied des Substitutionsresultates, welches man für $x = x_0$ oder $x = x_r$ aus dem einmal nach x differentiirten Gleichungspolynome P, nämlich aus $\frac{dP}{dx} = S[\mathfrak{x} H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-1}]$ erhält, so zwar, dass sich die Bestimmung des Folgegliedes auch auf eine Division von P durch $\frac{dP}{dx}$ zurückführen lässt. Man entwickelt nur das erste Glied dieses Quotienten und ertheilt ihm dann das entgegengesetzte Zeichen.

Es zeigt sich also, dass in diesem gewöhnlichen Falle nur ein einziges Folgeglied erhalten wird. Wir sehen zugleich, dass die Bildung der transformirten Gleichung, so wie eine nähere Untersuchung derselben ganz überflüssig sei und durch ein viel einfacheres Verfahren ersetzt werden könne, welchem weder die Mehrdeutigkeit des x', noch ein complicirtes Rechnungsverfahren als Nachtheil anhängt. Wir bemerken auch ferner noch die grösste Übereinstimmung dieser Regel mit der bekannten Regel der Division und des Wurzelausziehens, eine Übereinstimmung, die wohl im Voraus erwartet werden konnte, weil diese beiden Regeln nur eine specielle Anwendung auf binomische Gleichungen des ersten und höheren Grades vorstellen. Das hier angegebene Verfahren ist so lange fortzusetzen, bis endlich alle Glieder der Auflösung x gefunden sind. Sind dieselben wirklich in einer endlichen Anzahl vorhanden, so wird dieses Verfahren das Nullsein aller folgenden Glieder ohne Schwierigkeit erkennen lassen; es wird nämlich bei der Substitution der Summe derselben das Gleichungspolynom P sich in ein identisch auf Null zurückziehendes Polynom verwandeln, womit einerseits erwiesen ist, dass die Summe dieser Glieder ein Genüge leistender Werth x sei, und andererseits die fernere Wiederholung nur Null liefern könne. Dass aber ein solches Abbrechen der Reihe nur zu den speciellen Fällen gehört, unterliegt wohl keinem weiteren Zweifel, weil dann ausserdem noch alle Coëfficienten der nächst niedrigeren Potenzen von a den Werth Null erhalten müssen. Dieses Nullwerden derselben kann nicht durch Wahl der Coëfficienten h und der Exponenten ξ erzielt werden, weil über ihre Werthe schon verfügt ist, trifft aber bisweilen in Folge der zwischen den mit H, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{x}$ bezeichneten Grössen zufällig bestehenden Relationen ein und in einem solchen Falle besteht dann ein solcher Genüge leistender Werth in geschlossener Form. In der Regel jedoch ist dies nicht der Fall und das Verfahren kann daher keine solche geschlossene Form, sondern nur eine unendliche Reihe liefern.

§. 9.

Wir übergehen nun zur Erörterung des zunächst liegenden Ausnahmsfalles, für welchen das eben dargestellte Verfahren brauchbar zu sein aufhört. Die Brauchbarkeit desselben, so wie die Giltigkeit aller vorhergehenden Schlüsse ist an die Bedingung gebunden, dass das Substitutionsresultat $\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{r-1}]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, mit anderen Worten, dass h_0 eine unwiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung $\Sigma[H h_0^r] = 0$ ist. Stellt sich heraus, dass diese Bedingung nicht erfüllt ist, sondern gleichzeitig beide Grössen $\Sigma[H h_0^r]$ und $\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{r-1}]$ verschwinden, folglich h_0 als eine wiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung $\Sigma[H h_0^r] = 0$ erscheint, so verlieren alle früheren Schlüsse ihre Giltigkeit, und man würde beim Einschlagen des früheren Verfahrens lauter unendliche Werthe für die Coëfficienten h_1, h_2, ... erhalten.

Hier sind aber wieder mehrere Fälle zu unterscheiden, je nachdem nämlich h_0 eine doppelte oder dreifache, oder endlich eine mehrfache Wurzel ist. Den einfachsten dieser verschiedenen Fälle wollen wir hier zunächst zum Gegenstande der Untersuchnng machen, jenen nämlich, wo h_0 eine doppelte Wurzel der Bestimmungsgleichung $\Sigma[H h_0^r] = 0$ ist. Dieser Fall ist dadurch charakterisirt, dass $\Sigma[H h_0^r]$ und $\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{r-1}]$ gleich Null, hingegen $\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H h_0^{r-2}]$ von Null verschieden angenommen wird.

Der eigentliche Grund, wesshalb die früheren Schlussfolgerungen ihre Giltigkeit verlieren, ist in dem Umstande zu suchen, dass die Summe der zweiten Glieder des entwickelten Substitutionsresultates, welche aus den einzelnen Gliedern $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes in der Form $\mathfrak{x} H h_0^{r-1} h_1 a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-\xi_0+\xi_1}$ hervorgehen, nicht mehr das höchste Glied:

$$h_1 \Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1} . a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-\xi_0+\xi_1}]$$

besitzen, sondern dasselbe bei der wirklichen Summirung gänzlich wegfällt, indem der Coëfficient $\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}]$ dieser höchsten Potenz von a der gemachten Annahme zufolge gleich Null wird. Man ist desshalb auch ausser Stande, über die Form des nun an seine Stelle tretenden höchsten Gliedes eine Angabe zu machen, so lange man nicht den Weg der directen Substitution einschlägt.

Es erweist sich zugleich als ungenügend, $x^{\mathfrak{x}}$ nur in seinen zwei ersten Gliedern der Entwickelung zu betrachten, um zu dem höchsten Gliede des geordneten Substitutionsresultates zu gelangen, weil bei der Summe jener Glieder $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes, deren lineare Functionen den grössten Werth besitzen, und auf welche sich das Summenzeichen Σ erstreckt, ein vollständiges Tilgen der ersten und zweiten Glieder erfolgt. Man wird daher die Ausdrücke in ihren drei ersten Gliedern entwickeln müssen, und nur auf solche Weise die Gewissheit haben, dass die ausgelassenen Glieder sämmtlich von niedrigerer Ordnung und daher auch ohne allen Einfluss auf das allein zu berücksichtigende höchste Glied des Substitutionsresultates seien und dies eben wieder nur so lange, als bei diesen dritten Gliedern der Entwickelung kein gegenseitiges Aufheben stattfindet. Wir werden daher $x^{\mathfrak{x}}$ in seinen drei ersten Gliedern entwickeln, hierauf die Substitution des dermassen entwickelten Ausdruckes in die einzelnen Glieder $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes ausführen und zuletzt aus der Summe aller dieser Glieder die höchsten auswählen.

Man erhält solchergestalt:

$$x^{\mathfrak{x}} = (h_0^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1})^{\mathfrak{x}} = h_0^{\mathfrak{x}} a^{\mathfrak{x}\xi_0} + \mathfrak{x} h_0^{\mathfrak{x}-1} h_1 a^{(\mathfrak{x}-1)\xi_0+\xi_1} + \binom{\mathfrak{x}}{2} h_0^{\mathfrak{x}-2} h_1^2 a^{(\mathfrak{x}-2)\xi_0+2\xi_1} + \ldots .$$

Jedes einzelne Glied $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes P erhält sonach den Werth:

$$H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}} = H h_0^{\mathfrak{x}} a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0} + \mathfrak{x} . H h_0^{\mathfrak{x}-1} h_1 a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-\xi_0+\xi_1} + \binom{\mathfrak{x}}{2} H h_0^{\mathfrak{x}-2} h_1^2 a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-2\xi_0+2\xi_1} + \ldots .$$

Nun ist noch die Summirung aller dieser Ausdrücke vorzunehmen und zwar auf alle jene Werthe von $\mathfrak{a}, \mathfrak{x}$ auszudehnen, welche in den einzelnen Gliedern $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes erscheinen. Der nöthigen Klarheit wegen wollen wir diese Summirung in zwei Abtheilungen trennen, indem wir das Gleichungspolynom

$$P = S[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]$$

in zwei Theile theilen:

$$P = \Sigma[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}] + \mathfrak{S}[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}].$$

Das Summenzeichen Σ erstreckt sich auf alle jene Glieder des Gleichungspolynomes, deren lineare Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ für den speciellen Werth ξ_0 den grössten Werth η_0 erlangen, während die zweite durch $\mathfrak{S}$ angezeigte Summirung auf alle übrigen Glieder auszudehnen ist, deren lineare Functionen kleinere Werthe als η_0 erhalten haben. Diese Trennung des Gleichungspolynomes P wird sich allsogleich als vortheilhaft erweisen. Ersetzt man nun hier jedes Glied $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ durch seinen obigen, in den ersten drei Gliedern entwickelten Werth, so erhält man:

$$\begin{aligned} P = {} & \Sigma[H h_0^{\mathfrak{x}} a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}] && + \mathfrak{S}[H h_0^{\mathfrak{x}} a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}] + \\ & + \Sigma[\mathfrak{x} . H h_0^{\mathfrak{x}-1} h_1 a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-\xi_0+\xi_1}] && + \mathfrak{S}[\mathfrak{x} . H h_0^{\mathfrak{x}-1} h_1 a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-\xi_0+\xi_1}] + \\ & + \Sigma\left[\binom{\mathfrak{x}}{2} H h_0^{\mathfrak{x}-2} h_1^2 a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-2\xi_0+2\xi_1}\right] && + \mathfrak{S}\left[\binom{\mathfrak{x}}{2} H h_0^{\mathfrak{x}-2} h_1^2 a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-2\xi_0+2\xi_1}\right] + \ldots . \end{aligned}$$

Da die Summirung Σ auf alle jene Werthe $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{x}$ auszudehnen ist, deren lineare Functionen $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0$ einerlei und grössten Werth erlangen, für welchen wir die Bezeichnung η_0 angenommen haben, so ist ersichtlich, dass in den mit dem Symbole Σ angedeuteten Summen $a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}=a^{\eta_0}$ sei und als eine Constante bezüglich der Summirung eben so wie h_1 und $a^{-\xi_0+\xi_1}$ vor dem Summenzeichen gesetzt werden könne. Hierdurch verwandelt sich obige Formel mit Rücksicht auf die Annahmen:

$$\Sigma[Hh_0^{\mathfrak{x}}]=0 \text{ und } \Sigma[\mathfrak{x}Hh_0^{\mathfrak{x}-1}]=0$$

in die folgende:

$$P=\mathfrak{S}[Hh_0^{\mathfrak{x}}a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}]+h_1a^{\xi_1}.\mathfrak{S}[\mathfrak{x}Hh_0^{\mathfrak{x}-1}a^{\mathfrak{a}+(\mathfrak{x}-1)\xi_0}]+$$
$$+\Sigma[\tbinom{\mathfrak{x}}{2}Hh_0^{\mathfrak{x}-2}]h_1^2a^{\eta_0-2(\xi_0-\xi_1)}+h_1^2a^{-2(\xi_0-\xi_1)}.\mathfrak{S}[\tbinom{\mathfrak{x}}{2}Hh_0^{\mathfrak{x}-2}a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}]+\ldots$$

Eine einfache Überlegung reicht nun hin, um einzusehen, dass die allerletzte Summe:

$$\mathfrak{S}[\tbinom{\mathfrak{x}}{2}Hh_0^{\mathfrak{x}-2}a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}]$$

nur niedrigere Potenzen von a als a^{η_0} enthalten könne, indem die Summe $\mathfrak{S}$ nur auf jene Werthe von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{x}$ auszudehnen, deren lineare Functionen $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0$ kleiner als η_0 ausfallen.

Es kann demnach in dem Ausdrucke:

$$h_1^2a^{-2(\xi_0-\xi_1)}\mathfrak{S}[\tbinom{\mathfrak{x}}{2}Hh_0^{\mathfrak{x}-2}a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}]$$

niemals die Potenz $a^{\eta_0-2(\xi_0-\xi_1)}$ erscheinen, während dieselbe allen Gliedern der unmittelbar vorangehenden Summe:

$$+\Sigma[\tbinom{\mathfrak{x}}{2}Hh_0^{\mathfrak{x}-2}]h_1^2a^{\eta_0-2(\xi_0-\xi_1)}$$

eigen ist. Die vierte Summe in obiger Formel enthält demnach nur Glieder von niedrigerer Ordnung im Vergleiche zur dritten und es ist sonach keinem Zweifel unterworfen, dass das höchste Glied des Substitutionsresultates nur aus den folgenden drei Bestandtheilen hervorgehen könne:

$$\mathfrak{S}[Hh_0^{\mathfrak{x}}a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}]+h_1a^{\xi_1}.\mathfrak{S}[\mathfrak{x}Hh_0^{\mathfrak{x}-1}a^{\mathfrak{a}+(\mathfrak{x}-1)\xi_0}]+\tfrac{1}{2}h_1^2.\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)Hh_0^{\mathfrak{x}-2}]a^{\eta_0-2\xi_0+2\xi_1}$$

so lange, wie hier vorausgesetzt ist, $\xi_1<\xi_0$ ausfällt.

Die erste der hier erscheinenden Summen, nämlich $\mathfrak{S}[Hh_0^{\mathfrak{x}}a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}]$ lässt sich aus der Summe jener Glieder des Gleichungspolynomes P, welche unter dem Summenzeichen $\mathfrak{S}$ vereinigt sind und denen die kleineren linearen Functionen entsprechen, d. h. aus $\mathfrak{S}[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}]$ ableiten, wenn man x durch das Anfangsglied $h_0a^{\xi_0}$ ersetzt. In ähnlicher Weise geht die zweite Summe $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}Hh_0^{\mathfrak{x}-1}a^{\mathfrak{a}+(\mathfrak{x}-1)\xi_0}]$ aus derselben Gliedersumme $\mathfrak{S}[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}]$ hervor, wenn man sie zuvörderst einer einmaligen Differentiation nach x unterwirft und hierauf in dem ersten Differentialquotienten $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}-1}]$ abermals x durch das Anfangsglied $h_0a^{\xi_0}$ ersetzt. Endlich die letzte Summe $\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)Hh_0^{\mathfrak{x}-2}]a^{\eta_0-2\xi_0}$ lässt sich aus der Gliedersumme $\Sigma[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}]$, denen die grössten linearen Functionen entsprechen, ableiten durch zweimalige Differentiation derselben nach x und nachherige Substitution von $x=h_0a^{\xi_0}$. Man kann sich diese Substitutionen wirklich ausgeführt denken und es wird dann alsogleich möglich werden, das mit der höchsten Potenz von a versehene Glied einer jeden dieser Summen anzugeben. Wir wollen beziehungsweise mit:

$$\mathfrak{H}_0a^{\mathfrak{A}_0},\ \mathfrak{H}_0'a^{\mathfrak{A}_0'} \text{ und } \mathfrak{H}_0''a^{\mathfrak{A}_0''}$$

die mit der höchsten Potenz von a versehenen Glieder bezeichnen, die aus den Polynomen:

$$\mathfrak{S}[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}],\ \mathfrak{S}[\mathfrak{x}Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}-1}],\ \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}-2}]$$

für $x = h_0 a^{\xi_0}$ hervorgehen; so kann offenbar das mit der höchsten Potenz von a versehene Glied des obigen Ausdruckes nur aus den drei Gliedern:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + h_1 . \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0' + \xi_1} + \frac{1}{2} h_1^2 . \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1}$$

hervorgehen, so lange nämlich $\xi_1 < \xi_0$ ist. Das höchste Glied des für $x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \ldots$ aus dem Gleichungspolynome P hervorgehenden Substitutionsresultates wird demnach auch aus diesen drei Gliedern zu suchen sein. Nun sollen die Grössen ξ_1 und h_1 dermassen gewählt werden, dass dieses höchste Glied verschwindet. Zu diesem Ende hat man in der bekannten Weise mit der Bestimmung von ξ_1 zu beginnen, indem man Sorge trägt, dass zwei der hier erscheinenden Exponenten: $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{A}_0' + \xi_1$, $\mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1$ gleiche und grösste Werthe erlangen. Man hat demnach die drei Ungleichungen:

$$\eta_1 > \mathfrak{A}_0 \ , \ \eta_1 > \mathfrak{A}_0' + \xi_1 \ , \ \eta_1 > \mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1$$

aufzulösen und namentlich ihre Grenzwerthe der zweiten Ordnung aufzusuchen. Diese sind die passenden Werthe von ξ_1. Hat man ξ_1 gefunden, so unterliegt die Bestimmung von h_1 keiner Schwierigkeit mehr, denn es sind dann $\mathfrak{A}_0'$, $\mathfrak{A}_0' + \xi_1$, $\mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1$ bestimmte Zahlen und man kann unmittelbar die grössten derselben hervorheben, und demgemäss auch den Coëfficienten bilden, mit dem die höchste Potenz von a multiplicirt erscheint. Dieser Coëfficient ist ein binomischer oder trinomischer, h_1 enthaltender Ausdruck; setzt man denselben gleich Null und löst die erhaltene Gleichung des ersten oder zweiten Grades nach h_1 auf, so ist jede von Null verschiedene Wurzel derselben ein geeigneter Werth von h_1. Auf solche Weise ist demnach die Bestimmung des Folgegliedes abgeschlossen. Man benimmt sich dabei genau so, wie wenn man die quadratische Gleichung:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} x' + \tfrac{1}{2} \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''} x'^2 = 0$$

vorliegen, und die Anfangsglieder von x' zu bestimmen hätte.

Wir wollen hier nur noch die Bemerkung folgen lassen, dass die drei Glieder: $\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$, $\mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}$, $\mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''}$ wären erhalten worden, wenn man die Substitution $x = h_0 a^{\xi_0}$ in das vollständige Gleichungspolynom P und seine beiden Differentialquotienten $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{d^2P}{dx^2}$ ausgeführt und die höchsten Glieder dieser drei Substitutionsresultate genommen hätte, wie man sich sehr leicht zu überzeugen im Stande ist. Das letzte dieser drei Glieder $\mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''}$ ist übrigens ein vollkommen bestimmtes, welches auch ohne alle Substitution direct aus der Bestimmungsgleichung $\Sigma[H h_0^x] = 0$, der bereits bekannten grössten Ordinate η_0 und der ihr zugehörigen Abscisse η_0 abgeleitet werden kann. Es ist nämlich, wie eine eine einfache Ansicht der früheren Formeln lehrt:

$$\mathfrak{A}_0'' = \eta_0 - 2\xi_0 \ , \ \mathfrak{H}_0'' = \Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}].$$

Die früher erwähnte quadratische Gleichung in x', welche die Folgeglieder $h_1 a^{\xi_1}$ liefert, kann demnach auch in der folgenden Form aufgeschrieben werden:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} . x' + \tfrac{1}{2} \Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] . a^{\eta_0 - 2\xi_0} . x'^2 = 0.$$

Die Regel, um sie zu bilden, ist demnach folgende: Man substituire, wenn die Bestimmungsgleichung $\Sigma[H h_0^x] = 0$ eine doppelte Wurzel h_0 besitzt, das gefundene Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ anstatt x in das Gleichungspolynom P und seinen ersten Differentialquotienten $\frac{dP}{dx}$, ordne diese beiden Substitutionsresultate absteigend nach Potenzen von a und bestimme das höchste Glied $\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$ und

$\mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}$ derselben. Hierauf unterwerfe man die Summe der bezeichneten Glieder $\Sigma[H a^{\alpha} x^{x}]$ einer zweimaligen Differentiation nach x und substituire auch hier in dem gewonnenen Ausdrucke $\Sigma[x(x-1) H a^{\alpha} x^{x-2}]$ das Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ anstatt x und erhält so $\Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] . a^{\eta_0 - 2\xi_0}$. Diese drei Glieder $\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}$, $\mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}$, $\Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] a^{\eta_0 - 2\xi_0}$ multiplicire man nun beziehungsweise mit 1, x' und $\frac{x'^2}{2}$, bilde die Summe dieser drei Producte und setze dieselbe gleich Null; so hat man die gesuchte quadratische Gleichung und die Anfangsglieder der absteigenden Entwickelung von x' sind die gesuchten Werthe des Folgegliedes $h_1 a^{\xi_1}$.

Die an dieser quadratischen Gleichung vorgenommene Untersuchung der Anfangsglieder der absteigenden Entwickelung von x' kann offenbar zu mehreren verschiedenen Fällen führen, die wir hier näher erörtern wollen. Man hat nämlich mit der Auflösung der drei Ungleichungen:

$$\eta_1 > \mathfrak{A}_0 \ , \ \eta_1 > \mathfrak{A}_0' + \xi_1 \ , \ \eta_1 > \eta_0 - 2\xi_0 + 2\xi_1$$

zu beginnen, und die Grenzwerthe der zweiten Ordnung dafür zu bestimmen. Eine solche Untersuchung kann hier, wo drei Ungleichungen vorliegen, entweder zwei oder nur einen einzigen solchen Grenzwerth liefern. Liefert sie zwei solche Grenzwerthe, so sind sie folgende:

$$\mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0' \ , \ \mathfrak{A}_0' - \eta_0 + 2\xi_0.$$

Ist hingegen ein einziger gewonnen worden, so hat er den Werth:

$$\frac{\mathfrak{A}_0 - \eta_0}{2} + \xi_0.$$

Die Bestimmungsgleichungen für die zugehörigen h_1, welche besagen, dass bei jeder solchen Reduction das Resultat derselben ein Coëfficient Null sein soll, sind:

1. für $\xi_1 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0'$, $\mathfrak{H}_0 + h_1 \mathfrak{H}_0' = 0$, also $h_1 = -\frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_0'}$
2. für $\xi_1 = \mathfrak{A}_0' - \eta_0 + 2\xi_0$, $h_1 \mathfrak{H}_0' + \frac{h_1^2}{2} \Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] = 0$ also $h_1 = -\frac{2\mathfrak{H}_0'}{\Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}]}$
3. für $\xi_1 = \frac{\mathfrak{A}_0 - \eta_0}{2} + \xi_0 < \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0'$, $\mathfrak{H}_0 + \frac{h_1^2}{2} \Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] = 0$, also $h_1 = \pm \sqrt{\frac{-\mathfrak{H}_0}{\Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}]}}$
4. für $\xi_1 = \frac{\mathfrak{A}_0 - \eta_0}{2} + \xi_0 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0'$, $\mathfrak{H}_0 + h_1 \mathfrak{H}_0' + \frac{h_1^2}{2} \Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] = 0$.

Diese Gleichung liefert zwei in der Regel von einander verschiedene Werthe für h_1.
Nur wenn zufällig die Bedingungen:

$$\mathfrak{H}_0'^2 = 2\mathfrak{H}_0 \Sigma[x(x-1) H h_0^{x-2}] \text{ und } \frac{\mathfrak{A}_0 - \eta_0}{2} + \xi_0 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0'$$

erfüllt sein sollten, treten zwei gleiche Wurzeln h_1 auf. Wir ersehen hieraus, dass man auf solche Weise in der Regel zu zwei verschiedenen Folgegliedern gelangen wird, die sich manchmal schon in dem Exponenten ξ_1 unterscheiden, oder dasselbe ξ_1 zwar gemeinschaftlich besitzen, aber durch die Werthe der Coëfficienten h_1 von einander verschieden sind. Nur selten werden die zuletzt angeführten Bedingungen erfüllt sein, welche zur Folge hätten, dass nicht zwei verschiedene Folgeglieder, sondern nur ein einziges solches erhalten würde. Das hier

dargestellte Verfahren wird daher in der Regel die Trennung jener zwei Auflösungen bewerkstelligen, die das Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ gemeinschaftlich besitzen, und nur ausnahmsweise dieselbe noch auf später verschieben, falls sich auch das zweite Glied $h_1 a^{\xi_1}$ als ein beiden gemeinschaftlich zukommendes erweisen würde.

Der weitere Gang der Approximation ist je nach den hier sich darstellenden Ergebnissen verschieden: Hat die Bestimmung des Gliedes $h_1 a^{\xi_1}$ eine Trennung der zwei Wurzeln, die noch vereinigt waren, dadurch bewirkt, dass zwei verschiedene Werthe entweder für ξ_1 oder erst für h_1 sich ergaben; so wird die weitere Approximation von einem ähnlichen Verfahren abhängig sein, wie bereits früher für solche Auflösungen exponirt wurde, deren Anfangsglied ein isolirendes war. Dort reducirte sich die ganze Untersuchung nur darauf, den bereits bekannten Bestandtheil von x in das Gleichungspolynom zu substituiren, das Substitutionsresultat gehörig zu ordnen und nun das Anfangsglied desselben $\mathfrak{H}_1 a^{\mathfrak{A}_1}$ mit einem bestimmten Factor $-\frac{a-a}{\Sigma_\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}}$ zu multipliciren. Jetzt wird das Verfahren zur Bestimmung der übrigen Folgeglieder ähnlich sein. Nur der Factor ist erst näher zu bestimmen, da offenbar die frühere Form desselben nicht gelten kann, weil sie einen Nenner Null ausweist. Erinnern wir uns jedoch, dass dieser Factor eigentlich der mit entgegengesetztem Zeichen genommene reciproke Werth des höchsten Gliedes jenes Substitutionsresultates sei, welches durch Substitution des bereits bekannten Bestandtheiles von x in den ersten Differentialquotienten $\frac{dP}{dx}$ hervorgeht, so wird über den Werth dieses Factors kein weiterer Zweifel obwalten. Am einfachsten verfährt man, wenn man sich denselben wirklich durch Substitution zu verschaffen sucht. Es unterliegt jedoch auch keiner Schwierigkeit, denselben in Voraus anzugeben, nur ist seine Form in verschiedenen Fällen gleichfalls verschieden.

Ist man jedoch zufälliger Weise nur auf einen einzigen Werth ξ_1 und gleiche Wurzelwerthe h_1 gestossen, so dient dies als Beweis, dass die Trennung der Wurzeln in den zwei ersten Gliedern der Entwickelung noch nicht stattfinde, sondern diese beiden Auflösungen gemeinschaftlich zukommen. Man wird daher bei der Bestimmung der Folgeglieder $h_2 a^{\xi_2}$ in gleicher Weise verfahren, wie eben jetzt gezeigt wurde, d. h. man wird den erhaltenen Bestandtheil $x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1}$ in das Gleichungspolynom P und seinen ersten Differentialquotienten $\frac{dP}{dx}$ setzen, und gelangt so zu den diesen Substitutionsresultaten entsprechenden höchsten Gliedern, die wir mit $\mathfrak{H}_1 a^{\mathfrak{A}_1}$ und $\mathfrak{H}_1' a^{\mathfrak{A}_1'}$ bezeichnen wollen, während der zweite Differentialquotient $\frac{d^2P}{dx^2}$ erwiesenermassen ein mit dem Anfangsgliede $\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H h_0^{\mathfrak{x}-2}] a^{\eta_0 - 2\xi_0}$ beginnendes Substitutionsresultat liefert. Nun stellt man die quadratische Partialgleichung:

$$\mathfrak{H}_1 a^{\mathfrak{A}_1} + x' \mathfrak{H}_1' a^{\mathfrak{A}_1'} + \frac{x'^2}{2} \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H h_0^{\mathfrak{x}-2}] . a^{\eta_0 - 2\xi_0} = 0$$

auf und bestimmt die Anfangsglieder von x' nach der bekannten Methode. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen lassen die eben früher angeführten 4 verschiedenen Fälle zu. Sollte dies zur Trennung der Wurzeln noch nicht hinreichen, so muss man auf diesem Wege so lange fortfahren, bis entweder die Trennung erfolgt, oder bis das Vorhandensein gleicher Wurzeln erwiesen ist. Von demjenigen Gliede angefangen, bei dem die Trennung der Wurzeln erfolgt ist, ändert die Approximation ihre Natur, indem nun jede Auflösung isolirt zur Berechnung gelangt und an die Stelle der quadratischen Gleichung, Gleichungen des ersten Grades treten.

§. 10.

Wir wenden uns jetzt dem allgemeinen Falle zu, demjenigen nämlich, wo m Auflösungen dasselbe Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ gemeinschaftlich besitzen, d. h. wo h_0 eine m-fache Wurzel der Bestimmungsgleichung: $\Sigma[Hh_0^r]=0$ ist. Es bestehen dann die identischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&\Sigma[Hh_0^r]=0\\
&\Sigma[xHh_0^{r-1}]=0\\
&\Sigma[x(x-1)Hh_0^{r-2}]=0\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\\
&\Sigma[x(x-1)\ldots(x-m+2)Hh_0^{r-m+1}]=0.
\end{aligned}\tag{8}$$

Der Werth von

$$\Sigma[x(x-1)\ldots(x-m+1)Hh_0^{r-m}]$$

ist jedoch von Null verschieden. In einem solchen Falle sind die früher angeführten Approximationsmethoden unzulässig, weil die ihnen zu Grunde gelegte Annahme und somit alle darauf gestützten Folgerungen ungültig sind. Wir werden jedoch durch ein analoges Verfahren zu den Folgegliedern gelangen.

Wir substituiren nämlich wieder den Ausdruck:

$$x_0+x'=h_0 a^{\xi_0}+h_1 a^{\xi_1}+\ldots\ldots$$

anstatt x in die einzelnen Glieder des Gleichungspolynomes P und erhalten, weil zufolge der Relation $\xi_1<\xi_0$ die folgende Reihe für x^r gesetzt werden muss:

$$x^r=x_0^r+rx_0^{r-1}x'+\binom{r}{2}x_0^{r-2}x'^2+\ldots+\binom{r}{m-1}x_0^{r-m+1}x'^{m-1}+\binom{r}{m}x_0^{r-m}x'^m+\ldots.$$

aus einem jeden einzelnen Gliede $Ha^\alpha x^r$ einen Ausdruck, wie der folgende:

$$\begin{aligned}
Ha^\alpha x^r=Ha^\alpha x_0^r+rHa^\alpha x_0^{r-1}x'+\binom{r}{2}Ha^\alpha x_0^{r-2}x'^2+\ldots+\binom{r}{m-1}Ha^\alpha x_0^{r-m+1}x'^{m-1}+\\
+\binom{r}{m}Ha^\alpha x_0^{r-m}x'^m+\ldots.
\end{aligned}$$

Hier bedeutet x_0 das bekannte Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$, x' aber die Summe der Folgeglieder. Der für x^r in der angeführten Form gefundene Werth ist eine reine Function von a, nur erscheint derselbe hier noch nicht geordnet, weil jeder einzelne Bestandtheil in dieser Summe eine unendliche Reihe bedeutet. Das höchste Glied einer jeden solchen Reihe ist mit Leichtigkeit anzugeben. Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
x_0^r&=h_0^r.a^{r\xi_0}\\
rx_0^{r-1}x'&=rh_0^{r-1}h_1.a^{r\xi_0-\xi_0+\xi_1}+\ldots\ldots\\
\binom{r}{2}x_0^{r-2}x'^2&=\binom{r}{2}h_0^{r-2}h_1^2.a^{r\xi_0-2\xi_0+2\xi_1}+\ldots\ldots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\binom{r}{m-1}x_0^{r-m+1}x'^{m-1}&=\binom{r}{m-1}h_0^{r-m+1}h_1^{m-1}.a^{r\xi_0-(m-1)(\xi_0-\xi_1)}+\ldots\ldots\\
\binom{r}{m}x_0^{r-m}x'^m&=\binom{r}{m}h_0^{r-m}h_1^m.a^{r\xi_0-m(\xi_0-\xi_1)}+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

und folglich bedeutet auch jeder Bestandtheil der für $Ha^\alpha x^r$ gefundenen Summe eine unendliche Reihe, die in entwickelter Form folgende höchste Glieder besitzen:

$$\begin{aligned}
Ha^\alpha x^r&=Hh_0^r.a^{\alpha+r\xi_0}+\ldots\ldots\\
&+rHh_0^{r-1}h_1.a^{\alpha+r\xi_0-\xi_0+\xi_1}+\ldots\ldots\\
&+\binom{r}{2}Hh_0^{r-2}h_1^2.a^{\alpha+r\xi_0-2\xi_0+2\xi_1}+\ldots\ldots
\end{aligned}$$

$$(9)\qquad \dots + \binom{x}{m-1} H h_0^{x-m+1} h_1^{m-1} . a^{\alpha+x\xi_0-(m-1)(\xi_0-\xi_1)} + \dots\dots$$
$$\dots + \binom{x}{m} H h_0^{x-m} h_1^{m} . a^{\alpha+x\xi_0-m\xi_0-\xi_1} + \dots\dots$$

Wir sollten nun für jedes einzelne Glied des Gleichungspolynomes P, d. h. für alle dort erscheinenden Combinationen von $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{x}$, H diese Ausdrücke aus der Form (9) ableiten, indem wir anstatt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{x}$, H die entsprechenden Werthe setzen, und hierauf die Summe aller dieser Ausdrücke bilden, und zwar vor der Hand nur ihrer höchsten Glieder. Da die Zahlwerthe der mit ξ_1 und h_1 bezeichneten Grössen noch unbestimmt gelassen sind, so werden sich diese Rechnungsentwickelungen, namentlich die dabei vorkommenden Reductionen nur insoferne ausführen lassen, als sie sich auf Glieder beziehen, welche in der Anzahl der Factoren $h_1 a^{\xi_1}$ übereinstimmen. Wir werden also das Substitutionsresultat nicht in der vollkommen entwickelten Gestalt, als ein nur a enthaltendes und absteigend geordnetes Polynom darzustellen vermögen, wenn gleich nur das höchste Glied desselben gefordert wird; sondern werden es als ein x' oder $h_1 a^{\xi_1}$ in gewissen Potenzen enthaltendes Polynom erhalten, und nur die mit diesen Potenzen von x' oder $h_1 a^{\xi_1}$ multiplicirten, a enthaltenden und absteigend nach dieser Grösse geordneten Reihen in ihrem höchsten Gliede bestimmen können. Auf solche Weise gelangen wir zu einem a und $h_1 a^{\xi_1}$ enthaltenden Ausdrucke, gebildet aus der Summe dieser höchsten Glieder, und wenn wir dieselbe gleich Null setzen, so erhalten wir eine Partialgleichung, die zu dem verlangten Gliede $h_1 a^{\xi_1}$ führt. Wir werden bei der Substitution von $x = x_0 + x'$ in die einzelnen Glieder $H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes in einer analogen Weise verfahren, wie früher; wir werden nämlich diese Glieder in zwei Gruppen theilen, und die Substitution in zwei Momenten vollführen, indem wir zuerst in die Summe der Glieder der ersten, dann in die der zweiten Gruppe diesen Werth von x einführen. Diese Eintheilung der Glieder des Gleichungspolynomes P in zwei Gruppen bewerkstelligen wir nach den Werthen, welche die ihnen zugehörigen linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ für ξ_0 erlangen. Wir zählen nämlich zur ersten Gruppe alle jene Glieder, deren lineare Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ für ξ_0 den grössten Werth η_0 erlangen, alle übrigen aber zur zweiten Gruppe. Diese Trennung in zwei Gruppen haben wir nicht erst einzuleiten, denn sie ist schon bei der vorhergegangenen Bestimmung von ξ_0 erfolgt, und aus der Summe eben dieser Glieder der ersten Gruppe ist die bekannte Bestimmungsgleichung für h_0: $\Sigma[Hh^{\mathfrak{x}}] = 0$ gebildet. Substituiren wir nun in die Summe dieser Glieder der ersten Gruppe $\Sigma[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]$ anstatt x den Ausdruck $x_0 + x' = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \dots$; so ergibt sich ein Substitutionsresultat von folgender Form:

$$\begin{aligned}
\Sigma[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}] = {} & \Sigma[H h_0^{\mathfrak{x}}] a^{\eta_0} + x' a^{\eta_0-\xi_0} \Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}] + \tfrac{1}{2} x'^2 . a^{\eta_0-2\xi_0} \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H h_0^{\mathfrak{x}-2}] + \dots\dots \\
& + \frac{1}{1\dots(m-1)} x'^{m-1} a^{\eta_0-(m-1)\xi_0} \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\dots(\mathfrak{x}-m+2) H h_0^{\mathfrak{x}-m+1}] \\
& + \frac{1}{1\dots m} x'^{m} a^{\eta_0-m\xi_0} \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\dots(\mathfrak{x}-m+1) H h_0^{\mathfrak{x}-m}] + \dots\dots \\
= {} & \Sigma[H h_0^{\mathfrak{x}}] a^{\eta_0} + \\
(10)\qquad & + h_1 . a^{\eta_0-\xi_0+\xi_1} \Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}] + \dots\dots \\
& + \frac{h_1^2}{2} . a^{\eta_0-2\xi_0+2\xi_1} \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H h_0^{\mathfrak{x}-2}] + \dots\dots \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
& + \frac{h_1^{m-1}}{1\dots(m-1)} a^{\eta_0-(m-1)(\xi_0-\xi_1)} \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\dots(\mathfrak{x}-m+2) H h_0^{\mathfrak{x}-m+1}] + \dots\dots \\
& \dots + \frac{h_1^{m}}{1\dots m} a^{\eta_0-m(\xi_0-\xi_1)} \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\dots(\mathfrak{x}-m+1) H h_0^{\mathfrak{x}-m}] + \dots\dots
\end{aligned}$$

Der gemachten Annahme zufolge, h_0 sei eine $m$fache Wurzel der Bestimmungsgleichung $\Sigma[Hh^x]=0$ fallen die in (8) aufgeführten Summen gleich Null aus und nur die letzte derselben besitzt einen von Null verschiedenen Werth. Wir sehen hieraus, dass in diesem Ausdrucke (10) die Bestandtheile:

$$a^{\eta_0}\Sigma[Hh_0^x],\ x'a^{\eta_0-\xi_0}\Sigma[xHh_0^{x-1}],\ \tfrac{1}{2}x'^2a^{\eta_0-2\xi_0}\Sigma[x(x-1)Hh_0^{x-2}],\ \ldots.$$
$$\frac{1}{1\ldots(m-1)}x'^{m-1}a^{\eta_0-(m-1)\xi_0}\Sigma[x(x-1)\ldots(x-m+2)Hh_0^{x-m+1}]$$

verschwinden und nur der letzte der hier aufgeführten, nämlich:

$$\frac{1}{1\ldots m}x'^m a^{\eta_0-m\xi_0}\Sigma[x(x-1)\ldots(x-m+1)Hh_0^{x-m}]$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt, so zwar, dass die in der Summe von Gliedern: $\Sigma[Ha^\alpha x^\beta]$ ausgeführte Substitution als höchstes Glied

$$(11)\qquad \frac{h_1^m}{1\ldots m}a^{\eta_0-m(\xi_0-\xi_1)}\Sigma[x(x-1)\ldots(x-m+1)Hh_0^{x-m}]$$

liefert. Alle übrigen hier nicht aufgeführten Bestandtheile sind gegen dieses Glied von niedrigerer Ordnung nach a, denn die einen gehen aus Bestandtheilen:

$$\frac{1}{1\ldots p}x'^p a^{\eta_0-p\xi_0}\Sigma[x(x-1)\ldots(x-p+1)Hh_0^{x-p}]$$

hervor, welche einen m übersteigenden Werth von p aufweisen, die anderen aber entspringen zwar aus

$$\frac{1}{1\ldots m}x'^m a^{\eta_0-m\xi_0}\Sigma[x(x-1)\ldots(x-m+1)Hh_0^{x-m}]$$

enthalten aber anstatt des höchsten Gliedes von x'^m die späteren von niedriger Ordnung. Die ersteren erreichen höchstens die Gradzahl:

$$\eta_0+p\xi_1-p\xi_0<\eta_0-m(\xi_0-\xi_1)$$

die letzteren aber höchstens nur die Gradzahl:

$$\eta_0-m\xi_0+(m-1)\xi_1+\xi_2<\eta_0-m(\xi_0-\xi_1).$$

Substituiren wir nun auch den Werth $x=x_0+x'$ in die übrigen Glieder des Gleichungspolynomes P, die in der Summe $\Sigma[Ha^\alpha x^\beta]$ nicht einbegriffen sind, nämlich in die Gliedersumme $\mathfrak{S}[Ha^\alpha x^\beta]$. Über den Erfolg einer solchen Substitution lässt sich im Vorhinein nichts bestimmen; man muss daher diese Substitution und alle dabei möglichen Reductionen wirklich durchführen. Man gelangt auf solche Weise jedenfalls zu einem Ausdrucke von folgender Gestalt:

$$\mathfrak{H}_0a^{\mathfrak{A}_0}+x'\mathfrak{H}_0'a^{\mathfrak{A}_0'}+x'^2\mathfrak{H}_0''a^{\mathfrak{A}_0''}+\ldots+x'^{m-1}\mathfrak{H}_0^{(m-1)}a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)}}+\ldots.$$

weil sich nur jene Glieder reduciren lassen, welche dieselbe Potenz von x' als Factor besitzen, da in x' die Grössen h und ξ noch unbestimmte Buchstabengrössen anzeigen. Hier bedeuten:

$$\mathfrak{H}_0a^{\mathfrak{A}_0},\ \mathfrak{H}_0'a^{\mathfrak{A}_0'},\ \mathfrak{H}_0''a^{\mathfrak{A}_0''},\ \ldots\ \mathfrak{H}_0^{(m-1)}a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)}}\ldots.$$

die mit der höchsten Potenz von a verknüpften und von Null verschiedenen Glieder der für $x=x_0$ aus

$$P,\ \frac{dP}{dx},\ \frac{1}{2}\frac{d^2P}{dx^2},\ \ldots\ \frac{1}{(m-1)!},\ \frac{d^{m-1}P}{dx^{m-1}}\ldots$$

hervorgehenden Substitutionsresultate.

Da nun die höchsten Glieder von x', x'^2,... x'^m, ... bezüglich: $h_1 a^{\xi_1}$, $h_1^2 a^{2\xi_1}$, ..., $h_1^m a^{m\xi_1}$,... sind, so kann das höchste Glied des aus den Gliedern der zweiten Gruppe hervorgehenden Substitutionsresultates sich nur aus den folgenden zusammensetzen:

$$(12) \qquad \mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}, h_1 \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'+\xi_1}, h_1^2 \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''+2\xi_1}, \ldots h_1^{m-1} \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)}+(m-1)\xi_1}$$

Hier sind absichtlich nur m solche Glieder aufgeschrieben, hingegen alle übrigen, welche eine höhere Potenz von $h_1 a^{\xi_1}$ als die $(m-1)^{\text{te}}$ enthalten, weggelassen. Der Grund und die Berechtigung hiezu liegt in dem Umstande, dass erwiesenermassen alle diese weggelassenen Glieder von niederer Ordnung nach a sind. In der That wäre das nächste derselben $h_1^m \mathfrak{H}_1^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m)}+m\xi_1}$. Die erste Gruppe liefert aber, wie wir eben früher gezeigt haben, ein mit derselben $m$ten Potenz von $h_1 a^{\xi_1}$ verknüpftes Glied (11). Vergleicht man die Exponenten von a in diesen beiden Gliedern, nämlich:

$$\mathfrak{A}_0^{(m)} + m\xi_1 \text{ und } \eta_0 - m\xi_0 + m\xi_1,$$

so gelangt man vermittelst der Relation:

$$(13) \qquad \mathfrak{A}_0^{(m)} < \eta_0 - m\xi_0,$$

deren Giltigkeit wir sogleich erweisen werden, zu der anderen:

$$(14) \qquad \mathfrak{A}_0^{(m)} + m\xi_1 < \eta_0 - m\xi_0 + m\xi_1$$

und gewinnt dadurch die Überzeugung, dass das aus der zweiten Gruppe gewonnene Glied: $h_1^m \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m)}+m\xi_1}$ gegen das aus der ersten Gruppe entspringende (11) von niedrigerer Ordnung sei. Die Richtigkeit der Relation (13) lässt sich auf folgende Weise darthun. $\mathfrak{A}_0^{(m)}$ ist nämlich durch directe Substitution von $x = h_0 a^{\xi_0}$ in die $m$mal nach x differentiirten Glieder der zweiten Gruppe hervorgegangen, und bedeutet eben den höchsten dabei erscheinenden Exponenten von a. Substituirt man $x = h_0 a^{\xi_0}$ in diese Summe von Gliedern:

$$\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+1)\, H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-m},$$

so besitzt $\mathfrak{A}_0^{(m)}$ jedenfalls die Gestalt:

$$\mathfrak{A}_0^{(m)} = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0 - m\xi_0$$

und da alle diesen Gliedern entsprechenden Werthe von $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ kleiner sind als η_0, so ist offenbar:

$$\mathfrak{A}_0^{(m)} < \eta_0 - m\xi_0;$$

was zu beweisen war.

Von den übrigen hier ausser Acht gelassenen Gliedern von der Form $h_1^p \mathfrak{H}_0^{(p)} a^{\mathfrak{A}_0^{(p)}+p\xi_1}$, die eine höhere Potenz von $h_1 a^{\xi_1}$ in sich schliessen, für die also $p > m$ ist, lässt sich diese Eigenschaft gleichfalls erweisen, wenn man sich an die Relation $\xi_1 < \xi_0$ erinnert, denn hier ist dann $p(\xi_0 - \xi_1) > m(\xi_0 - \xi_1)$ und da für alle Glieder der zweiten Gruppe $\eta_0 > \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ besteht; so folgt hieraus unmittelbar:

$$(15) \qquad \eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1) > \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0 - p(\xi_0 - \xi_1).$$

Nun ist aber $\mathfrak{A}_0^{(p)}$, wie wir früher erwähnt haben, der Exponent von a im höchsten Gliede des Substitutionsresultates, welches aus der Summe der $p$mal nach x differentiirten Glieder

der zweiten Gruppe abgeleitet wird durch Substitution von x_0 anstatt x, und demnach jedenfalls ein Ausdruck von folgender Form:

$$\mathfrak{A}_0^{(p)} = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\,\xi_0 - p\,\xi_0,$$

wo $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ eine Combination von Werthen darstellt, die einem Gliede der zweiten Gruppe angehören. Setzen wir diesen Werth in die (15), so ergibt sich die Relation:

$$\eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1) > \mathfrak{A}_0^{(p)} + p\,\xi_1,$$

welche besagt, dass der Exponent von a im Gliede $h_1^p \mathfrak{H}_0^{(p)} a^{\mathfrak{A}_0^{(p)} + p\xi_1}$ kleiner sei, als in

$$\frac{h_1^m}{1 \ldots m} a^{\eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1)} \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+1) H h_0^{x-m}].$$

Es ist somit dargethan, dass diese Glieder alle nach a von niedrigerer Ordnung sind, und daher bei der Bildung des höchsten Gliedes unberücksichtigt bleiben können.

Fassen wir nun im Kurzen die Ergebnisse unserer Untersuchungen zusammen, so ersehen wir, nachdem im Substitutionsresultate P das allerhöchste oder vielleicht auch eine Reihe der nächstfolgenden höchsten Glieder durch die zweckmässige Wahl von ξ_0 und h_0 sich auf Null reducirt hat, dass das nunmehr höchste Glied desselben nur aus folgenden m Gliedern entstehen könne:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0},\ h_1 \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0' + \xi_1},\ h_1^2 \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1}, \ldots h_1^{m-1} \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)} + (m-1)\xi_1}$$

$$\frac{1}{1 \ldots m} h_1^m \Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+1) H h_0^{x-m} a^{\eta_0 - m(\xi_0 - \xi_1) + \xi_1}].$$

Die m zuerst aufgeführten Glieder werden durch directe Substitution von $x = h_0 a^{\xi_0}$ erhalten und gehen aus den Gliedern der zweiten Gruppe $\mathfrak{S}[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]$ und ihren successiven nach x genommenen Differentialquotienten: $\mathfrak{S}[\mathfrak{x} H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-1}]$, $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-2}]$, ... $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)(\mathfrak{x}-2)\ldots(\mathfrak{x}-m+2) H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-m+1}]$ hervor; das zuletzt angeführte aber lässt sich ohne alle Substitution blos nur aus der Bestimmungsgleichung für h_0 ableiten auf eine unmittelbar ersichtliche Weise und gehört den Gliedern der ersten Gruppe $\Sigma[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]$ an. Es handelt sich nun darum, für ξ_1 und h_1 die entsprechenden Zahlwerthe aufzusuchen. Diese Werthe haben den Zweck zu erfüllen, das höchste Glied mit einem Coëfficienten Null zu versehen. Zu diesen Werthen führt eine bekannte Untersuchungsweise, die darauf beruht, ein System linearer Ungleichungen aufzustellen und dann die Grenzwerthe der zweiten Ordnung für die demselben entsprechenden Auflösungen aufzusuchen. Dieses System von $m+1$ Ungleichungen ist folgendes:

$$\begin{aligned}
\eta_1 &> \mathfrak{A}_0 \\
\eta_1 &> \mathfrak{A}_0' + \xi_1 \\
\eta_1 &> \mathfrak{A}_0'' + 2\,\xi_1 \\
&\ldots \\
\eta_1 &> \mathfrak{A}_0^{(m-1)} + (m-1)\,\xi_1 \\
\eta_1 &> \eta_0 - m\,\xi_0 + m\,\xi_1.
\end{aligned}$$

Das Resultat einer solchen Bestimmung der Grenzwerthe zweiter Ordnung kann sehr verschiedene Eigenthümlichkeiten darbieten, die für die weitere Approximation von Einfluss sind. Die Anzahl der Grenzwerthe kann nämlich von Eins angefangen alle möglichen ganzen Werthe bis m

annehmen. Einem jeden einzelnen aufgefundenen Grenzwerthe ξ_1 entspricht eine gewisse Bestimmungsgleichung, die die zugehörigen Werthe des Coëfficienten h_1 liefert. Diese Bestimmungsgleichung lässt sich ohne alle Schwierigkeit ableiten aus denjenigen Gliedern der oberwähnten Reihe, welchen die grössten linearen Functionen entsprechen, und kann dem ersten oder auch einem höheren Grade angehören. Sie liefert daher zu dem einen Werthe ξ_1 entweder nur einen oder mehrere zugehörige h_1. Diese Gleichung in h_1 kann ausnahmsweise gleiche Wurzeln aufweisen, und dies wird immer als ein Beweis angesehen werden können, dass die Glieder $h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1}$ zweien oder mehreren Auflösungen x gemeinschaftlich zukommen. Diese Auflösungen unterscheiden sich dann von einander in den zwei ersten Gliedern der Entwickelung nicht, und wenn ihre Trennung bewerkstelligt werden sollte, so bedarf es noch der Bestimmung der dritten, vielleicht auch noch mehrerer Glieder der Entwickelung; ja es kann sich treffen, dass diese Trennung niemals erfolgt, weil diese Auflösungen überhaupt ganz gleich sein können. Es ist wohl leicht einzusehen, dass die Anzahl der auf solche Weise gewonnenen Glieder $h_1 a^{\xi_1}$ gleichkommt der Anzahl m der gleichen Wurzeln h_0, denn die Bestimmung derselben ist eigentlich abhängig von der Auffindung der Anfangsglieder einer Gleichung von folgender Form:

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} . x' + \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''} . x'^2 + \ldots + \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)}} . x'^{m-1} + \\ &+ \frac{1}{1 \ldots m} \Sigma [\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) \ldots (\mathfrak{x}-m+1) H h_0^{\mathfrak{x}-m} . a^{\eta_0 - m\xi_0} . x'^m] = 0 \end{aligned}$$

welche die neue Unbekannte x' enthält, und dem m^{ten} Grade angehört. Eine solche Gleichung liefert stets entweder m von einander verschiedene Anfangsglieder $h_1 a^{\xi_1}$ für x' oder, wenn sie deren weniger liefert, so besitzen die Bestimmungsgleichungen für den Coëfficienten h_1 gleiche Wurzeln, und zwar deren so viele, dass sie die Anzahl m wieder vervollständigen. Wir sehen also, dass wenn bei einem Anfangsgliede sich der Coëfficient h_0 als eine $m$fache Wurzel der Bestimmungsgleichung herausstellt, die weitere Approximation entweder hiezu m verschiedene Folgeglieder liefert, oder deren weniger. Ersteres ist der gewöhnlichere, das zweite jedoch ein specieller Fall, begründet in dem Auftreten gleicher Wurzeln h_1. Die Summe der Gradzahlen aller Bestimmungsgleichungen für h_1 ist aber stets m.

§. 11.

Die bisherigen Untersuchungen haben nur die Bestimmung des Folgegliedes $h_1 a^{\xi_1}$ zum Gegenstande gehabt. Die gewonnenen Resultate haben jedoch eine allgemeine Giltigkeit, weil sie auch zur Bestimmung eines beliebigen Folgegliedes $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ dienen, wenn die Summe der vorhergehenden Entwickelungsglieder, nämlich:

$$x_r = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \ldots + h_r a^{\xi_r}$$

bekannt ist. Es ist daher nothwendig, diese Untersuchungen nun auch in ihrer vollen Allgemeinheit zu geben, nachdem sie bisher nur in einem speciellen Falle eingeleitet wurden.

Wenn die Gliedersumme x_r den Beginn der auf $r+1$ Glieder ausgedehnten Entwickelung einer Wurzel x darstellt, so wird sie sich offenbar durch Hinzufügen der Reihe:

$$x' = h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} + \ldots .$$

in den wirklichen Wurzelwerth $x' = x_r + x'$ verwandeln lassen, wobei die Exponenten ξ_{r+1} , ξ_{r+2} , ξ_{r+3} , ... sämmtlich kleiner sind als ξ_r. Die Gleichung $P = 0$ wird daher für $x = x_r + x'$ erfüllt werden. Nun ist:

$$x^{\mathfrak{x}} = x_r^{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x} x_r^{\mathfrak{x}-1} x' + \binom{\mathfrak{x}}{2} x_r^{\mathfrak{x}-2} x'^2 + \ldots + \binom{\mathfrak{x}}{p} x_r^{\mathfrak{x}-p} x'^p + \ldots$$

und folglich:

$$(17) \qquad 0 = P = S[Ha^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}}] + x' S[\mathfrak{x} Ha^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-1}] + \frac{x'^2}{2} S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) Ha^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-2}] + \ldots$$
$$+ \frac{x'^p}{p} S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-p+1) Ha^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-p}] + \ldots .$$

Die darin erscheinenden Summen:

$$S[Ha^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}}] \ , \ S[\mathfrak{x} Ha^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-1}] \ , \ S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) Ha^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-2}] \ldots S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-p+1) Ha^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-p}] \ldots .$$

sind die für $x = x_r$ aus den Polynomen: P , $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, $\frac{d^pP}{dx^p}$ ..... hervorgehenden Substitutionsresultate. Setzen wir voraus, dass die nach Durchführung aller möglichen Reductionen übrig bleibenden und von Null verschiedenen höchsten Glieder derselben bezüglich mit $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$, $\mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}_r'}$, $\mathfrak{H}_r'' a^{\mathfrak{A}_r''}$, ... $\mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r^{(p)}}$ ..... bezeichnet werden; so sind die höchsten Glieder der einzelnen Bestandtheile in (17):

$$(18) \quad \mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r} \ , \ h_{r+1} \mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1}} \ , \ \tfrac{1}{2} h_{r+1}^2 \mathfrak{H}_r'' a^{\mathfrak{A}_r'' + 2\xi_{r+1}} \ , \ldots . \ \frac{1}{1\ldots p} h_{r+1}^p \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1}} \ldots .$$

Der Ausdruck (17) stellt das Substitutionsresultat eines Wurzelwerthes dar und muss sich demnach identisch auf Null reduciren. Dies wird nur dann möglich sein, wenn von den aufgeführten höchsten Gliedern (18) zwei oder mehrere mit derselben und höchsten Potenz von a versehen sind, so zwar, dass eine Reduction und in Folge der zweckmässigen Wahl des h_{r+1} ein gänzliches Verschwinden derselben erfolgt. Es wird demnach ξ_{r+1} und h_{r+1} gewisse Bedingungen zu erfüllen haben, ähnlich denjenigen, die wir bei der Bestimmung des Anfangsgliedes $h_0 a^{\xi_0}$ weitläufig erörtert haben. Man hat nämlich das System von Ungleichungen:

$$(19) \qquad \begin{aligned} \eta_{r+1} &> \mathfrak{A}_r \\ \eta_{r+1} &> \mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1} \\ \eta_{r+1} &> \mathfrak{A}_r'' + 2\,\xi_{r+1} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{r+1} &> \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\,\xi_{r+1} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

aufzustellen und für ξ_{r+1} die Grenzwerthe der zweiten Ordnung aufzusuchen.

Man hat aber nicht nöthig, alle diese Grenzwerthe zu suchen, weil von ihnen nur diejenigen brauchbar erscheinen, welche kleiner als ξ_r ausfallen und demnach einen Werth von ξ_{r+1} darstellen können. Dadurch wird man in den Stand gesetzt, statt des Systems von Ungleichungen (19) nur eine Abtheilung derselben in Rechnung zu ziehen, diejenige nämlich, welche die unter ξ_r liegenden Grenzwerthe liefert. Da die Ungleichungen in (19) aufsteigend nach den Coëfficienten von ξ_{r+1} geordnet erscheinen, so werden die Grenzwerthe gleichfalls nur in aufsteigender Reihenfolge erhalten und es wird demnach die für uns wichtige Abtheilung von Ungleichungen, welche die unter ξ_r liegenden Werthe liefert, aus einer Gruppe der ersteren in (19) zusammengesetzt sein.

Wir wollen sie mit:

$$(20)\qquad \begin{aligned} &\eta_{r+1} > \mathfrak{A}_r \\ &\eta_{r+1} > \mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ &\eta_{r+1} > \mathfrak{A}_r^{(p-1)} + (p-1)\,\xi_{r+1} \\ &\eta_{r+1} > \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\,\xi_{r+1} \end{aligned}$$

andeuten. Diese Abtheilung von Ungleichungen wird sich beim Bestimmen der Grenzwerthe der zweiten Ordnung von selbst abgrenzen, weil zufolge der Ordnungsweise der linearen Functionen die Grenzwerthe in aufsteigender Reihenfolge erhalten werden. Man wird nämlich zuerst die unter ξ_r liegenden Grenzwerthe finden, und endlich zum grössten unter ihnen gelangen. Auf diesen folgen die dem ξ_r gleichen oder grösseren Grenzwerthe. Ist man zu einem solchen gelangt, so schliesst man die Untersuchung in der Überzeugung, alle unter ξ_r liegenden Grenzwerthe erschöpft zu haben.

Denken wir uns nun unter ξ_{r+1} einen bestimmten jener unter ξ_r liegenden Grenzwerthe der zweiten Ordnung für das System (19) oder (20), ferner unter:

$$(21)\qquad \eta_{r+1} = \mathfrak{A}_r^{(q)} + q\,\xi_{r+1} = \cdots\cdots = \mathfrak{A}_r^{(q+s)} + (q+s)\,\xi_{r+1}$$

diejenigen linearen Functionen, welche die gleichen und grössten Werthe erlangen, wobei also der Natur der Sache nach $q+s \leqq p$ ausfällt, so ist hiemit die Reihe von Gliedern:

$$\frac{h_{r+1}{}^{q}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots q}\cdot a^{\mathfrak{A}_r(q)+q\xi_{r+1}}, \ldots\ldots, \frac{h_{r+1}{}^{q+s}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s)}\cdot a^{\mathfrak{A}_r(q+s)+(q+s)\xi_{r+1}}$$

bezeichnet, welche alle dieselbe höchste Potenz $a^{\eta_{r+1}}$ enthalten und bei der Summirung sich in ein einziges

$$\left[\frac{h_{r+1}{}^{q}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots q} + \cdots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s)}\right] a^{\eta_{r+1}}$$

zusammenziehen lassen. Eine Reduction desselben auf Null, d. h. ein Nullwerden seines Coëfficienten ist demnach an die Bedingungsgleichung:

$$(22)\qquad \frac{h_{r+1}{}^{q}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots q} + \cdots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s)} = 0$$

gebunden, aus welcher die Werthe von h_{r+1} hervorgehen. Diese Gleichung ist ganz und rational, weil q und s, wie in (18) ersichtlich ist, ganze und positive Zahlwerthe bedeuten. Sie lässt demnach, wenn man von dem Werthe $h_{r+1}=0$ absieht, in der Regel s, mindestens aber einen einzigen Werth von h_{r+1} zu.

Stellen wir uns nun unter h_{r+1} einen bestimmten dieser Werthe vor, der von Null verschieden und eine Auflösung der (22) ist und, um den allgemeinsten Fall zu berücksichtigen, eine $t$mal wiederholte Wurzel derselben darstellt, wobei, wie sich von selbst versteht, $t<s$ ist; so ist dann für diesen bestimmten Zahlwerth von h_{r+1} identisch:

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\frac{h_{r+1}{}^{q}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots q} + \cdots\cdots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s)} = 0 \\ &\frac{h_{r+1}{}^{q-1}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-1)} + \cdots\cdots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-1}\mathfrak{H}_r(q+s-1)}{1\ldots(q+s-1)} = 0 \\ &\frac{h_{r+1}{}^{q-2}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-2)} + \cdots\cdots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-2}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-2)} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{h_{r+1}{}^{q-t+1}\mathfrak{H}_r(q)}{\ldots(q-t+1)}+\ldots\ldots+\frac{h_{r+1}{}^{q+s-t+1}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-t+1)}=0$$

aber

$$\frac{h_{r+1}{}^{q-t}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-t)}+\ldots\ldots+\frac{h_{r+1}{}^{q+s-t}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-t)}$$

von Null verschieden.

Um Missverständnisse zu vermeiden, bemerken wir hier, dass eigentlich statt des Bruches $\frac{1}{1\ldots(q-t)}$ der andere $\frac{q(q-1)\ldots(q-t)}{1\ldots q}$ zu setzen wäre, so zwar, dass die hier gebrauchte Schreibweise nur für $q>t$ richtig ist, für $q=t$ jedoch der Bruch $\frac{1}{1\ldots(q-t)}$ und jeder ihm ähnliche durch Eins, für $q<t$ aber durch Null zu ersetzen kommt.

Substituiren wir also anstatt x den Werth $x_r+h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$ in die Polynome: P, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, ... $\frac{d^tP}{dx^t}$. Nun ist aber:

$$P=S[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}]$$
$$\frac{dP}{dx}=S[\mathfrak{x}Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}-1}]$$
$$\frac{d^2P}{dx^2}=S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}-2}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}}=S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+2)Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}-t+1}]$$
$$\frac{d^tP}{dx^t}=S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+1)Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}-t}]$$

und

$$x^n=x_r{}^n+nx_r{}^{n-1}h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}+\binom{n}{2}x_r{}^{n-2}h^2{}_{r+1}a^{2\xi_{r+1}}+\ldots\ldots$$

folglich:

$$(24)\quad P=S[Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}}]+h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-1}]+\tfrac{1}{2}h^2{}_{r+1}a^{2\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-2}]+\ldots.$$
$$+\frac{1}{1\ldots p}h^p{}_{r+1}a^{p\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-p+1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-p}]+\ldots$$

$$(25)\quad \frac{dP}{dx}=S[\mathfrak{x}Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-1}]+h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-2}]+\tfrac{1}{2}h^2{}_{r+1}a^{2\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)(\mathfrak{x}-2)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-3}]+.$$
$$+\frac{1}{1\ldots(p-1)}h_{r+1}{}^{p-1}a^{(p-1)\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-p+1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-p}]+\ldots$$

$$(26)\quad \frac{d^2P}{dx^2}=S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-2}]+h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)(\mathfrak{x}-2)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-3}]+$$
$$+\tfrac{1}{2}h_{r+1}{}^2a^{2\xi_{r+1}}+S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)(\mathfrak{x}-2)(\mathfrak{x}-3)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-4}]+\ldots.$$
$$+\frac{1}{1\ldots(p-2)}h_{r+1}{}^{p-2}a^{(p-2)\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-p+1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-p}]+\ldots.$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(27)\quad \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}}=S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+2)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-t+1}]+h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-t}]+\ldots$$
$$+\frac{1}{1\ldots(p-t+1)}h_{r+1}{}^{p-t+1}a^{(p-t+1)\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-p+1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-p}]+\ldots.$$

$$(28)\quad \frac{d^tP}{dx^t}=S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-t}]+h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-t-1}]+\ldots$$
$$+\frac{1}{1\ldots(p-t)}h_{r+1}{}^{p-t}a^{(p-t)\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-p+1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-p}]+\ldots.$$

Da vorausgesetztermassen die höchsten Glieder der hier erscheinenden Ausdrücke:

$$S[Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}}],\ S[\mathfrak{x}Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-1}],\ S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-2}],\ldots S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+1)Ha^{\mathfrak{a}}x_r{}^{\mathfrak{x}-t}]$$

mit:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r} , \mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}_r'} , \mathfrak{H}_r'' a^{\mathfrak{A}_r''} , \ldots \mathfrak{H}_r^{(t)} a^{\mathfrak{A}_r^{(t)}},$$

bezeichnet wurden, so hat man als Ordnungszahlen der einzelnen Bestandtheile

(29) in (24): $\mathfrak{A}_r , \mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1} , \mathfrak{A}_r'' + 2\xi_{r+1} , \ldots , \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\xi_{r+1} , \ldots$

(30) in (25): $\mathfrak{A}_r' , \mathfrak{A}_r'' + \xi_{r+1} , \ldots , \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-1)\xi_{r+1} , \ldots$

(31) in (26): $\mathfrak{A}_r'' , \ldots , \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-2)\xi_{r+1} , \ldots$

(32) in (27): $\mathfrak{A}_r^{(t-1)} , \mathfrak{A}_r^{(t)} + \xi_{r+1} , \ldots , \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-t+1)\xi_{r+1} , \ldots$

(33) in (28): $\mathfrak{A}_r^{t} , \ldots , \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-t)\xi_{r-1} , \ldots$

Unter ihnen sind die grössten Werthe, wie allsogleich erläutert werden soll:

(34)
$$\begin{aligned} &\text{für (24) } \ldots . \eta_{r+1} \\ &\text{für (25) } \ldots . \eta_{r+1} - \xi_{r+1} \\ &\text{für (26) } \ldots . \eta_{r+1} - 2\xi_{r+1} \\ &\text{für (27) } \ldots . \eta_{r+1} - (t-1)\xi_{r+1} \\ &\text{für (28) } \ldots . \eta_{r+1} - t\xi_{r+1} \end{aligned}$$

wo η_{r+1} den in (21) ersichtlichen Werth besitzt. Für die der (24) angehörigen Reihe (29) ist dies unmittelbar einleuchtend, weil sie geradezu dieselben linearen Functionen enthält, die in dem Systeme von Ungleichungen (19) erscheinen. Die übrigen Reihen (30), (31), ... (32), (33) unterscheiden sich von der Reihe (29) nur durch einen bei allen gemeinschaftlich hinzugetretenen subtractiven Bestandtheil: $-\xi_{r+1}$, $-2\xi_{r+1}$, ... und ferner noch durch das Fehlen gewisser Anfangsglieder. So z. B. sind die Glieder der Reihe (30) abgeleitet aus dem (29) durch Weglassen des ersten: $\mathfrak{A}_r$ und durch Verminderung aller übrigen um die Grösse ξ_{r+1}; jene der (31) durch Weglassen der zwei ersten: $\mathfrak{A}_r$ und $\mathfrak{A}'_r + \xi_{r+1}$ und Verminderung der übrigen um $2\xi_{r+1}$ u. s. w. Eine Verminderung aller Glieder der Reihe (29) um eine und dieselbe Grösse kann offenbar an der relativen Grösse derselben keine Veränderung bewirken; und selbst das Wegfallen gewisser Anfangsglieder wird nur dann eine Ungiltigkeit in den Angaben (34) herbeiführen, wenn sich dasselbe auf alle mit den grössten Werthen versehenen Glieder der (29) erstrecken würde, d. h. wenn in der entsprechenden Reihe kein Glied mehr mit den in (21) erscheinenden $\mathfrak{A}$ vorhanden wäre, also namentlich, wenn auch das Glied mit $\mathfrak{A}_r^{(q+s)}$ weggefallen wäre. Allein dieser Verlust erstreckt sich selbst bei der Reihe (33) nur auf die t ersten Glieder, und da stets $t \leqq s$ also auch $t \leqq q+s$ ist, so werden in allen diesen Reihen noch immer Glieder mit $\mathfrak{A}_r^{(q+s)}$ erscheinen und demnach die Angaben (34) vollkommen giltig sein. Hiedurch sind diejenigen Bestandtheile in (24), (25), (26), ... (27), (28) bezeichnet, welche zur Bildung des höchsten Gliedes dieser Substitutionsresultate beitragen; die in (21) erscheinenden $\mathfrak{A}_r^{(q)}, \ldots . \mathfrak{A}_r^{(q+s)}$ machen sie namhaft.

Die mit der höchsten Potenz von a versehenen Glieder in den für $x = x_r + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ aus $P , \frac{dP}{dx} , \frac{d^2P}{dx^2} , \ldots \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} , \frac{d^tP}{dx^t}$ hervorgehenden Substitutionsresultaten besitzen demnach vor Ausführung der hier möglichen Reductionen die Form:

$$P = \left[\frac{h_{r+1}^q \mathfrak{H}_r^{(q)}}{1 \ldots q} + \ldots\ldots\ldots + \frac{h_{r+1}^{q+s} \mathfrak{H}_r^{(q+s)}}{1 \ldots (q+s)}\right] a^{\eta_{r+1}} + \ldots .$$

$$\frac{dP}{dx} = \left[\frac{h_{r+1}^{q-1} \mathfrak{H}_r^{(q)}}{1 \ldots (q-1)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{h_{r+1}^{q+s-1} \mathfrak{H}_r^{(q+s)}}{1 \ldots (q+s-1)}\right] a^{\eta_{r+1} - \xi_{r+1}} + \ldots .$$

$$\frac{d^2P}{dx^2} = \left[\frac{h_{r+1}{}^{q-2}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-2)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-2}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-2)}\right] a^{\eta_{r+1}-2\xi_{r+1}} + \ldots\ldots$$

$$\frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} = \left[\frac{h_{r+1}{}^{q-t+1}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-t+1)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-t+1}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-t+1)}\right] a^{\eta_{r+1}-(t-1)\xi_{r+1}} + \ldots\ldots$$

$$\frac{d^tP}{dx^t} = \left[\frac{h_{r+1}{}^{q-t}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-t)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-t}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-t)}\right] a^{\eta_{r+1}-t\xi_{r+1}} + \ldots\ldots$$

Da nun aber h_{r+1} den Bedingungsgleichungen (23) Genüge leistet, so verschwinden die hier aufgeführten Glieder alle mit Ausnahme des letzten, welches einen von Null verschiedenen Werth erlangt. Bezeichnet man daher mit

$$\mathfrak{H}_{r+1}a^{\mathfrak{A}_{r+1}}\ ,\ \mathfrak{H}'_{r+1}a^{\mathfrak{A}'_{r+1}}\ ,\ \mathfrak{H}''_{r+1}a^{\mathfrak{A}''_{r+1}}\ ,\ \ldots\ldots\ \mathfrak{H}^{(t-1)}_{r+1}a^{\mathfrak{A}^{(t-1)}_{r+1}}\ ,\ \mathfrak{H}^{(t)}_{r+1}a^{\mathfrak{A}^{(t)}_{r+1}}$$

die nach Vollführung aller möglichen Reductionen übrig bleibenden, von Null verschiedenen Anfangsglieder der aus P, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, $\ldots$ $\frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}}$, $\frac{d^tP}{dx^t}$ für $x = x_r + h_{r+1}a^{\xi_{r+1}} = x_{r+1}$ hervorgehenden Substitutionsresultate, so bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{r+1} && < \eta_{r+1}\\
&\mathfrak{A}'_{r+1} && < \eta_{r+1} - \xi_{r+1}\\
&\mathfrak{A}''_{r+1} && < \eta_{r+1} - 2\,\xi_{r+1}\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-1)} && < \eta_{r+1} - (t-1)\,\xi_{r+1}
\end{aligned} \tag{35}$$

$$\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} = \eta_{r+1} - t\,\xi_{r+1} \tag{36}$$

$$\mathfrak{H}^{(t)}_{r+1} = \frac{h_{r+1}{}^{q-t}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-t)} + \ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-t}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-t)}. \tag{37}$$

Für die Substitutionsresultate, die aus den derivirten Functionen höherer Ordnung, z. B. aus $\frac{d^vP}{dx^v}$ hervorgehen, — wo $v > t$ angenommen wird — lässt sich weder für das entsprechende $\mathfrak{H}^{(v)}_{r+1}$ noch für $\mathfrak{A}^{(v)}_{r+1}$ eine diesen ähnliche und bestimmte Relation aufstellen, weil für t übersteigende Werthe von v weder die Angaben (34) noch die Relationen (23) Giltigkeit besitzen. Es lässt sich nur so viel bestimmen, dass auch für $v > t$ eine der (28) analoge Form besteht und dass die Gradzahlen der darin erscheinenden Bestandtheile durch eine der (33) ähnliche Reihe angegeben werden, deren Glieder höchstens den Werth $\eta_{r+1} - v\,\xi_{r+1}$ erreichen. Ob aber dieser höchste Werth sich wirklich darin vorfindet oder nicht, hängt davon ab, ob v kleiner, höchstens gleich oder grösser ist als $q+s$. Der Coëfficient der höchsten Potenz von a, die also für $q+s \geqq v$ den Exponenten $\eta_{r+1} - v\,\xi_{r+1}$ trägt, für $q+s < v$ aber einen kleineren aufweist, kann mehr- oder eintheilig sein und gelegentlich auch Null werden. Daraus geht hervor, das für $t < v \leqq q+s$ die doppeldeutige Relation:

$$\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(v)} \leqq \eta_{r+1} - v\,\xi_{r+1} \tag{38}$$

für $v > q+s$ aber die eindeutige:

$$\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(v)} < \eta_{r+1} - v\,\xi_{r+1} \tag{39}$$

besteht:

Nachdem wir nun die Relationen (35), (36), (37), (38), (39) kennen gelernt haben, wollen wir zur Bestimmung des Folgegliedes $h_{r+2}a^{\xi_{r+2}}$ schreiten. Wir verfahren dazu auf eine ähnliche Weise, wie bei der Bestimmung des Gliedes $h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$; wir substituiren nämlich anstatt x das Binom $x_{r+1} + x'$, wo

$$x_{r+1} = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + \ldots + h_r a^{\xi_r} + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$$
$$x' = h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} + \ldots .$$

ist und erörtern die Bedingungen, welche die Grössen ξ_{r+2} und h_{r+2} zu erfüllen haben. Es ist überflüssig diese Untersuchungen hier zu wiederholen, da für $r+1$ dasselbe gilt, wie für r. Das höchste Glied des Substitutionsresultates, das für $x = x_{r+1} + x'$ aus P hervorgeht, ist demnach gleichfalls aus einer Reihe von Gliedern zusammenzusetzen, die den in (18) aufgezählten ähnlich sind, aus ihnen durch Verwandeln von r in $r+1$ abgeleitet werden können. Sie sind folgende:

$$(40)\quad \mathfrak{H}_{r+1} a^{\mathfrak{A}_{r+1}}, h_{r+2}\mathfrak{H}'_{r+1} a^{\mathfrak{A}'_{r+1}+\xi_{r+2}}, \tfrac{1}{2} h^2_{r+2}\mathfrak{H}''_{r+1} a^{\mathfrak{A}''_{r+1}+2\xi_{r+2}}, \ldots \frac{1}{1\ldots p} h_{r+2}{}^{p}\mathfrak{H}^{(p)}_{r+1} a^{\mathfrak{A}^{(p)}_{r+1}+p\xi_{r+2}}, \ldots$$

ξ_{r+2} wird so zu wählen sein, dass eine Reduction der höchsten Glieder, h_{r+2} aber so, dass das Nullwerden derselben eintritt, wobei noch überdies $\xi_{r+2} < \xi_{r+1}$ ausfallen muss. Man hat demnach zur Bestimmung von ξ_{r+2} das System von Ungleichungen:

$$(41)\quad \begin{aligned} \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}_{r+1} \\ \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2} \\ \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \eta_{r+2} &> \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(p)} + p\,\xi_{r+2} \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

und wird die Grenzwerthe der zweiten Ordnung aufzusuchen haben. Die unter ξ_{r+1} liegenden Grenzwerthe liefern brauchbare Werthe für ξ_{r+2}. Bei der früher eingeleiteten Bestimmung von ξ_{r+1} wurde die Annahme gemacht, dass solche kleine Grenzwerthe wirklich bestehen. Hier aber können wir ihre Existenz erweisen. Bei der Auflösung dieses Systemes von Ungleichungen kommen nämlich die folgenden Reihen von Quotienten in Betrachtung:

$$(42)\quad \begin{aligned} &\mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}'_{r+1}, \ \frac{\mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}''_{r+1}}{2}, \ldots \frac{\mathfrak{A}_{+r1} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{t} \ldots\ldots \\ &\mathfrak{A}'_{r+1} - \mathfrak{A}''_{r+1}, \ldots \frac{\mathfrak{A}'_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{t-1} \ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-1)} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} \ldots . \end{aligned}$$

Man hat unter ihnen stets die kleinsten auszuwählen, und hierauf zur entsprechenden nachfolgenden Reihe überzugehen oder überzuspringen. Nun bestehen zufolge der aufgestellten Ungleichungen (35) und der Gleichung (36) die Relationen:

$$(43)\quad \begin{aligned} \frac{\mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{t} &< \xi_{r+1} \\ \frac{\mathfrak{A}'_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{t-1} &< \xi_{r+1} \\ \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-1)} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} &< \xi_{r+1} \end{aligned}$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass unter den Quotienten (42) solche vorkommen, die kleiner als ξ_{r+1} sind und brauchbare Werthe von ξ_{r+2} darstellen.

Betreff der Bestimmung von ξ_{r+1} wurde schon früher die Bemerkung gemacht, dass man nicht die Auflösung der Ungleichungen bis zu Ende führen müsse, sondern dass man nur so weit zu gehen habe, bis man alle unter ξ_r liegenden Grenzwerthe erschöpft hat. Auch hier gilt diese Bemerkung und es genügt namentlich statt der Ungleichungen (41) nur eine Abtheilung derselben:

$$
\begin{aligned}
&\eta_{r+2} > \mathfrak{A}_{r+1} \\
&\eta_{r+2} > \mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2} \\
&\eta_{r+2} > \mathfrak{A}''_{r+1} + 2\,\xi_{r+2} \\
&\quad\cdots\quad\cdots \\
&\eta_{r+2} > \mathfrak{A}_{r+1}^{(t-1)} + (t-1)\xi_{r+2} \\
&\eta_{r+2} > \mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} + t\,\xi_{r+2}
\end{aligned}
\tag{44}
$$

zu berücksichtigen, weil die weiter geführte Untersuchung lauter dem ξ_{r+1} gleiche oder grössere Werthe liefert, die dem ξ_{r+2} nicht ertheilt werden können.

In der That gelangt man nach den Quotientenreihen (42) zu der folgenden:

$$\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t+1)}\,,\quad \frac{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t+2)}}{2}\,,\quad \frac{\mathfrak{A}_{r+1}^{(t)} - \mathfrak{A}_{r+1}^{(t+3)}}{3} \cdots\cdots$$

Diese Quotienten sind zufolge der Relationen (38) und (39), welche für $v > t$ gelten und der Gleichung (36) sämmtlich mindestens gleich oder grösser als ξ_{r+1}, womit die Unbrauchbarkeit der durch weitergeführte Untersuchungen gewonnenen Grenzwerthe erwiesen ist. Man wird mit dem Systeme von Ungleichungen (44) zur Bestimmung von ξ_{r+2} vollkommen ausreichen. Jedem daraus abgeleiteten Werthe von ξ_{r+2} entspricht mindestens Ein Werth von h_{r+2}. Die Anzahl der von einander verschiedenen Folgeglieder $h_{r+2}\,a^{\xi_{r+2}}$, die auf solche Weise gewonnen werden, kann aber niemals die Anzahl t übersteigen, und auch nie unter Eins fallen, weil die Bestimmungsgleichung für h_{r+2} der (22) ähnlich ist, und aus ihr durch Verwandeln von r in $r+1$ hervorgeht. q und s sind ganze positive Zahlen und $q+s \leq t$.

In ganz gleicher Weise, wie zum Folgegliede $h_{r+2}\,a^{\xi_{r+2}}$, gelangt man zum nächstfolgenden $h_{r+3}\,a^{\xi_{r+3}}$ und zu den späteren. Es ergibt sich stets mindestens Eines, höchstens aber t an der Zahl. Wir schliessen hieraus, dass die hier auseinandergesetzte Methode allgemein giltig sei, um zu der bekannten Gliedersumme x_r das nächstfolgende Glied zu bestimmen, und wir wären auch überzeugt, stets mindestens ein einziges Folgeglied zu gewinnen, wenn nicht den hier geführten Untersuchungen eine stillschweigend gemachte Annahme zu Grunde läge. Es ist nämlich bisher nicht bewiesen worden, dass zu der Gliedersumme x_r mindestens ein einziger unter ξ_r liegender Grenzwerth für das System von Ungleichungen (19) und (20) bestehe, es ist nur erwiesen, dass, wenn ein solcher sich wirklich vorfindet, auch jedesmal mindestens ein einziger Werth für h_{r+1} und $h_{r+2}\,a^{\xi_{r+2}}$, $h_{r+3}\,a^{\xi_{r+3}}$, ... aufgefunden werden könne. Diese Lücke im Beweise lässt sich aber durch die früheren Untersuchungen leicht ausfüllen. Es wurde nämlich bei der Bestimmung des Folgegliedes $h_1\,a^{\xi_1}$ bewiesen, dass zu einem jeden Anfangsgliede $h_0\,a^{\xi_0}$ immer mindestens ein einziges Folgeglied $h_1\,a^{\xi_1}$ aufgefunden werde. Die Existenz eines unter ξ_r liegenden Grenzwerthes ist somit für $r = 0$ erwiesen und die eben jetzt beendigten Untersuchungen setzen seine Existenz auch für $r = 1, 2$ ..... ausser allem Zweifel, und wir gelangen dadurch zur Überzeugung, dass einem jeden Anfangsgliede wirklich mindestens Eine Auflösung entsprechen müsse.

§. 12.

Aus all' dem bisher Gesagten ergibt sich folgende allgemeine und für alle möglichen Fälle passende Regel, um zu der ermittelten Gliedersumme x_r das darauffolgende Glied $h_{r+1}\,a^{\xi_{r+1}}$ aufzufinden: Man bestimme zuvörderst, ob der Coëfficient h_r des zuletzt bestimmten

Gliedes $h_r a^{\xi r}$ nur eine einfache oder eine wiederholte Wurzel jener Bestimmungsgleichung sei, aus der er gewonnen worden. Diese Untersuchung, welche nicht erst anzustellen sein wird, da sie eben ein Theil der Auflösung der Bestimmungsgleichung ausmacht, führt nun zu einer bestimmten Zahl p, welche angibt, wie oft diese Wurzel h_r in der Gleichung erscheint. Nun setze man die bekannte Gliedersumme x_r an die Stelle der Unbekannten x im Gleichungspolynome P sowohl, als in seine p ersten nach x partiell genommenen Differentialquotienten, also in eine Reihe von Functionen:

$$P\ ,\ \frac{dP}{dx}\ ,\ \frac{d^2P}{dx^2}\ ,\ \ldots\ \frac{d^pP}{dx^p}$$

$p+1$ an der Zahl und ordne diese Substitutionsresultate, in welchen nur noch a erscheint, absteigend nach Potenzen dieser Buchstabengrösse. Die höchsten von Null verschiedenen Glieder dieser absteigend geordneten Substitutionsresultate:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}\ ,\ \mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r}\ ,\ \mathfrak{H}''_r a^{\mathfrak{A}''_r}\ ,\ \ldots\ \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r(p)}$$

werden zu einer Gleichung:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r} + x'\,\mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r} + \frac{x'^2}{2}\mathfrak{H}''_r a^{\mathfrak{A}''_r} + \ldots\ldots + \frac{x'^p}{1\ldots p}\mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r(p)} = 0$$

verbunden, die x' als Unbekannte enthält und dem p^{ten} Grade angehört, und nun wendet man auf diese das bekannte Verfahren zur Bestimmung der Anfangsglieder an. Die gewonnenen Anfangsglieder von x' sind die gesuchten Folgeglieder $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$. Jedes derselben bildet den Ausgangspunkt für eine eigene weitere Entwickelung von genau derselben Art.

Es ist nun leicht, sich ein klares Bild von dem Gange der absteigenden Entwickelung von x zu entwerfen. Man beginnt mit der Bestimmung des Anfangsgliedes. In der Regel findet man mehrere verschiedene Anfangsglieder, deren jedes einer einzigen Auflösung zukommt. Man erkennt dies daran, dass die zur Bestimmung von h_0 dienenden Gleichungen gar keine gleichen Wurzeln besitzen. Findet dieser gewöhnlichste Fall wirklich Statt, so ist mit der Bestimmung der Anfangsglieder zugleich die Trennung aller Wurzeln erfolgt, und die weitere Entwickelung besteht nur in der Annäherung zu einer dieser Wurzeln. Jedes Anfangsglied kann als Ausgangspunkt einer solchen Approximation benützt werden, und man wird durch ein regelmässig wiederkehrendes Verfahren die zugehörigen Folgeglieder entwickeln. Diese gehen alle aus Gleichungen des ersten Grades, also durch Divisionen hervor.

Minder einfach ist die Entwickelung der Folgeglieder, wenn mit der Bestimmung der Anfangsglieder noch nicht alle Wurzeln isolirt erscheinen. Man erkennt dies daran, dass der Coëfficient h_0 eines Anfangsgliedes eine wiederholte Wurzel der zu seiner Bestimmung dienenden Gleichung darstellt. Ist h_0 eine $m$fache Wurzel derselben, so besitzen m Auflösungen dieses Anfangsglied gemeinschaftlich, und $h_0 a^{\xi_0}$ bildet den Ausgangspunkt einer complicirteren Entwickelung. Zur Bestimmung des Folgegliedes $h_1 a^{\xi_1}$ hat man eine Gleichung des m^{ten} Grades, nämlich die:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + x'\,\mathfrak{H}'_0 a^{\mathfrak{A}'_0} + \frac{x'^2}{2}\mathfrak{H}''_0 a^{\mathfrak{A}''_0} + \ldots\ldots + \frac{x'^m}{1\ldots m}\mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0(m)} = 0$$

zu bilden und die Anfangsglieder von x' zu ermitteln. Findet man m von einander verschiedene Anfangsglieder $h_1 a^{\xi_1}$, so sind die Wurzeln vollkommen isolirt. Jedes derselben wird dann den Ausgangspunkt bilden einer eigenen Entwickelung, die nur zu einer einzigen Wurzel führt und in einer Reihe von Divisionen besteht. Es kann aber h_1 auch als wiederholte Wurzel auf-

treten und dann stimmen mehrere Auflösungen x in den zwei ersten Entwickelungsgliedern $h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1}$ überein. Die Anzahl p der gleichen Wurzeln h_1 ist zugleich die Anzahl dieser übereinstimmenden Auflösungen x. Das dritte Entwickelungsglied $h_2 a^{\xi_2}$ erhält man dann aus einer Gleichung des p^{ten} Grades:

$$\mathfrak{H}_1 a^{\mathfrak{A}_1} + x' \mathfrak{H}_1' a^{\mathfrak{A}_1'} + \frac{x'^2}{2} \mathfrak{H}_1'' a^{\mathfrak{A}_1''} + \ldots\ldots + \frac{x'^p}{1 \ldots p} \mathfrak{H}_1^{(p)} a^{\mathfrak{A}^{(p)}} = 0$$

durch Bestimmung der Anfangsglieder. Dieser Schritt kann eine vollständige oder theilweise Trennung der p noch nicht isolirten Wurzeln herbeiführen oder sie noch ungetrennt lassen. In dieser Weise schreitet die Entwickelung vorwärts. Besitzt die Gleichung $P = 0$ keine gleichen Wurzeln, so erfolgt die Trennung derselben immer bei hinlänglich weit fortgesetzter Entwickelung und von da an vereinfacht sich die weitere Entwickelung, indem sie sich auf wiederholte Division zurückführen lässt. Nur dann, wenn $P = 0$ zwei oder mehrere gleiche Wurzeln besitzt, wird die Trennung derselben niemals erfolgen.

Man sieht aus dieser Darstellung, dass die absteigende Entwickelung grosse Ähnlichkeit besitzt mit den bekannten Approximationsmethoden für Zahlengleichungen. Die eigentliche Schwierigkeit ist auch hier nur, die Trennung der Wurzeln zu bewerkstelligen. Hat man dieselbe erreicht, so ist die fernere Entwickelung mit keinen anderen Schwierigkeiten mehr verknüpft. Die Wurzel ist nämlich dann so bestimmt, wie jene einer Gleichung des ersten Grades, mit dem einzigen Unterschiede, dass man zu ihrer Entwickelung eine in der Regel unendliche Anzahl von solchen Gleichungen des ersten Grades aufzulösen hat. Die Entwickelung lässt sich meistentheils ins Unendliche fortsetzen, und ein Abbrechen der Reihe bei einem gewissen Gliede gehört nur zu den Ausnahmen. So lange nämlich das der Gliedersumme x_r entsprechende Substitutionsresultat, welches aus dem Gleichungspolynome P hervorgeht, von Null verschieden ausfällt, ergibt sich, wie dargethan wurde, stets ein von Null verschiedenes Folgeglied $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ und nur dann, wenn irgend eines dieser Substitutionsresultate vollkommen verschwindet, ist der Beweis hergestellt, dass die entsprechende Gliedersumme x_r schon der complete Werth von x ist, und dass die nachfolgenden Entwickelungsglieder alle gleich Null ausfallen. Das gänzliche Verschwinden eines Substitutionsresultates gehört aber immer nur zu den selteneren Fällen und hängt von dem zufälligen Erfülltsein gewisser Relationen ab. Es ist dies im Grunde nur ein analoges Verhalten, wie bei den bekannten Vorgängen der Division und des Wurzelausziehens, wobei man auch meistentheils die Rechnung ins Unendliche fortsetzen kann, weil man gewöhnlich lauter von Null verschiedene Reste erhält, und ein Abbrechen der Entwickelung gehört nur zu den Ausnahmen. Diese Analogie war im Voraus zu erwarten, weil diese bekannten Vorgänge der Division und des Wurzelausziehens die specielle Anwendung der hier auseinander gesetzten allgemeinen Entwickelungsmethode auf Gleichungen des ersten und binomische höheren Grades vorstellen.

§. 13.

Nachdem nun die Auflösungsmethode, um die Wurzeln einer Buchstabengleichung absteigend zu entwickeln, festgestellt ist, haben wir noch den rein praktischen Theil der Rechnung einer Betrachtung zu unterwerfen. Die aufgestellte Regel schreibt nämlich vor, nach der Bestimmung eines Entwickelungsgliedes die ganze bereits gefundene Gliedersumme in das Gleichungspolynom und vielleicht auch in einige derivirte Functionen anstatt der Unbekannten

x zu substituiren. Da sich diese Substitution demnach oftmals wiederholt und der damit verbundene Rechnungsaufwand mit der Anzahl der entwickelten Glieder fortwährend wächst, so würde selbst der geringste dabei begangene Umweg einen sehr merkbaren ungünstigen Einfluss nehmen. Allein nicht nur der unnütze Zeit- und Müheaufwand ist hier vom Belange, sondern auch die Fehlerquellen werden hiedurch vervielfacht, denn wo gäbe es einen Rechner, der diesem fühlbaren Übelstande nicht unterliegen würde. Diese Gründe dürften zur Genüge die Nothwendigkeit erweisen, dieses rein praktische Bedürfniss in Erwägung zu ziehen, wenn die hier gelehrte Auflösungsmethode in den nur einigermassen complicirteren Fällen ihre Anwendbarkeit nicht verlieren soll. Hier kann es keineswegs unsere Absicht sein, alle hierher gehörigen praktischen Regeln aufzuführen, die den mit ihnen vollkommen und zwar durch wiederholte Übung vertrauten Rechner in die Lage versetzen, in verhältnissmässig kurzer Zeit die Rechnung zu beenden und auch begangene Fehler leicht aufzufinden, und den Ort des Fehlers ohne langem Nachsuchen anzugeben. Dies würde uns nicht nur hier zu weit vom eigentlichen Ziele ablenken, sondern auch dem Leser wenig nützen, da diese kleinen aber sehr wichtigen Kunstgriffe mit jenen Fertigkeiten verglichen werden müssen, die nur durch lange und fortgesetzte Übung zum Eigenthume des Rechners werden, für den Theoretiker aber ein nutzloses Werkzeug sind und bleiben. Durch einiges Nachdenken kann Jedermann beim wirklichen Rechnen ohne Schwierigkeit dazu gelangen. Wir haben hier aber einen andern Gegenstand uns zur Aufgabe gemacht, der nicht so nahe liegt, und desshalb auch verdient, hier berührt zu werden.

Die von der Regel vorgeschriebenen Substitutionen, welche bei jedem neuen Entwickelungsgliede vollführt werden müssen, braucht man nämlich nicht immer von Neuem auszuführen mit der ganzen bisher bekannten Gliedersumme, sondern die Rechnung lässt sich bedeutend vereinfachen, indem man die bereits früher entwickelten Substitutionsresultate benützt und nur gewisse Zusätze zu denselben hinzufügt. Hat man nämlich für die Gliedersumme x_r die entsprechenden Substitutionsresultate schon gebildet, so erhält man hieraus das der um ein Glied vergrösserten Gliedersumme x_{r+1} entsprechende Substitutionsresultat durch Hinzufügen gewisser Zusätze. Bei diesem Vorgange entgeht man einer unnöthigen Wiederholung aller jener Rechnungsoperationen, welche die Substitution der Gliedersumme x_r zum Zwecke hat und die einen Theil der Substitution der vollständigen Gliedersumme x_{r+1} ausmachen würde. Diese Anordnung der Rechnung wurde von Fourier, wiewohl zunächst nur für numerische Gleichungen angegeben; sie gilt aber in völlig ungeänderter Form auch für Buchstabengleichungen und erweist sich hier bei dem viel complicirteren Probleme nur von desto grösserem Nutzen.

Bezeichnen wir mit $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{P}'_r$, $\mathfrak{P}''_r$, ... $\mathfrak{P}_r^{(m)}$ die für $x=x_r$ aus den Polynomen P, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$ ... $\frac{d^mP}{dx^m}$ abgeleiteten Substitutionsresultate, so erhält man dem Taylor'schen Lehrsatze zufolge das für $x=x_{r+1}$ hervorgehende Substitutionsresultat $\mathfrak{P}_{r+1}$ in folgender Form:

$$\mathfrak{P}_{r+1} = \mathfrak{P}_r + \frac{1}{1!}\mathfrak{P}'_r h_{r+1} a^{\xi_r+1} + \frac{1}{2!}\mathfrak{P}''_r h^2_{r+1} a^{2\xi_r+1} + \ldots + \frac{1}{m!}\mathfrak{P}_r^{(m)} h^m{}_{r+1} a^{m\xi_r+1}.$$

In dieser Gleichung ist selbstredend die Regel enthalten, wie man aus den bekannten Substitutionsresultaten $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{P}'_r$, $\mathfrak{P}''_r$ ... $\mathfrak{P}_r^{(m)}$ und dem zuletzt gewonnenen Gliede $h_{r+1}a^{\xi_r+1}$ das Substitutionsresultat $\mathfrak{P}_{r+1}$ ableiten könne. Bei dieser Bildungsweise der Substitutionsresultate ist es jedoch, wie von selbst ersichtlich, unerlässlich, auch in alle partiell nach x genommenen Differentialquotienten des Gleichungspolynomes P die Substitutionen auszuführen. Die

Regel, nach welcher dabei vorgegangen wird, ist von Fourier angegeben worden und hinlänglich bekannt. Man leitet nämlich aus den bekannten Substitutionsresultaten $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{P}'_r$, $\mathfrak{P}''_r$, $\ldots \mathfrak{P}_r^{(m)}$ folgende Ausdrücke ab, wobei das Glied $h_{r+1}\, a^{\xi r+1}$ kurz mit x bezeichnet wurde:

$$\begin{array}{llll} \mathfrak{P}_r^{(m)}, & \mathfrak{P}_r^{(m-1)}, \ldots\ldots & \mathfrak{P}_r'', & \mathfrak{P}_r', \quad \mathfrak{P}_r \\ \frac{x}{1}\mathfrak{P}_r^{(m)}, & \frac{x}{1}\mathfrak{P}_r^{(m-1)}, \ldots\ldots & \frac{x}{1}\mathfrak{P}_r'', & \frac{x}{1}\mathfrak{P}_r' \\ \frac{x^2}{1.2}\mathfrak{P}_r^{(m)}, & \frac{x^2}{1.2}\mathfrak{P}_r^{(m-1)}, \ldots\ldots & \frac{x^2}{1.2}\mathfrak{P}_r'' & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ \frac{x^{m-1}}{1\ldots(m-1)}\mathfrak{P}_r^{(m)}, & \frac{x^{m-1}}{1\ldots(m-1)}\mathfrak{P}_r^{(m-1)} & & \\ \frac{x^m}{1\ldots m}\mathfrak{P}_r^{(m)}. & & & \end{array}$$

Man multiplicirt zuerst die in der ersten Horizontalreihe stehenden Grössen mit Ausnahme der letzten mit x. Die dabei erhaltenen Producte sind die Grössen der zweiten Horizontalreihe. Diese werden abermals mit x multiplicirt und durch zwei dividirt, die letzte derselben ausgenommen, und führen so zu der dritten Horizontalreihe. Auf solche Weise fährt man fort, die Grössen einer eben erhaltenen Horizontalreihe mit x zu multipliciren und durch eine ganze Zahl zu dividiren, welche die Anzahl der bereits geübten Multiplicationen ist, und erhält so eine neue Horizontalreihe. Dabei lässt man aber stets die letzte Grösse unberührt, wodurch sich die Anzahl der Grössen stets um Eins verringert. Hat man dies genügend oft wiederholt, so zwar dass ein weiteres Fortsetzen unmöglich ist, so hat man nur noch alle in einer Diagonale liegenden Grössen zu summiren, um $\mathfrak{P}_{r+1}$, $\mathfrak{P}'_{r+1}$, $\mathfrak{P}''_{r+1}$, $\mathfrak{P}'''_{r+1}$, $\ldots \mathfrak{P}_{r+1}^{(m)}$ zu erhalten. Nämlich:

$$\mathfrak{P}_{r+1}^{(m)} = \mathfrak{P}_r^{(m)}$$

$$\mathfrak{P}_{r+1}^{(m-1)} = \mathfrak{P}_r^{(m-1)} + \frac{x}{1}\mathfrak{P}_r^{(m)}$$

$$\mathfrak{P}_{r+2}^{(m-2)} = \mathfrak{P}_r^{(m-2)} + \frac{x}{1}\mathfrak{P}_r^{(m-1)} + \frac{x^2}{1.2}\mathfrak{P}_r^{(m)}$$

$$\mathfrak{P}_{r+1}' = \mathfrak{P}_r' + \frac{x}{1}\mathfrak{P}_r'' + \frac{x^2}{1.2}\mathfrak{P}_r''' + \ldots + \frac{x^{m-1}}{1\ldots(m-1)}\mathfrak{P}_r^{(m)}$$

$$\mathfrak{P}_{r+1} = \mathfrak{P}_r + \frac{x}{1}\mathfrak{P}_r' + \frac{x^2}{1.2}\mathfrak{P}_r'' + \ldots + \frac{x^{m-1}}{1\ldots(m-1)}\mathfrak{P}_r^{(m-1)} + \frac{x^m}{1\ldots m}\mathfrak{P}_r^{(m)}.$$

Bei dieser Anordnung der Rechnung vermeidet man jede Wiederholung einer bereits früher geübten Operation und beschränkt sich geradezu auf das Minimum der unerlässlichen Rechnungen.

Das hier genannte Minimum bezieht sich aber gleichzeitig auf die Bildung einer bestimmten Anzahl von Entwickelungsgliedern und des zugehörigen Substitutionsresultates. Wollte man nur diese bestimmte Anzahl von Entwickelungsgliedern finden, ohne jedoch nach dem ihnen entsprechenden Substitutionsresultate Verlangen zu tragen, so könnte man allerdings in der Verringerung der Rechnungen noch weiter gehen. In der Mehrzahl der Fälle jedoch ist es nicht hinreichend, die Wurzel in einer besimmten Anzahl von Gliedern zu entwickeln, sondern es soll nebstdem angegeben werden, ob dieselben den completen Wurzelwerth darstellen oder nur einen Theil derselben, und wie gross der bei dem willkürlichen Abbrechen der Reihe begangene Fehler sei. Alle diese Fragen lassen sich nur aus dem entsprechenden Substitutionsresultate beantworten, und dies ist der Grund, wesshalb man wohl kaum je in der Lage sein wird, das Substitutionsresultat der entwickelten Gliedersumme entbehren zu können.

§. 14.

Wir wollen nun einige Beispiele der Rechnung unterziehen, und auf solche Weise die im Vorhergehenden gegebenen Regeln zu erläutern suchen.

Erstes Beispiel:

$$
\begin{aligned}
&(2a^5 - a^4 - 4a^3 + 4a^2 - a)x^5 + \\
&+ (-2a^8 + 7a^7 + a^6 - 9a^5 - 8a^4 - 16a^3 + 52a^2 - 31a + 5)x^4 + \\
&+ (a^8 + 4a^7 - 17a^6 - 31a^5 + 32a^4 + 27a^3 + 70a^2 - 118a + 35)x^3 + \\
(45)\quad &+ (-2a^9 + 11a^8 - 15a^7 - 14a^6 + 32a^5 + 35a^4 + 74a^3 - 160a^2 - 6a + 50)x^2 + \\
&+ (a^9 + 2a^8 - 27a^7 + 12a^6 + 86a^5 - 53a^4 + 49a^3 - 278a^2 + 275a - 70)x + \\
&+ (-2a^8 + a^7 + 28a^6 - 9a^5 - 80a^4 - 5a^3 - 23a^2 + 206a - 120) = 0
\end{aligned}
$$

sei die gegebene Gleichung. Dieselbe ist schon zu den complicirteren zu rechnen, da die Coëfficienten derselben vielgliederige Polynome sind, und wurde absichtlich dermassen gewählt, um für die uns wichtig scheinenden Bemerkungen Gelegenheit zu finden. Die Rechnung selbst erhält bei einer solchen complicirten Gleichung eine nicht unbedeutende Ausdehnung, und erfordert einen verhältnissmässig grösseren Zeitaufwand; aber eben dadurch finden wir Gelegenheit, dem Leser klar zu machen, wie sehr ein geregeltes Verfahren unentbehrlich sei, so wie, dass die Auflösung einer Buchstabengleichung fast immer zu den mühsamen und zeitraubenden Problemen zu zählen sei. Dies ist aber keineswegs ein Übelstand unserer Auflösungsmethode, sondern in der Natur eines solchen Problemes selber begründet, indem durchaus kein unnützer und überflüssiger Schritt dabei gemacht wird. Wer diesen Aufwand an Zeit und Mühe scheut, und statt Schritt für Schritt dem Ziele näher zu kommen mit einem einzigen gewaltigen Streiche all' dies auf Einmal erreichen will, verkennt die Natur eines solchen Problemes ganz und gar, und wird sich stets im Kreise herumdrehend immer wieder zur ursprünglichen Gleichung zurück kommen als demjenigen analytischen Gebilde, welches einzig und allein seinen Wünschen entspricht.

Die Bestimmung der Anfangsglieder, nach der im §. 6 aufgestellten Regel für die absteigende Entwickelungsform ausgeführt, liefert fünf von einander verschiedene solche, nämlich:

$$a^3\ ,\ +\sqrt{-1}.a^{\frac{1}{2}}\ ,\ -\sqrt{-1}.a^{\frac{1}{2}}\ ,\ \tfrac{1}{2}\ ,\ 2a^{-1}.$$

Ein jedes derselben entspricht nur einer einzigen Auflösung und es ist demnach mit der Bestimmung der Anfangsglieder die Trennung aller Wurzeln bewerkstelligt. Die weitere Entwickelung der Folgeglieder hat sonach die einfachste Gestalt und erfordert nur noch die Bildung und Auflösung von Gleichungen des ersten Grades, wie dies in §. 8 auseinandergesetzt wurde.

Wir wollen hier die mit dem Anfangsgliede a^3 beginnende Auflösung weiter entwickeln. Die Regel schreibt vor, den gewonnenen Bestandtheil a^3 anstatt x in das Gleichungspolynom zu substituiren, das höchste Glied des so erhaltenen absteigend geordneten Substitutionsresultates durch das unveränderlich bleibende höchste Glied des aus $\frac{dP}{dx}$ hervorgehenden Substitutionsresultates zu dividiren, und das Zeichen dieses Quotienten in das entgegengesetzte zu verwandeln. Die im vorhergehenden §. 13 gegebenen Vorschriften erfordern aber behufs der möglichsten Vereinfachung der Rechnung, dass diese Substitution auch in allen derivirten

Functionen vollführt werde. Wir haben also zunächst anstatt x das Glied a^3 in den Polynomen P, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, ... $\frac{d^5P}{dx^5}$ zu substituiren.

Diese Substitution führt man am einfachsten aus, wenn man in diese Ausdrücke zuvörderst $x=0$ substituirt, hierauf x um den Zusatz a^3 vergrössert, wobei x in a^3 übergeht, und nun die diesem Werthe $x=a^3$ entsprechenden Substitutionsresultate auf die in §. 13 angegebene Weise ableitet. Die Substitutionsresultate für $x=0$ erhält man unmittelbar aus den Coëfficienten des Gleichungspolynomes, indem man sie mit der Factorielle des Exponenten von x multiplicirt. Es ist nämlich:

$$P_{(0)}{}^{V} = +240.a^5 - 120a^4 - 480a^3 + 480a^2 - 120.a$$
$$P_{(0)}{}^{IV} = -48.a^8 + 168.a^7 + 24.a^6 - 216.a^5 - 192.a^4 - 384.a^3 + 1248a^2 - 744.a + 120$$
$$P_{(0)}{}''' = +6a^8 + 24a^7 - 102.a^6 - 186.a^5 + 192.a^4 + 162.a^3 + 420.a^2 - 708.a + 210$$
$$P_{(0)}{}'' = -4a^9 + 22a^8 - 30a^7 - 28a^6 + 64a^5 + 70a^4 + 148a^3 - 320a^2 - 12a + 100$$
$$P_{(0)}{}' = a^9 + 2a^8 - 27a^7 + 12a^6 + 86a^5 - 53a^4 + 49a^3 - 278a^2 + 275a - 70$$
$$P_{(0)} = -2a^8 + a^7 + 28a^6 - 9a^5 - 80a^4 - 5a^3 - 23a^2 + 206a - 120.$$

Um nun aus diesen Ausdrücken $P_{(0)}{}^{V}$, $P_{(0)}{}^{IV}$, $P_{(0)}{}'''$, $P_{(0)}{}''$, $P_{(0)}{}'$, $P_{(0)}$ die für $x=a^3$ geltenden Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_0{}^{V}$, $\mathfrak{P}_0{}^{IV}$, $\mathfrak{P}_0{}'''$, $\mathfrak{P}_0{}''$, $\mathfrak{P}_0{}'$, $\mathfrak{P}_0$ abzuleiten, hat man jeden derselben zu wiederholten Malen zu multipliciren und zwar der Reihe nach mit $\frac{a^3}{1}$, $\frac{a^3}{2}$, $\frac{a^3}{3}$, $\frac{a^3}{4}$, $\frac{a^3}{5}$. Dabei wird $P_{(0)}{}^{V}$ fünfmal dieser Multiplication unterworfen, $P_{(0)}{}^{IV}$ viermal, $P_{(0)}{}'''$ dreimal, $P_{(0)}{}''$ zweimal, $P_{(0)}{}'$ Einmal. Die dabei gewonnenen Ausdrücke werden dann in entsprechender Ordnung summirt. Die wirkliche Ausführung dieser Rechnung ist im Nachfolgenden ersichtlich:

$$P_{(0)}{}^{V} = 240.a^5 - 120a^4 - 480a^3 + 480a^2 - 120a$$
$$\frac{a^3}{1}P_{(0)}{}^{V} = 240.a^8 - 120a^7 - 480a^6 + 480a^5 - 120a^4$$
$$\frac{a^6}{1.2}P_{(0)}{}^{V} = +120.a^{11} - 60a^{10} - 240a^9 + 240a^8 - 60a^7$$
$$\frac{a^9}{1.2.3}P_{(0)}{}^{V} = +40.a^{14} - 20a^{13} - 80a^{12} + 80a^{11} - 20a^{10}$$
$$\frac{a^{12}}{1.2.3.4}P_{(0)}{}^{V} = +10.a^{17} - 5a^{16} - 20a^{15} + 20a^{14} - 5a^{13}$$
$$\frac{a^{15}}{1.2.3.4.5}P_{(0)}{}^{V} = +2.a^{20} - a^{19} - 4a^{18} + 4a^{17} - a^{16}$$

$$P_{(0)}{}^{IV} = -48a^8 + 168a^7 + 24a^6 - 216a^5 - 192a^4 - 384a^3 + 1248a^2 - 744a + 120$$
$$\frac{a^3}{1}P_{(0)}{}^{IV} = -48a^{11} + 168a^{10} + 24a^9 - 216a^8 - 192a^7 - 384a^6 + 1248a^5 - 744a^4 + 120a^3$$
$$\frac{a^6}{1.2}P_{(0)}{}^{IV} = -24.a^{14} + 84a^{13} + 12a^{12} - 108a^{11} - 96a^{10} - 192a^9 + 624a^8 - 372a^7 + 60a^6$$
$$\frac{a^9}{1.2.3}P_{(0)}{}^{IV} = -8a^{17} + 28a^{16} + 4a^{15} - 36a^{14} - 32a^{13} - 64a^{12} + 208a^{11} - 124a^{10} + 20a^9$$
$$\frac{a^{12}}{1.2.3.4}P_{(0)}{}^{IV} = -2a^{20} + 7a^{19} + a^{18} - 9a^{17} - 8a^{16} - 16a^{15} + 52a^{14} - 31a^{13} + 5a^{12}$$

$$P_{(0)}{}''' = +6a^8 + 24a^7 - 102a^6 - 186a^5 + 192a^4 + 162a^3 + 420a^2 - 708a + 210$$
$$\frac{a^3}{1}P_{(0)}{}''' = +6a^{11} + 24a^{10} - 102a^9 - 186a^8 + 192a^7 + 162a^6 + 420a^5 - 708a^4 + 210a^3$$

$$\frac{a^6}{1.2}P_{(0)}''' = +3a^{14}+12a^{13}-51a^{12}-93a^{11}+96a^{10}+81a^9+210a^8-354a^7+105a^6$$

$$\frac{a^9}{1.2.3}P_{(0)}''' = +a^{17}+4a^{16}-17a^{15}-31a^{14}+32a^{13}+27a^{12}+70a^{11}-118a^{10}+35a^9$$

$$P_{(0)}'' = -4a^9+22a^8-30a^7-28a^6+64a^5+70a^4+148a^3-320a^2-12a+100$$

$$\frac{a^3}{1}P_{(0)}'' = -4a^{12}+22a^{11}-30a^{10}-28a^9+64a^8+70a^7+148a^6-320a^5-12a^4+100a^3$$

$$\frac{a^6}{1.2}P_{(0)}'' = -2a^{15}+11a^{14}-15a^{13}-14a^{12}+32a^{11}+35a^{10}+74a^9-160a^8-6a^7+50a^6$$

$$P_{(0)}' = a^9+2a^8-27a^7+12a^6+86a^5-53a^4+49a^3-278a^2+275a-70$$

$$\frac{a^3}{1}P_{(0)}' = a^{12}+2a^{11}-27a^{10}+12a^9+86a^8-53a^7+49a^6-278a^5+275a^4-70a^3$$

$$P_{(0)} = -2a^8+a^7+28a^6-9a^5-80a^4-5a^3-23a^2+206a-120.$$

Die gesuchten Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_0^{V}$, $\mathfrak{P}_0^{IV}$, $\mathfrak{P}_0'''$, $\mathfrak{P}_0''$, $\mathfrak{P}_0'$, $\mathfrak{P}_0$, welche dem Werthe $x=a^3$ entsprechen, findet man aus diesen Ausdrücken durch Summirung einiger derselben, wie dies die nachfolgenden Formeln angeben:

$$\mathfrak{P}_0^{V} = P_{(0)}^{V}$$

$$\mathfrak{P}_0^{IV} = P_{(0)}^{IV}+\frac{a^3}{1}P_{(0)}^{V}$$

$$\mathfrak{P}_0''' = P_{(0)}'''+\frac{a^3}{1}P_{(0)}^{IV}+\frac{a^6}{1.2}P_{(0)}^{V}$$

$$\mathfrak{P}_0'' = P_{(0)}''+\frac{a^3}{1}P_{(0)}'''+\frac{a^6}{1.2}P_{(0)}^{IV}+\frac{a^9}{1.2.3}P_{(0)}^{V}$$

$$\mathfrak{P}_0' = P_{(0)}'+\frac{a^3}{1}P_{(0)}''+\frac{a^6}{1.2}P_{(0)}'''+\frac{a^9}{1.2.3}P_{(0)}^{IV}+\frac{a^{12}}{1.2.3.4}P_{(0)}^{V}$$

$$\mathfrak{P}_0 = P_{(0)}+\frac{a^3}{1}P_{(0)}'+\frac{a^6}{1.2}P_{(0)}''+\frac{a^9}{1.2.3}P_{(0)}'''+\frac{a^{12}}{1.2.3.4}P_{(0)}^{IV}+\frac{a^{15}}{1.2.3.4.5}P_{(0)}^{V}.$$

Führt man diese Summirungen wirklich aus, so findet man:

$$\mathfrak{P}_0^{V} = +240.a^5-120a^4-480.a^3+480.a^2-120.a$$

$$\mathfrak{P}_0^{IV} = +192a^8+48a^7-456.a^6+264.a^5-312.a^4-384.a^3+1248.a^2-744.a+120$$

$$\mathfrak{P}_0''' = +72a^{11}+108.a^{10}-216a^9+30.a^8-228.a^7-486.a^6+1062.a^5-552.a^4+$$
$$+282a^3+420a^2-708a+210$$

$$(46)\quad \mathfrak{P}_0'' = +16a^{14}+64a^{13}-68a^{12}-22a^{11}-92a^{10}-298a^9+460a^8-210a^7+194a^6+$$
$$+484a^5-638a^4+358a^3-320a^2-12a+100$$

$$\mathfrak{P}_0' = +2a^{17}+23a^{16}-16a^{15}-13a^{14}-25a^{13}-119a^{12}+137a^{11}-58a^{10}+74a^9+$$
$$+276a^8-311a^7+265a^6-234a^5-65a^4+149a^3-278a^2+275a-70$$

$$\mathfrak{P}_0 = +6a^{19}-3a^{18}-4a^{17}-5a^{16}-35a^{15}+32a^{14}-14a^{13}+19a^{12}+104a^{11}-110a^{10}+$$
$$+121a^9-76a^8-58a^7+127a^6-287a^5+195a^4-75a^3-23a^2+206a-120$$

Nun kann man die Bestimmung des Folgegliedes einleiten. Da das Anfangsglied a^3 nur einer einzigen Auflösung angehört, so hat man nur eine Gleichung des ersten Grades aufzulösen, oder mit anderen Worten eine Division vorzunehmen. Man dividirt nämlich das höchste

Glied $+6a^{19}$ von $\mathfrak{P}_0$ durch das höchste Glied $+2a^{17}$ von $\mathfrak{P}_0'$ und nimmt den Quotienten mit entgegengesetztem Zeichen.

$$h_1 a^{\xi_1} = \frac{-6 \,.\, a^{19}}{+2 \,.\, a^{17}} = -3a^2.$$

Die der Entwickelung unterworfene Wurzel ist sonach in ihren beiden ersten Gliedern folgende:

$$x = a^3 - 3a^2 + \ldots\ldots$$

Diesen Werth $a^3 - 3a^2$ hat man nun abermals anstatt x in das Gleichungspolynom P und seine partiell nach x genommenen Differentialquotienten zu substituiren. Die dabei hervorgehenden Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_1^{V}$, $\mathfrak{P}_1^{IV}$, $\mathfrak{P}_1'''$, $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_1$ gewinnt man aber viel leichter aus den schon gebildeten $\mathfrak{P}_0^{V}$, $\mathfrak{P}_0^{IV}$, $\mathfrak{P}_0'''$, $\mathfrak{P}_0''$, $\mathfrak{P}_0'$, $\mathfrak{P}_0$ und zwar auf eine ähnliche Weise, wie diese Letzteren aus $P_{(0)}^{V}$, $P_{(0)}^{IV}$, $P_{(0)}'''$, $P_{(0)}''$, $P_{(0)}'$, $P_{(0)}$ gewonnen wurden. Man unterwirft nämlich die Ausdrücke $\mathfrak{P}_0^{V}$, $\mathfrak{P}_0^{IV}$, $\mathfrak{P}_0'''$, $\mathfrak{P}_0''$, $\mathfrak{P}_0'$, $\mathfrak{P}_0$ einer wiederholten Multiplication mit $-\frac{3a^2}{1}$, $-\frac{3a^2}{2}$, $-\frac{3a^2}{3}$, $-\frac{3a^2}{4}$, $-\frac{3a^2}{5}$ und leitet aus jeder derselben so viele Ausdrücke ab, als die Anzahl der angehängten Accente angibt. Zuletzt summirt man die entsprechenden der so gewonnenen Ausdrücke, dabei von der bekannten Taylor'schen Formel Gebrauch machend, und erhält so mit verhältnissmässig geringer Mühe: $\mathfrak{P}_1^{V}$, $\mathfrak{P}_1^{IV}$, $\mathfrak{P}_1'''$, $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_1$. Wir übergehen hier die wirkliche Ausführung dieser höchst einfachen Rechnung, da sie im Vorhergehenden genügend erläutert worden, und lassen nur die Endresultate folgen. Sie sind:

$$\begin{aligned}
(47)\quad \mathfrak{P}_1^{V} &= +240 \,.\, a^5 - 120 \,.\, a^4 - 480 \,.\, a^3 + 480 \,.\, a^2 - 120 \,.\, a \\
\mathfrak{P}_1^{IV} &= +192 \,.\, a^8 - 672 \,.\, a^7 - 96 \,.\, a^6 + 1704 \,.\, a^5 - 1752 \,.\, a^4 - 24 \,.\, a^3 + 1248 \,.\, a^2 - \\
&\quad - 744 \,.\, a + 120 \\
\mathfrak{P}_1''' &= +72 \,.\, a^{11} - 468 \,.\, a^{10} + 720 \,.\, a^9 + 858 \,.\, a^8 - 3180 \,.\, a^7 + 2610 \,.\, a^6 + 1674 \,.\, a^5 - \\
&\quad - 4296 \,.\, a^4 + 2514 \,.\, a^3 + 60 \,.\, a^2 - 708 \,.\, a + 210 \\
\mathfrak{P}_1'' &= +16 \,.\, a^{14} - 152 \,.\, a^{13} + 472 \,.\, a^{12} - 238 \,.\, a^{11} - 1694 \,.\, a^{10} + 3734 \,.\, a^9 - 1646 \,.\, a^8 - \\
&\quad - 4584 \,.\, a^7 + 7466 \,.\, a^6 - 3710 \,.\, a^5 - 1358 \,.\, a^4 + 2482 \,.\, a^3 - 950 \,.\, a^2 - 12 \,.\, a + 100 \\
\mathfrak{P}_1' &= +2 \,.\, a^{17} - 25 \,.\, a^{16} + 116 \,.\, a^{15} - 187 \,.\, a^{14} - 337 \,.\, a^{13} + 1939 \,.\, a^{12} - 2803 \,.\, a^{11} - \\
&\quad - 601 \,.\, a^{10} + 6806 \,.\, a^9 - 8406 \,.\, a^8 + 2854 \,.\, a^7 + 3529 \,.\, a^6 - 4494 \,.\, a^5 + 1840 \,.\, a^4 + \\
&\quad + 185 \,.\, a^3 - 578 \,.\, a^2 + 275 \,.\, a - 70 \\
\mathfrak{P}_1 &= +8 \,.\, a^{17} - 110 \,.\, a^{16} + 589 \,.\, a^{15} - 1456 \,.\, a^{14} + 1123 \,.\, a^{13} + 2425 \,.\, a^{12} - 6895 \,.\, a^{11} + \\
&\quad + 6631 \,.\, a^{10} - 548 \,.\, a^9 - 5227 \,.\, a^8 + 5441 \,.\, a^7 - 2063 \,.\, a^6 - 788 \,.\, a^5 + 1479 \,.\, a^4 - \\
&\quad - 900 \,.\, a^3 + 187 \,.\, a^2 + 206 \,.\, a - 120.
\end{aligned}$$

Das nächstfolgende Glied findet man durch Division des mit entgegengesetztem Zeichen genommenen höchsten Gliedes von $\mathfrak{P}_1$ durch das unverändert gebliebene höchste Glied von $\mathfrak{P}'_1$.

$$h_2 a^{\xi_2} = \frac{-8 \,.\, a^{17}}{+2 \,.\, a^{17}} = -4$$

und der bisher gefundene Bestandtheil der Wurzel besteht aus folgenden drei Gliedern:

$$x = a^3 - 3a^2 - 4 + \ldots$$

Man hat nun die Substitution dieses Trinoms zu bewerkstelligen und verfährt dabei abermals auf die bereits geübte Weise, indem man die Ausdrücke $\mathfrak{P}_1^{V}$, $\mathfrak{P}_1^{IV}$, $\mathfrak{P}_1'''$, $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{P}_1$ mit den Multiplicatoren $-\frac{4}{1}$, $-\frac{4}{2}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{4}$, $-\frac{4}{5}$ zu wiederholten Malen multiplicirt

und die so gewonnenen Producte in geeigneter Ordnung addirt. Das Resultat dieser Rechnung ist Folgendes:

$$\mathfrak{P}_2^{V} = +240.a^5 - 120.a^4 - 480.a^3 + 480.a^2 - 120.a$$

$$\mathfrak{P}_2^{IV} = +192.a^8 - 672.a^7 - 96.a^6 + 744.a^5 - 1272.a^4 + 1896.a^3 - 672.a^2 - 264.a + 120$$

$$\mathfrak{P}_2''' = +72.a^{11} - 468.a^{10} + 720.a^9 + 90.a^8 - 492.a^7 + 2994.a^6 - 3222.a^5 + 1752.a^4 - \\ - 1230.a^3 - 1092.a^2 + 1308.a - 270$$

$$\mathfrak{P}_2'' = +16.a^{14} - 152.a^{13} + 472.a^{12} - 526.a^{11} + 178.a^{10} + 854.a^9 - 3542.a^8 + 2760.a^7 - \\ - 3742.a^6 + 666.a^5 + 3090.a^4 - 2646.a^3 + 3674.a^2 - 1852.a + 220$$

$$\mathfrak{P}_2' = +2.a^{17} - 25a^{16} + 116.a^{15} - 251a^{14} + 271.a^{13} + 51.a^{12} - 1275.a^{11} + 2431.a^{10} - 2370.a^9 + \\ + 2994.a^8 + 2918.a^7 - 4431.a^6 + 8122.a^5 - 9688.a^4 + 5505a^3 - 4490.a^2 + 1315.a - 70$$

$$\mathfrak{P}_2 = -10.a^{16} + 125.a^{15} - 580.a^{14} + 1255.a^{13} - 1555.a^{12} + 1645.a^{11} + 475.a^{10} - 5580.a^9 + \\ + 8125.a^8 - 15895.a^7 + 14685.a^6 - 14220.a^5 + 11415.a^4 - 4760.a^3 + 3475.a^2 - 350.a$$

Man erhält hier als nächstes Folgeglied:

$$h_3 a^{\xi_3} = \frac{+10.a^{16}}{+2.a^{17}} = +5a^{-1}$$

und hat somit für x den in vier Gliedern entwickelten Ausdruck:

$$x = a^3 - 3a^2 - 4 + 5a^{-1} + \ldots.$$

Der nächste Schritt besteht nun in der Bildung der Substitutionsresultate. Führt man diese Rechnung in der bekannten Weise aus, so gelangt man zur Überzeugung, dass das Substitutionsresultat $\mathfrak{P}_3$ identisch gleich Null wird, und es ist sonach:

$$x = a^3 - 3a^2 - 4 + 5a^{-1}$$

der complete Wurzelwerth. Hier schliesst sich also die Entwickelung von selbst.

Dieser Fall gehört zu den günstigsten von allen, dem man begegnen kann, indem man dadurch aller Untersuchungen über die Convergenz der Reihe und über die Grösse des Ergänzungsgliedes überhoben wird. Aber derselbe ist jedenfalls zu den nicht häufigen Ausnahmen zu zählen. Meistentheils bricht die Entwickelung nicht ab, sondern lässt sich nach Belieben fortsetzen ins Unendliche. Dies gilt auch hier von allen übrigen Auflösungen der hier vorliegenden Gleichung. Wir wollen einige derselben gleichfalls in Betracht ziehen, so weit nämlich, als sie zu neuen Bemerkungen Veranlassung geben.

Nehmen wir zunächst die mit dem Anfangsgliede: $\frac{1}{2}$ versehene Auflösung vor. Wir begegnen hier einer neuen Eigenthümlichkeit in Bezug auf das praktische Rechnen. Da nämlich hier ein Bruch erscheint, so würden auch sämmtliche Coëfficienten oder doch mindestens einige in den Substitutionsresultaten gebrochene Werthe erlangen, was die Rechnung einigermassen erschweren würde. Hier, wo dieser Nenner zufällig den Werth 2 besitzt, lässt sich wohl diesem Übelstande leicht abhelfen, indem man $\frac{1}{2}$ durch den Decimalbruch 0·5 ersetzt und man könnte im Übrigen genau so wie früher verfahren. Wenn aber der Nenner eine andere Zahl wäre, die auch andere einfache Factoren als 2 und 5 in sich schliesst, so würde man wohl den Decimalbruch nicht mehr anwenden können, da derselbe ein unendlicher wäre. Man wird dann vielmehr alle Coëfficienten der Substitutionsresultate lieber in Bruchform belassen, aber auf einerlei Nenner bringen, der dann dem ganzen Substitutionsresultate vorgesetzt werden kann.

Innerhalb der Klammern erscheinen dann nur ganze Zahlen. Man kann sich diesen Vorgang noch in einer anderen Weise versinnlicht denken. Anstatt nämlich $x = \frac{1}{2}$ zu substituiren, verändert man die Unbekannte x in eine neue y vermittelst der Substitution $x = \frac{y}{2}$ und hat nun nur noch $y = 1$ zu setzen. Diese Veränderung der Unbekannten x lässt sich, wie bekannt, fast ohne alle Rechnung an dem Gleichungspolynome vornehmen. Ist nämlich:

$$A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + A_{m-2} x^{m-2} + \ldots + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$$

die gegebene Gleichung, und will man $x = \frac{y}{N}$ setzen, so erhält man:

$$A_m y^m + N . A_{m-1} . y^{m-1} + N^2 . A_{m-2} y^{m-2} + \ldots + N^{m-2} A_2 y^2 + N^{m-1} A_1 y + N^m A_0 = 0$$

und hier ist zugleich die Regel ersichtlich, wie diese Transformation der Gleichung am einfachsten bewerkstelligt werden kann. Man multiplicirt nämlich die Coëfficienten derselben beziehungsweise mit

$$1, \quad N, \quad N^2, \quad N^3, \ldots N^{m-2}, \quad N^{m-1}, \quad N^m.$$

Diesen Weg wird man also in allen jenen Fällen einschlagen, wo gebrochene Coëfficienten h in der Entwickelung vorkommen. Im gegenwärtigen Falle nimmt die Rechnung folgende Gestalt an:

$$P_{(0)}^{V} = +240 . a^5 - 120 . a^4 - 480 . a^3 + 480 . a^2 - 120 . a$$
$$2 . P_{(0)}^{IV} = -96 . a^8 + 336 . a^7 + 48 . a^6 - 432 . a^5 - 384 . a^4 - 768 . a^3 + 2496 . a^2 - 1488 . a + 240$$
$$2^2 . P_{(0)}''' = +24 . a^8 + 96 . a^7 - 408 . a^6 - 744 . a^5 + 768 . a^4 + 648 . a^3 + 1680 . a^2 - 2832 . a + 840$$
$$2^3 . P_{(0)}'' = -32 . a^9 + 176 . a^8 - 240 . a^7 - 224 . a^6 + 512 . a^5 + 560 . a^4 + 1184 . a^3 - 2560 . a^2 - 96 . a + 800$$
$$2^4 . P_{(0)}' = +16 . a^9 + 32 . a^8 - 432 . a^7 + 192 . a^6 + 1376 . a^5 - 848 . a^4 + 784 . a^3 - 4448 . a^2 + 4400 . a - 1120$$
$$2^5 . P_{(0)} = -64 . a^8 + 32 . a^7 + 896 . a^6 - 288 . a^5 - 2560 . a^4 - 160 . a^3 - 736 . a^2 + 6592 . a - 3840$$

$$\mathfrak{P}_0^{V} = +240 . a^5 - 120 . a^4 - 480 . a^3 + 480 . a^2 - 120 . a$$
$$2 . \mathfrak{P}_0^{IV} = -96 . a^5 + 336 . a^7 + 48 . a^6 - 192 . a^5 - 504 . a^4 - 1248 . a^3 + 2976 . a^2 - 1608 . a + 240$$
$$2^2 . \mathfrak{P}_0''' = -72 . a^8 + 432 . a^7 - 360 . a^6 - 1056 . a^5 + 324 . a^4 - 360 . a^3 + 4416 . a^2 - 4380 . a + 1080$$
$$2^3 . \mathfrak{P}_0'' = -32 . a^9 + 152 . a^8 + 24 . a^7 - 608 . a^6 - 408 . a^5 + 1116 . a^4 + 1368 . a^3 + 448 . a^2 - 3692 . a + 1760$$
$$2^4 . \mathfrak{P}_0' = -16 . a^9 + 204 . a^8 - 568 . a^7 - 228 . a^6 + 1454 . a^5 + 27 . a^4 + 2144 . a^3 - 5732 . a^2 + 2635 . a + 140$$
$$2^5 . \mathfrak{P}_0 = +56 . a^8 - 490 . a^7 + 910 . a^6 + 1204 . a^5 - 3017 . a^4 + 1288 . a^3 - 6076 . a^2 + 10409 . a - 4410.$$

Das nächste Folgeglied ist:

$$h_1 a^{\xi_1} = \frac{-56 . a^8}{-2 . 16 . a^9} = +\frac{7}{4} a^{-1}$$

und der bisher entwickelte Werth von x:

$$x = \frac{1}{2} + \frac{7}{4} a^{-1} + \ldots \quad \text{oder} \quad x = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{7}{2} a^{-1} + \ldots\right].$$

Bei den nun zu bildenden Substitutionsresultaten $\mathfrak{P}_1^{V}$, $\mathfrak{P}_1^{IV}$, $\mathfrak{P}_1'''$, $\mathfrak{P}_1''$, $\mathfrak{P}_1'$, $\mathfrak{P}_1$ wird man daher abermals $\frac{1}{2}$ in verschiedenen Potenzen neuerdings als Factor zu sondern haben, weil

der Coëfficient h_1 abermals einen neuen Nenner 2 besitzt. Demgemäss erhalten diese Substitutionsresultate 1, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4^2}$, $\frac{1}{4^3}$, $\frac{1}{4^4}$, $\frac{1}{4^5}$ als Factor gesondert. Der Gang der Rechnung bedarf weiter keiner Erläuterung. Das nächste Folgeglied ist:

$$h_2\, a^{\xi_2} = +\,\frac{7}{8}\, a^{-2}$$

und macht abermals eine Sonderung eines neuen Factors $\frac{1}{2}$ nothwendig, so dass $\mathfrak{P}_2^{\mathrm{V}}$, $\mathfrak{P}_2^{\mathrm{IV}}$, $\mathfrak{P}_2'''$ $\mathfrak{P}_2''$, $\mathfrak{P}_2'$, $\mathfrak{P}_2$ ausserhalb der Klammern beziehungsweise mit 1, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8^2}$, $\frac{1}{8^3}$, $\frac{1}{8^4}$, $\frac{1}{8^5}$ multiplicirt erscheinen. In solcher Weise schreitet die Entwickelung vorwärts, und liefert stets ein neues Glied von x, welches in einer unendlichen Reihe erscheint, und zwar in nachfolgender Gestalt:

$$x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{4}\cdot a^{-1} + \tfrac{7}{8}\cdot a^{-2} + \tfrac{7}{16}\, a^{-3} + \ldots.$$

Nun wollen wir noch zuletzt eine der beiden Auflösungen in Betrachtung ziehen, welchen die Anfangsglieder $+\sqrt{-1}\,.\,a^{\frac{1}{2}}$, $-\sqrt{-1}\,.\,a^{\frac{1}{2}}$ entsprechen, weil sie eine bisher nicht berührte Eigenthümlichkeit vorführen. Die in denselben erscheinende Wurzelgrösse $\sqrt{-1}$ kommt in beiden vor, und der einzige Unterschied dieser beiden Anfangsglieder liegt nur im Zeichen $+$, $-$ welcher dieser doppeldeutigen Grösse $\sqrt{-1}$ ertheilt wurde. Dieser Eigenthümlichkeit begegnet man bei der Auflösung von Buchstabengleichungen sehr häufig und ist dadurch in den Stand gesetzt, zwei oder mehrere Auflösungen auf einmal zu entwickeln. Führt man nämlich die Rechnungen für eines dieser Anfangsglieder, z. B. für $+\sqrt{-1}\,.\,a^{\frac{1}{2}}$ durch, so braucht man in dem erhaltenen Ausdrucke:

$$x = +\sqrt{-1}\,.\,a^{\frac{1}{2}} - \sqrt{-1}\,.\,a^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,.\,a^{-\frac{3}{2}} + \ldots.$$

nur $\sqrt{-1}$ in der zweiten Bedeutung $-\sqrt{-1}$ zu nehmen, um auch allsogleich die andere Auflösung:

$$x = -\sqrt{-1}\,.\,a^{\frac{1}{2}} + \sqrt{-1}\,.\,a^{-\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\,.\,a^{-\frac{3}{2}} - \ldots.$$

zu erhalten, ohne die Rechnung neuerdings durchführen zu müssen. Dieser Erscheinung begegnet man öfters, namentlich dann, wenn die Bestimmungsgleichung in h_0 eine binomische Gleichung höheren Grades ist, aber auch in anderen Fällen, wo die höhere Bestimmungsgleichung in h_0 zwar nicht binomisch ist, aber durch Wurzelausziehungen in geschlossener Form aufgelöst werden kann. In all' diesen Fällen kann man sich mit der Entwickelung eines einzigen dieser Werthe von x begnügen, da in ihm auch alle übrigen enthalten sind. Zuletzt wären noch jene Fälle zu erwähnen, in welchen die Bestimmungsgleichung in h_0 vom höheren Grade ist, und nicht in geschlossener Form aufgelöst werden kann. Dieser Fall ereignet sich aber doch nur verhältnissmässig sehr selten, aber wenn man demselben wirklich begegnet, so kann man eben nur angenäherte Werthe für h_0, h_1, h_2, ... finden. Im Übrigen bleibt der Gang der Rechnung unverändert.

Zweites Beispiel.

Um auch den zweiten Fall durch ein Beispiel zu erläutern, in welchem die vollständige Trennung der Wurzeln vermittelst der Bestimmung der Anfangsglieder nicht erfolgt, wählen wir die Gleichung:

$$x^5+(-10.a+1)x^4+(+40.a^2-8.a)x^3+(-80.a^3+23.a^2+1)x^2+(80.a^4-28.a^3-a^2-4a+1)x+$$
$$+(-32.a^5+12.a^4+2.a^3+4.a^2-2.a)=0.$$

Die Bestimmung der Anfangsglieder für die absteigende Entwickelungsform liefert den einzigen Werth

$$\xi_0 = 1$$

mit der Bestimmungsgleichung:

$$h_0^5-10h_0^4+40h_0^3-80h_0^2+80h_0-32=0$$

welche einen einzigen Werth:

$$h_0 = 2$$

aber als fünffache Wurzel liefert. Das Anfangsglied ist somit ein einziges: $+2a$ und ist allen fünf Wurzeln x gemeinschaftlich. Man hat hier zur Bestimmung der Folgeglieder nach der allgemeinen Regel von §. 12 vorzugehen, d. h. man muss $x=2a$ in das Gleichungspolynom P und seine fünf nach x genommenen Differentialquotienten $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, $\frac{d^3P}{dx^3}$, $\frac{d^4P}{dx^4}$, $\frac{d^5P}{dx^5}$ substituiren, aus den dabei gewonnenen Substitutionsresultaten $\mathfrak{P}_0^{V}$, $\mathfrak{P}_0^{IV}$, $\mathfrak{P}_0'''$, $\mathfrak{P}_0''$, $\mathfrak{P}_0'$, $\mathfrak{P}_0$ die Gleichung des fünften Grades in x' bilden:

$$\frac{1}{5.}\mathfrak{P}_0^{V}.x'^5+\frac{1}{4.}\mathfrak{P}_0^{IV}x'^4+\frac{1}{3.}\mathfrak{P}_0'''x'^3+\frac{1}{2.}\mathfrak{P}_0''x'^2+\frac{1}{1.}\mathfrak{P}_0'x'+\mathfrak{P}_0=0$$

und die Anfangsglieder von x' nach der bekannten Regel bestimmen. Man gelangt zu den Substitutionsresultaten auf die bekannte Weise und findet namentlich:

$$\mathfrak{P}_0^{V}=+120\,,\quad \mathfrak{P}_0^{IV}=+24\,,\quad \mathfrak{P}_0'''=0\,,\quad \mathfrak{P}_0''=-2a^2+2\,,\quad \mathfrak{P}_0'=-a^2+1\,,\quad \mathfrak{P}_0=0.$$

Da hier $\mathfrak{P}_0$ verschwindet, so folgt hieraus, dass $x=2a$ der complete Werth einer Wurzel sei, allein nur einer einzigen, weil $\mathfrak{P}'_0$ von Null verschieden ist. Die übrigen vier Wurzeln müssen erst weiter entwickelt werden. Zur Bestimmung der nächsten Folgeglieder dient die Gleichung:

$$x'^5+x'^4-a^2x'^2-a^2x'=0.$$

Sie liefert vier von einander und von Null verschiedene Anfangsglieder:

$$+a^{\frac{2}{3}}\,,\quad \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{-3}\right)a^{\frac{2}{3}}\,,\quad \frac{1}{2}\left(-1-\sqrt{-3}\right)a^{\frac{2}{3}}\,,\quad -1$$

und somit ist die vollständige Trennung aller Wurzeln erfolgt. Die weitere Entwickelung erfordert nur die Auflösung von Gleichungen des ersten Grades und wird in bekannter Weise weitergeführt.

§. 15.

Die absteigende Entwickelung von x wurde bisher in ihrer einfachsten Gestalt gezeigt, und immer ein Glied nach dem anderen, jedes durch ein eigenes und regelmässig wiederkehrendes Verfahren aufgefunden. Dieses regelmässige Wiederholen der Substitution nach einem jeden einzelnen Folgegliede ist aber nur beim Beginne der Entwickelung unumgänglich nothwendig; hat man eine grössere Anzahl von Gliedern bereits entwickelt, so kann man aus einem einzigen Substitutionsresultate nicht blos das nächstfolgende Glied, sondern eine grössere Anzahl derselben auf einmal finden. Die Anzahl der durch einen einzigen Schritt zu gewinnenden Glieder

nimmt in einem raschen Verhältnisse zu, wenn schon genügend viele Entwickelungsglieder bekannt sind. Das Verfahren, welches statt eines einzigen Folgegliedes deren mehrere auf Einmal liefert, ist nicht sehr different von dem früheren. Bekanntlich hat man zur Bestimmung des Folgegliedes $h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$ im gewöhnlichen Falle, wo die Trennung der Wurzel bewerkstelligt ist, die gewonnene Gliedersumme x_r anstatt x in das Gleichungspolynom P zu substituiren und das höchste Glied des dabei erhaltenen Substitutionsresultates $\mathfrak{P}_r$ durch das höchste Glied des aus $\frac{dP}{dx}$ hervorgehenden Substitutionsresultates $\mathfrak{P}'_r$ zu dividiren, und das Zeichen des erhaltenen Quotienten in das entgegengesetzte zu verwandeln. Es beruht demnach die Bestimmung des Folgegliedes $h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$ eigentlich in der Entwickelung des ersten Gliedes des Quotienten: $\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$. Hat man schon eine genügende Anzahl von Gliedern entwickelt, mit andern Worten, ist r hinlänglich gross, so kann man die Entwickelung dieses Quotienten über das erste Glied fortsetzen und nach Umständen eine mehr oder minder grosse Anzahl von Gliedern aus diesem einzigen Substitutionsresultate gewinnen, die alle der Wurzel x zukommen. Auf solche Weise ist man im Stande, zur bekannten Gliedersumme x_r eine andere x' hinzuzufügen, die aus s Gliedern besteht, und erhält so durch eine einzige Substitution und genügend weit fortgesetzte Division die Wurzel x in $r+s$ Gliedern, wozu sonst s aufeinanderfolgende Substitutionen erforderlich gewesen wären. Die Anzahl s der durch einen einzigen solchen Schritt zu gewinnenden Glieder steht mit der Anzahl r der früher bekannten im Zusammenhange und wächst mit r in einem raschen Verhältnisse. Es ist dies ein ähnliches Verhalten, wie bei dem Approximationsverfahren für numerische Gleichungen: Ist man mit dem Grenzwerthe der Wurzel hinlänglich nahe gerückt, so kann man durch eine einzige Division nicht blos eine einzige, sondern eine mehr oder minder bedeutende Anzahl von verlässlichen Stellen gewinnen. Die dabei stattfindende Gesetzmässigkeit wurde zuerst von Fourier gründlich untersucht. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind im zweiten Buche seines unvollständig erschienenen Werkes: „Analyse des équations déterminées“ niedergelegt. Die darauf abzielenden Regeln sind dort zunächst nur für numerische Gleichungen entwickelt, allein sie besitzen eine allgemeine Geltung, auch für Buchstabengleichungen. Wir wollen nun das Stattfinden der aufgestellten Behauptungen erweisen.

Wir bezeichnen im Folgenden mit $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{P}'_r$, $\mathfrak{P}''_r$ ... die Substitutionsresultate, welche für $x = x_r$ aus den Polynomen P, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, ... hervorgehen und mit $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$, $\mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r}$, $\mathfrak{H}''_r a^{\mathfrak{A}''_r}$, ... ihre höchsten von Null verschiedenen Glieder. Fügt man nun zur Gliedersumme x_r ein nächstes Entwickelungsglied $h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}$ oder eine Summe von mehreren solchen:

$$x' = h_{r+1}a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2}a^{\xi_{r+2}} + \ldots + h_{r+s}a^{\xi_{r+s}}$$

hinzu, so erhält man x_{r+1} und x_{r+s} und die diesen Gliedersummen entsprechenden Substitutionsresultate und höchsten Glieder derselben tragen als Unterscheidungszeichen den Index $r+1$ und $r+s$ statt r.

In der Regel kann man annehmen, dass die Wurzeln x der Gleichung $P=0$ verschieden sind, sowohl von jenen der $\frac{dP}{dx}=0$, als auch der $\frac{d^2P}{dx^2}=0$. Findet diese Annahme wirklich Statt, so wird eine Wurzel x der Gleichung $P=0$ entweder schon im Anfangsgliede der absteigenden Entwickelungsform von jener der $\frac{dP}{dx}=0$ und der $\frac{d^2P}{dx^2}=0$ verschieden ausfallen, oder wenigstens in einem späteren Entwickelungsgliede. Es geht daher aus dieser Annahme hervor, dass bei fortgesetzter Entwickelung von x, also beim Wachsen der Gliederzahl $r+1$, die

Reduction auf Null, welche im Substitutionsresultate $\mathfrak{P}$ anfangs nur die höchsten Glieder, später aber der Reihe nach die nächst niedrigeren befällt und in der angegebenen Richtung unaufhaltsam fortschreitet, je mehr Entwickelungsglieder zusammengefasst werden, bei den beiden anderen Substitutionsresultaten $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ nicht ins Unbegrenzte fortschreiten könne. Eine Reduction der höchsten Glieder auf Null kann in $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ nur dann erfolgen, wenn das Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ zufälligerweise auch einer Wurzel der $\frac{dP}{dx}=0$ oder $\frac{d^2P}{dx^2}=0$ zukommt. Wenn daher gleichwohl dieser seltene Fall stattfinden sollte, so wird dennoch bei fortgesetzter Entwickelung von x, sobald man zum unterscheidenden Entwickelungsgliede anlangt, dieses Verschwinden der höchsten Glieder in $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ ihr Ende erreichen. Ein unbegrenztes Fortschreiten dieser Reductionen auf Null in den höchsten Gliedern von $\mathfrak{P}'$ oder $\mathfrak{P}''$ würde aber darauf hinweisen, dass die der Entwickelung unterworfene Wurzel x nicht nur der $P=0$ sondern auch der $P'=0$ oder der $P''=0$ Genüge leistet. Ein solcher seltener Fall würde aber stets zu einer bedeutenden Vereinfachung führen, denn man kann durch Sonderung des gemeinschaftlichen Factors, der in zweien dieser drei Polynome erscheint, und durch Nullsetzen desselben die in Entwickelung begriffene Wurzel aus einer viel einfacher gebauten Gleichung gewinnen, bei der dieser Ausnahmsfall nicht mehr stattfindet. Hat aber bei irgend einem Entwickelungsgliede die Reduction auf Null in den höchsten Gliedern von $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ ihr Ende erreicht, so wird bei dem Hinzufügen neuer Entwickelungsglieder in den Anfangsgliedern $\mathfrak{H}' a^{\mathfrak{A}'}$ und $\mathfrak{H}'' a^{\mathfrak{A}''}$ keine Änderung mehr vor sich gehen, weil die neu hinzugefügten Glieder sämmtlich von niederer Ordnung sind. Wenn also die in Entwickelung stehende Wurzel x weder der $\frac{dP}{dx}=0$ noch der $\frac{d^2P}{dx^2}=0$ Genüge leistet, so nimmt zwar $\mathfrak{A}_r$ mit dem Wachsen von r in's Unbegrenzte ab, aber $\mathfrak{A}_r'$ und $\mathfrak{A}_r''$ erreichen früher oder später einen constanten Werth. Wir wollen dieselben beziehungsweise mit $\mathfrak{A}_p'$ und $\mathfrak{A}_q''$ andeuten, womit zugleich gesagt sein soll, dass mit dem Entwickelungsgliede $h_p a^{\xi_p}$ die Reduction in $\mathfrak{P}_p'$ und mit dem anderen $h_q a^{\xi_q}$ jene in $\mathfrak{P}_q''$ ihr Ende erreicht hat. Alle jene $\mathfrak{A}_r'$ und $\mathfrak{A}_r''$, deren Index r sowohl p als q übersteigt, besitzen die Werthe $\mathfrak{A}_p'$ und $\mathfrak{A}_q''$.

Ist man zu einem constanten Werthe von $\mathfrak{A}_r'$ gelangt, so dient dies bekanntermassen als Kennzeichen, dass die vollständige Isolirung der in Entwickelung stehenden Wurzel x von allen anderen, welche noch ausser dem der Gleichung $P=0$ zukommen, erfolgt sei, und man erhält die übrigen Folgeglieder durch wiederholte Divisionen. Ist nämlich $r \overline{\gtrless} p$, so findet man das auf x_r folgende Glied $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ durch Entwickelung des höchsten Gliedes vom Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$. Wir wollen nun aber voraussetzen, r sei noch überdies grösser oder mindestens gleich q. Ist man in der Entwickelung so weit gelangt, so braucht man sich nicht mehr mit einem einzigen weiteren Entwickelungsgliede zu begnügen, sondern kann die Division von $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$ auf mehrere Glieder fortsetzen; sie sind alle brauchbare Entwickelungsglieder.

Um die Wahrheit des Gesagten darzuthun, werden wir zeigen, dass dann die einzelnen Anfangsglieder des entwickelten Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$ der Reihe nach identisch sind mit den ersten Gliedern der Quotienten:

$$-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}, -\frac{\mathfrak{P}_{r+1}}{\mathfrak{P}'_{r+1}}, -\frac{\mathfrak{P}_{r+2}}{\mathfrak{P}'_{r+2}}, \ldots\ldots -\frac{\mathfrak{P}_{r+s-1}}{\mathfrak{P}'_{r+s-1}},$$

so zwar, dass es dem Erfolge nach einerlei ist, ob man die Summe von Folgegliedern:

$$x' = h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} + \ldots + h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}$$

auf einmal durch hinlänglich weit fortgesetzte Division von $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$ oder einzelnweise auf die bekannte Art ableitet. Wir werden daher $\mathfrak{P}_{r+s}$ und $\mathfrak{P}'_{r+s}$ für einen allgemeinen Werth von s construiren und das erste Glied des Quotienten $\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$ mit dem $(s+1)$sten Entwickelungsgliede von $\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$ zusammenhalten und untersuchen, für welche Werthe von s eine vollkommene Identität derselben besteht und für welche nicht.

Unserer Bezeichnungsweise gemäss bedeutet x_r die bekannte Gliedersumme, x' die Summe der nächstfolgenden s Glieder von x, und $\mathfrak{P}_{r+s}$, $\mathfrak{P}'_{r+s}$, $\mathfrak{P}''_{r+s}$, ... die für $x_{r+s} = x_r + x'$ aus den Polynomen P, $\frac{dP}{dx}$, $\frac{d^2P}{dx^2}$, ... hervorgehenden Substitutionsresultate. Sie sind, aufsteigend nach Potenzen von x' geordnet, folgende Ausdrücke:

$$\mathfrak{P}_{r+s} = \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}_r' x' + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_r'' x'^2 + \frac{1}{2.3}\mathfrak{P}_r''' x'^3 + \frac{1}{2.3.4}\mathfrak{P}_r^{\mathrm{IV}} x'^4 + \ldots\ldots$$

$$\mathfrak{P}'_{r+s} = \quad \mathfrak{P}_r' + \mathfrak{P}_r'' x' + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_r''' x'^2 + \frac{1}{2.3}\mathfrak{P}_r^{\mathrm{IV}} x'^3 + \ldots\ldots$$

$$\mathfrak{P}''_{r+s} = \quad \mathfrak{P}_r'' + \mathfrak{P}_r''' x' + \frac{1}{2}\mathfrak{P}_r^{\mathrm{IV}} x'^2 + \ldots\ldots$$

Da vorausgesetztermassen die höchsten von Null verschiedenen Glieder der Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_r$, $\mathfrak{P}_r'$, $\mathfrak{P}_r''$, $\mathfrak{P}_r'''$ ..... die Exponenten $\mathfrak{A}_r$, $\mathfrak{A}'_p$, $\mathfrak{A}''_q$, $\mathfrak{A}'''_r$, ... tragen, während x' vom Grade $\xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}'_p$ ist; so sind die einzelnen Bestandtheile der Summen in den zweiten Theilen dieser Gleichungen Ausdrücke vom Grade:

$$\begin{array}{lllll} \mathfrak{A}_r . \mathfrak{A}_p' + \xi_{r+1}, & \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1}, & \mathfrak{A}_r''' + 3\xi_{r+1}, & \mathfrak{A}_r^{\mathrm{IV}} + 4\xi_{r+1} \ldots\ldots \\ \mathfrak{A}_p' \quad , & \mathfrak{A}_q'' + \xi_{r+1}, & \mathfrak{A}_r''' + 2\xi_{r+1}, & \mathfrak{A}_r^{\mathrm{IV}} + 3\xi_{r+1} \ldots\ldots \\ \mathfrak{A}_q'' \quad , & & \mathfrak{A}_r''' + \xi_{r+1}, & \mathfrak{A}_r^{\mathrm{IV}} + 2\xi_{r+1}, \ldots\ldots \end{array}$$

und weil $\mathfrak{A}'_p$ und $\mathfrak{A}''_q$ für alle über p und q liegenden Werthe von r die Exponenten $\mathfrak{A}'_r$ und $\mathfrak{A}''_r$ vorstellen sollen, so muss offenbar in der zweiten horizontalen Reihe dieser Gradzahlen $\mathfrak{A}'_p$, in der dritten aber $\mathfrak{A}''_q$ den grössten Werth besitzen. Da nun die Gradzahlen der ersten Reihe sich nur durch das Hinzutreten von ξ_{r+1} und $2\xi_{r+1}$ von den darunter stehenden der zweiten und dritten Reihe unterscheiden, wodurch das gegenseitige Grössenverhältniss offenbar nicht geändert wird und ferner

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}'_p + \xi_{r+1}$$

ist; so sind in der ersten Reihe die beiden ersten Gradzahlen gleich und grösser als alle nachfolgenden; nach ihnen ist die dritte $\mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1}$ die nächst niedrigere; alle übrigen aber besitzen noch viel kleinere Werthe. Es besteht also die Relation:

(48) $$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}'_p + \xi_{r+1} > \mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1} > \mathfrak{A}'''_r + 3\xi_{r+1}$$ und die übrigen.

Nach dieser Relation wird also das höchste Glied von $\mathfrak{P}_{r+s}$ nothwendig aus den beiden Bestandtheilen $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}_r' x'$ hervorgehen, während die Summe aller übrigen, nämlich:

(49) $$\frac{1}{2}\mathfrak{P}_r'' x'^2 + \frac{1}{2.3}\mathfrak{P}_r''' x'^3 + \frac{1}{2.3.4}\mathfrak{P}_r^{\mathrm{IV}} x'^4 + \ldots\ldots$$

Nichts dazu beizutragen vermag. Allein zufolge der Wahl von x' erfolgt in einer gewissen Anzahl von Anfangsgliedern eine Reduction auf Null, so zwar, dass $\mathfrak{A}_{r+s}$ einen unter $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}'_p + \xi_{r+1}$ liegenden Werth erlangen wird. Es kann daher im Allgemeinen nicht behauptet

werden, dass auch $\mathfrak{A}_{r+s} > \mathfrak{A}''_q + 2\,\xi_{r+1}$ ausfallen werde, sondern der Werth dieses Exponenten kann auch gelegentlich mit $\mathfrak{A}''_q + 2\,\xi_{r+1}$ zusammenfallen oder darunter liegen. Man wird hier zwei Fälle zu unterscheiden haben: jenen, wo der Exponent des höchsten von Null verschiedenen Gliedes

$$\mathfrak{A}_{r+s} > \mathfrak{A}''_q + 2\,\xi_{r+1} \tag{50}$$

ist, und den anderen, wo die entgegengesetzte Relation:

$$\mathfrak{A}_{r+s} \leqq \mathfrak{A}''_q + 2\,\xi_{r+1} \tag{51}$$

stattfindet. Gilt das Erstere, so ist auch unmittelbar ersichtlich, dass das höchste Glied von $\mathfrak{P}_{r+s}$, nämlich $\mathfrak{H}_{r+s}\,a^{\mathfrak{A}_{r+s}}$ nur aus den zwei Bestandtheilen $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$ hervorgehen könne und dass alle übrigen Bestandtheile (49) nichts dazu beizutragen vermögen. Findet aber die entgegengesetzte Relation Statt, so wird $\mathfrak{H}_{r+s}\,a^{\mathfrak{A}_{r+s}}$ seine constituirenden Elemente auch aus $\frac{1}{2}\,\mathfrak{P}''_r x'^2$ und vielleicht auch aus den übrigen nachfolgenden Bestandtheilen ziehen. Die Unterscheidung dieser beiden Fälle ist von Wichtigkeit, weil es davon abhängen wird, ob das $(s+1)$ste Entwickelungsglied von $\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$ noch mit dem Anfangsgliede $\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$ übereinstimmt oder nicht. So lange nämlich die Relation (50) erfüllt ist, wird es bei der Bestimmung des Anfangsgliedes von $\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$ einerlei sein, ob man das erste von Null verschiedene Glied von $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$ oder von $\mathfrak{P}_{r+s}$ der Division durch das erste Glied von $\mathfrak{P}'_{r+s}$ oder, was dasselbe ist, durch $\mathfrak{H}'_p\,a^{\mathfrak{A}'_p}$ unterwirft, während beim Stattfinden der entgegengesetzten Relation (51) dies nicht mehr im Allgemeinen behauptet werden darf, weil auch Glieder von $\frac{1}{2}\,\mathfrak{P}''_r\,x'^2$ in die Rechnung eingehen. Bedenkt man noch überdies, dass $-(\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r\,x')$ nach gehöriger Reduction der sich tilgenden Glieder eigentlich der s^{te} Partialrest ist, der sich bei der Division $(-\mathfrak{P}_r):\mathfrak{P}'_r$ ergibt, und aus dem das nächstfolgende $s+1$ste Glied gezogen wird, so sieht man allsogleich, dass so lange die Relation (50) besteht, die vollkommene Übereinstimmung zwischen den einzelnen Entwickelungsgliedern von $\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$ und den Anfangsgliedern der Quotienten:

$$\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}\ \frac{\mathfrak{P}_{r+1}}{\mathfrak{P}'_{r+1}}, \frac{\mathfrak{P}_{r+2}}{\mathfrak{P}'_{r+2}}, \frac{\mathfrak{P}_{r+3}}{\mathfrak{P}'_{r+3}}, \ldots\ldots, \frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}'_{r+s}}$$

stattfindet, während bei dem Auftreten der entgegengesetzten Relation (51) eine Verschiedenheit in den auf diesen zwei Wegen entnommenen Entwickelungsgliedern auftaucht. Die beiden Relationen (50) und (51) werden daher die Grenze angeben, bis zu der die Division von $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}$ fortgesetzt werden darf.

Wir wollen denselben eine andere für die praktische Anwendung geeignetere Form ertheilen, indem wir beiderseits die Grösse $\mathfrak{A}'_p$ abziehen. Sie verwandeln sich dadurch, wenn man noch überdies dem letzten verlässlichen Gliede den Index $r+s$, dem darauffolgenden unverlässlichen aber den Index $r+s+1$ ertheilt, in:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}_{r+s-1} - \mathfrak{A}'_p &> \mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1}\\ \mathfrak{A}_{r+s} - \mathfrak{A}'_p &< \mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1}\end{aligned}$$

oder, da die Differenzen $\mathfrak{A}_{r+s} - \mathfrak{A}'_p$ und $\mathfrak{A}_{r+s+1} - \mathfrak{A}'_p$ eben die Exponenten ξ_{r+s-1} und ξ_{r+1} angeben in:

$$\xi_{r+s} > \mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1} \tag{52}$$

$$\xi_{r+s+1} \leqq \mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1} \tag{53}$$

Es ergibt sich daraus folgende einfache Regel: Ist man bei der absteigenden Entwickelung einer Wurzel x zu einer Gliedersumme x_r gelangt, für welche sowohl im Substitutionsresultate $\mathfrak{P}'$, als auch im $\mathfrak{P}''$ eine Reduction der höchsten Glieder auf Null nicht mehr erfolgt, und die Gradzahlen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ daher constante Werthe $\mathfrak{A}'_p$ und $\mathfrak{A}'_q$ erlangt haben; so kann man mehrere Entwickelungsglieder von x auf Einmal erhalten, indem man die Division von $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{r'}}$ auf mehrere Glieder fortsetzt. Zur genauen Angabe der Grenze, wie weit diese Division fortgesetzt werden darf, dient der Zahlwerth von:

$$\mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1} = 2\,\mathfrak{A}_r - 3\,\mathfrak{A}'_p + \mathfrak{A}''_q$$

und alle Entwickelungsglieder des Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{r'}}$, deren Exponenten ξ über diesem Grenzwerthe liegen, sind verlässlich. Man hat daher die Entwickelung des Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{r'}}$ fortzusetzen ausschliesslich bis zu jenem Gliede, dessen ξ unter $2\mathfrak{A}_r - 3\mathfrak{A}'_p + \mathfrak{A}''_q$ fällt.

Wir wollen nun noch versuchen, ein klares Bild davon zu entwerfen, in welchem raschen Verhältnisse die Anzahl s der verlässlichen Glieder mit dem Wachsen von r zunimmt. Aus den Relationen (48) lässt sich unmittelbar die folgende andere ableiten:

$$\mathfrak{A}'_p - \mathfrak{A}''_q > \xi_{r+1}$$

und aus dieser folgt:

$$\mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1} < \xi_{r+1}.$$

Da die Relationen (48) für jedes r gelten, das der grösseren der beiden Zahlen p und q gleichkommt oder dieselbe übersteigt, so wird auch diese Relation für solche r gelten. Man sieht hieraus unmittelbar, wie schon von früher her bekannt ist, dass man immer mindestens Ein Glied entwickeln dürfe. Ist man aber in der Entwickelung weiter fortgerückt, so wird nicht nur ξ_{r+1}, sondern auch eine Reihe darauffolgender Exponenten ξ_{r+2}, ξ_{r+3}, $\ldots$ ξ_{r+s} grösser ausfallen, als $\mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1}$. Wir wollen es an einem Beispiele zeigen: Gesetzt $\xi_{r+1} = 0$ und $\mathfrak{A}'_p - \mathfrak{A}''_q = 1$, so folgt: $\mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1} = -1$. Man darf also die Entwickelung von $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{r'}}$ fortsetzen bis exclusive zu einem Gliede mit dem Exponenten -1 oder einem kleineren. Wären die ξ sämmtlich ganze Zahlen, so könnte man nur ein einziges Glied, nämlich das $h_{r+1}\,a^{\xi_{r+1}} = h_{r+1}$ erhalten. Der nächste Schritt besteht in der Entwickelung des Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_{r+1}}{\mathfrak{P}'_{r+1}}$. Für diesen Fall ist also der Grenzwerth $\mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+2} = -3$; man wird also schon zwei Glieder: $h_{r+2}\,a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3}\,a^{\xi_{r+3}} = h_{r+1}\,a^{-1} + h_{r+2}\,a^{-2}$ gewinnen. Der nächste Schritt liefert schon deren vier auf einmal; der Grenzwerth $\mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+4} = -7$ zeigt nämlich an, dass man die Division von $-\frac{\mathfrak{P}_{r+2}}{\mathfrak{P}'_{r+2}}$ bis zur Potenz a^{-6} inclusive fortsetzen dürfe; u. s. w. Im folgenden Schema sind die bei jedem Schritte gewinnbaren Gliedern ersichtlich:

0) x_r

1) $\ldots\ldots h_{r+1}\,a^{0}$

2) $\ldots\ldots h_{r+2}\,a^{-1} + h_{r+3}\,a^{-2}$

3) $\ldots\ldots h_{r+4}\,a^{-3} + h_{r+5}\,a^{-4} + h_{r+6}\,a^{-5} + h_{r+7}\,a^{-6}$

4) $\ldots\ldots h_{r+8}\,a^{-7} + h_{r+9}\,a^{-8} + h_{r+10}\,a^{-9} + h_{r+11}\,a^{-10} + h_{r+12}\,a^{-11} + h_{r+13}\,a^{-12} + h_{r+14}\,a^{-13} + h_{r+15}\,a^{-14}$

Man sieht an diesem Beispiele, dass bei fortgesetzter Entwickelung mit jedem Schritte die Anzahl der auf einmal gewinnbaren Glieder in einem raschen Verhältnisse steigt. Die hier erwiesene Gesetzmässigkeit ist genau dieselbe, wie jene für die Zunahme der verlässlichen Decimalstellen bei numerischen Gleichungen. Wir werden auch in einer nachfolgenden Abhandlung Gelegenheit finden, diese Gesetzmässigkeit aus den von Fourier erörterten Eigenschaften der linearen Approximation abzuleiten.

Eine ähnliche Eigenthümlichkeit lässt sich auch für jene Fälle nachweisen, wo zur Bestimmung der Folgeglieder die Auflösung von Gleichungen des zweiten oder noch höherer Grade erfordert werden; auch in diesen Fällen kann man aus einer Partialgleichung höheren Grades bisweilen mehrere Glieder auf Einmal gewinnen, und es gelten hier die von Fourier für die Approximationsmethoden der zweiten, dritten und höheren Ordnung aufgestellten Sätze. Wir übergehen aber ihre Auseinandersetzung, weil sie uns von unserem Ziele zu weit abziehen würde und weil man immer im Stande ist, auf die lineare Approximationsmethode überzugehen, die, wenn sie auch einen geringeren Grad von Convergenz besitzt, als die übrigen, denn doch unter allen bei weitem die einfachsten Rechnungen mit sich führt.

Wir wollen noch schliesslich die Anwendung der eben entwickelten Regel an einem Beispiele zeigen. Hiezu eignet sich ganz gut die bereits früher im §. 14 sub (45) aufgestellte Gleichung, deren Wurzeln Glied für Glied entwickelt wurden. Fassen wir also dieselbe und zwar die mit dem Anfangsgliede $x_0 = a^3$ beginnende Wurzel in's Auge. Die diesem Anfangsgliede entsprechenden Substitutionsresultate sind sub (46) aufgeführt und zugleich zeigt der Gang der Rechnung, dass weder in $\mathfrak{P}'_0$ noch $\mathfrak{P}''_0$ eine Reduction der höchsten Glieder auf Null erfolgt sei, dass demnach das Anfangsglied a^3 weder einer Wurzel der Gleichung $\frac{dP}{dx} = 0$ noch der $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$ entspreche. Die Grundbedingung für die Anwendbarkeit der eben früher auseinandergesetzten Regel ist demnach hier erfüllt. Man hat namentlich $\mathfrak{A}_0 = 19$, $\mathfrak{A}'_p = 17$, $\mathfrak{A}''_q = 14$, und demnach: $2\mathfrak{A}_r - 3\mathfrak{A}'_p + \mathfrak{A}''_q = +1$. Der Quotient: $-\frac{\mathfrak{P}_0}{\mathfrak{P}_0'}$ kann sonach bis exclusive dem mit der ersten Potenz von a versehenen Gliede fortgesetzt werden. Dies liefert ein einzelnes Folgeglied: $-3a^2$ und sonach die Wurzel in ihren zwei ersten Entwickelungsgliedern: $x = a^3 - 3a^2 + \ldots$. genau so, wie in §. 14. Bisher ist keine Verschiedenheit von dem früheren Verfahren bemerkbar. Allein bei dem nächsten Schritte tritt sie bereits auf. Die dem Wurzelbestandtheile $x_1 = a^3 - 3a^2$ entsprechenden Substitutionsresultate sind sub (47) ersichtlich. Es ist hier $\mathfrak{A}_1 = 17$, während $\mathfrak{A}'_p$ und $\mathfrak{A}''_q$ ihre früheren Werthe behalten, und sonach $2\mathfrak{A}_1 - 3\mathfrak{A}'_p + \mathfrak{A}''_q = -3$ die Grenze bis zu welcher die Division: $-\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_1'}$ fortgesetzt werden darf. Man wird daher $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}'_1$ in ihren drei ersten Gliedern nehmen:

$$\mathfrak{P}_1 = 8a^{17} - 110a^{16} + 589a^{15} + \ldots, \mathfrak{P}_1' = 2a^{17} - 25a^{16} + 116a^{15}$$

und nun den Quotienten:

$$\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_1'} = \frac{-8.a^{17} + 110.a^{16} - 589.a^{15}}{2.a^{17} - 25.a^{16} + 116.a^{15}}$$

in so vielen Anfangsgliedern entwickeln, bis man zu dem mit a^{-3} oder mit einer noch niedrigeren Potenz von a versehenen Gliede gelangen würde; dort bricht man die Division ab. Man findet solchergestalt:

$$-\frac{\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{P}_1'} = -4 + 5a^{-1}$$

und folglich:

$$x = a^3 - 3a^2 - 4 + 5a^{-1}.$$

Dieser Werth stimmt mit dem in §. 14 gefundenen vollkommen überein, und ist hier zufällig die vollständige Wurzel. Diese letzte Operation lieferte also schon mehr als ein einziges Glied und zwar deren zwei oder, wenn man will, deren drei.

Dieses Beispiel dürfte vollkommen hinreichen, um von dem Nutzen der erwähnten Regel ein deutliches Bild zu geben. Auffälliger noch wird dies aber bei den späteren Entwickelungsgliedern.

Entwickelung der Wurzeln einer Gleichung in eine nach aufsteigenden Potenzen von $a - \alpha$ geordnete Reihe.

§. 16.

Hier findet sich das Problem behandelt, die Wurzeln x einer Gleichung: $P = 0$, welche zwei Buchstabengrösssen x und a enthält, nach aufsteigenden Potenzen von $a - \alpha$ in eine Reihe zu entwickeln. Wir setzen hier gleichfalls P als ein Polynom, und die Glieder dieses Polynoms von der Form $Ha^{\alpha}x^{\varepsilon}$ voraus. x bedeutet die unbekannte und abhängige, a die unabhängige Buchstabengrösse, α aber einen beliebigen aber bestimmten Zahlwerth. Die Functionsform, die wir hier wählen, ist gleichfalls eine sehr gebräuchliche, da eine jede Function sich in dieser Form geben lässt. In dieser Gestalt sucht man vermittelst der bekannten Operationen des Dividirens und des Wurzelausziehens die Auflösungen der Gleichungen des ersten und der binomischen höheren Grades und es wäre demnach schon durch diesen Umstand dieses Problem gerechtfertigt, wenn man gleichwohl keinen anderen Grund hiezu auffinden könnte als den, dass es wünschenswerth sei, für beliebig gestaltete höhere Gleichungen ein zu diesem Zwecke dienendes Verfahren zu besitzen, gleichsam als eine Verallgemeinerung der zum Dividiren und Wurzelziehen dienenden Regeln. Allein so wie die absteigende Entwickelung der Wurzeln einen höheren Zweck erreicht, nämlich den, das Verhalten für sehr grosse Werthe von a anzugeben, und mit der Asymptotenbestimmung für ebene Curven, die im Bereiche $a = \pm\infty$ liegen, in enger Verbindung steht; eben so werden wir von dieser Entwickelungsform mancherlei Nutzen ziehen: Wir werden durch sie nämlich alle Nenner, alle Factoren und endlich alle Wurzelgrössen erfahren, die in der Genüge leistenden Function x erscheinen; in die Sprache der Geometrie übersetzt: wir werden die Asymptoten im Bereiche der endlichen Werthe der Abscisse, so wie auch andere eigenthümliche Punkte der ebenen Curve kennen lernen.

Wir suchen also x in folgender Form:

$$x = h_0(a-\alpha)^{\xi_0} + h_1(a-\alpha)^{\xi_1} + h_2(a-\alpha)^{\xi_2} + \ldots + h_r(a-\alpha)^{\xi_r} \tag{54}$$

wo $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_r$ dann $h_0, h_1, h_2, \ldots h_r$ bestimmte, bisher noch unbekannte Zahlwerthe bedeuten, r aber eine in der Regel unendlich grosse Zahl vorstellt, und nur selten einen endlichen Werth besitzt. Diese Reihe muss nämlich in der Regel als eine unendliche Reihe vorausgesetzt werden, denn nur in Form einer unendlichen Reihe sind die Functionen allgemein darstellbar, und nur durch eine unendlich grosse Anzahl von Gliedern wird man das Gleichungs-

polynom auf Null bringen, oder besser gesagt diesem Nullwerthe beliebig weit nähern können. Zwischen den hier erscheinenden Exponenten wird folgende Relation vorausgesetzt:

$$\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots . < \xi_r . \tag{55}$$

Nur durch diese Relation unterscheidet sich unser gegenwärtiges Problem von dem vorhergehenden; in allem übrigen herrscht die grösste Ähnlichkeit. In der That verwandeln wir auch hier, so wie dort, die Natur der Aufgabe; denn es handelt sich jetzt nicht mehr um die Angabe einer Function von a, die, anstatt x gesetzt, P identisch in Null verwandelt, sondern nur um die Bestimmung der Zahlwerthe der mit ξ_0, ξ_1, ... und h_0, h_1, ... bezeichneten Grössen. An die Stelle der Buchstabengleichung ist somit ein System von Zahlengleichungen getreten. Der Gang der Untersuchungen wird die grösste Übereinstimmung mit den früher eingeleiteten beobachten und wir werden uns desshalb kürzer fassen können, weil wir nur jene Verschiedenheiten und Abweichungen von dem früher Gesagten umständlicher zu besprechen brauchen, welche durch die nun entgegengesetzt angenommene Relation zwischen den Exponenten ξ herbeigeführt werden. Wir werden auch die nach aufsteigenden Potenzen geordnete Entwickelung von x nicht für $a - \alpha$, sondern nur für α zeigen, ohne desshalb unsere Untersuchungen nur auf den speciellen Fall $\alpha = 0$ zu beschränken; es ist vielmehr leicht ersichtlich, wie diese für α geltende Entwickelungsmethode auch auf beliebige andere Grössen $a - \alpha$ ausgedehnt werden könne, weil durch die einfache Substitution: $\mathfrak{a} = a - \alpha$, also $a = \mathfrak{a} + \alpha$ das Polynom P in ein anderes verwandelt werden kann, welches statt der Buchstabengrössen x und a, die anderen x und $\mathfrak{a}$ enthält. Entwickelt man nun x aufsteigend nach $\mathfrak{a}$, so hat man offenbar die verlangte Entwickelungsweise von x aufsteigend nach $a - \alpha$. Bei einer solchen Substitution ändert wohl allerdings das Gleichungspolynom P seine Gestalt, weil es jetzt, statt eine Summe von Gliedern $H\alpha^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ darzustellen, vielmehr Glieder von der folgenden anderen Form: $H(\mathfrak{a} + \alpha)^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ besitzt, und nur, wenn alle Exponenten $\mathfrak{a}$ in den verschiedenen Gliedern ganze und positive Zahlwerthe besitzen, wird $(\mathfrak{a} + \alpha)^{\mathfrak{a}}$ entwickelt ein geschlossenes Polynom sein, und demnach das neue Gleichungspolynom in seiner entwickelten Gestalt gleichfalls eine Summe einer endlichen Anzahl von Gliedern von der früheren Form $H\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ darstellen; für alle jene Fälle aber, wo ein einziges im Polynome P erscheinendes $\mathfrak{a}$ negativ oder gebrochen ausfällt, lässt sich diese entwickelte Form $(\mathfrak{a} + \alpha)^{\mathfrak{a}}$ nicht anwenden, sondern man muss es bei dieser unentwickelten Form bewenden lassen. Dies soll jedoch keineswegs ein Hinderniss abgeben, weil auch für solche Gleichungen diese Methode mit Erfolg angewendet werden kann; ja sie besitzt auch dann noch ihre Wirksamkeit, wenn im Gleichungspolynome Wurzelgrössen erscheinen, welche unter den Wurzelzeichen eine Summe von Gliedern $H\alpha^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ besitzen. Wir erwähnen diese verschiedenen Fälle, auf welche sich die Wirksamkeit der folgenden Methode ausdehnt, keineswegs in der Absicht, sie in dieser verallgemeinerten Gestalt zu geben; sondern im Gegentheile, um sie jetzt nur für den einfachsten Fall vorführen zu können, ohne dadurch bei dem Leser die Meinung hervorzurufen, diese Beschränkung sei eine nothwendige, in der Natur der Methode begründete. Wir werden also zunächst eine Gleichung $P = 0$ mit Gliedern von der Form $H\alpha^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}$ vornehmen, und uns die Aufgabe stellen, x nach aufsteigenden Potenzen von α zu entwickeln. Wenn wir das hiezu dienliche Verfahren werden abgeleitet haben, wird es leicht sein, zu zeigen, wie sie sich auch zur Entwickelung der Wurzeln x in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen einer anderen Grösse von der Form $a - \alpha$ modificiren lasse; ja wir würden dann auch jene Gleichungen in das Gebiet unserer Betrachtungen ziehen können, die kein

Gleichungspolynom mit Gliedern $Ha^\alpha x^\varrho$ mehr enthalten, sondern wo Wurzelgrössen erscheinen, die unter den Wurzelzeichen eine Summe von solchen Gliedern $Ha^\alpha x^\varrho$ besitzen.

Das Problem, welches wir uns stellen, ist folgendes: Es ist eine Gleichung $P=0$ gegeben, deren erster Theil eine Summe von Gliedern von der Form $Ha^\alpha x^\varrho$ ist: man soll die Genüge leistenden Functionen x in eine Reihe entwickeln, geordnet nach aufsteigenden Potenzen von a. Wir setzen hier x in der Form voraus:

$$x = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \ldots . \tag{56}$$

und es sollen nun die Werthe von $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots .$ dann von $h_0, h_1, h_2, \ldots .$ angegeben werden. Zwischen dem Exponenten ξ wird die Relation:

$$\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots .$$

vorausgesetzt. Die Werthe $\xi_0, \xi_1, \ldots .$ $h_0, h_1, \ldots .$ sind gewissen Bedingungen entsprechend zu wählen.

Diese Bedingungen werden wir durch die unmittelbare Substitution der für x angenommenen Reihe (56) in das Gleichungspolynom P ableiten. Bei dieser Substitution verwandelt sich das Gleichungspolynom P in einen gleichfalls aufsteigend nach a geordneten Ausdruck, der dem Ausspruche der Gleichung $P=0$ zufolge identisch Null sein soll. Man hat demnach diese mit ξ und h bezeichneten Grössen so zu wählen, dass jede einzelne Potenz von a in dem Substitutionsresultate mit dem Coëfficienten Null versehen erscheint, und wird auf solche Weise eine genügende Anzahl von Bedingungen erhalten, um diese noch unbestimmt gelassenen Grössen ξ und h der einzelnen Glieder der Entwickelung ihren Zahlwerthen nach zweckentsprechend zu bestimmen. Wir wissen andererseits, dass alle bekannten Functionen von a sich nach aufsteigenden Potenzen von a mittelst der Taylor'schen Reihe entwickeln lassen, wenn dieselben und alle ihre Differentialquotienten für a stätig und endlich bleiben, und werden daher unter diesen Bedingungen gleichfalls die Wurzel x in Form einer solchen Reihe:

$$x = h_0 + h_1 a + h_2 a^2 + \ldots . \tag{57}$$

erhalten. Eine Ausnahme hievon findet Statt, wenn die Wurzel x oder einer ihrer Differentialquotienten $\frac{dx}{da}, \frac{dx^2}{da^2}, \ldots .$ für a unendlich oder unstätig wird, wenn z. B. x den Nenner a besitzt, oder aber in sich die Wurzelgrösse $\sqrt[p]{a}$ schliesst, denn dann würde an die Stelle dieser Reihe mit den ganzen und positiven Werthen $\xi_0 = 0$ $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 2$, eine andere zu treten haben, die negative oder gebrochene ξ aufweist. Wir sehen also in dieser aufsteigenden Entwickelungsweise von x zugleich ein Mittel, die in x erscheinenden Factoren, Divisoren und Wurzelgrössen a zu erkennen. Wir legen hier aber keineswegs die Form (57) unseren Rechnungen zu Grunde, da sie gelegentlich, für die erwähnten Ausnahmsfälle nicht geeignet ist, x darzustellen, sondern benützen die allgemeinere, stets giltige Form (56) mit noch unbestimmt gelassenen Exponenten ξ. Die nun folgenden Untersuchungen, welche, wie schon erwähnt wurde, mit den bei der absteigenden Entwickelungsweise von x eingeleiteten die grösste Übereinstimmung zeigen, zerfallen gleichfalls in zwei Abtheilungen: Die erste hat die Bestimmung des Anfangsgliedes $h_0 a^{\xi_0}$, die zweite die der Folgeglieder zum Gegenstande. Auch hier erweist sich eine Abtheilung der Untersuchungen in zwei Theile als eine natürliche, denn die Bestimmung des Anfangsgliedes $h_0 a^{\xi_0}$ bewirkt hier gleichfalls in der Regel die Trennung der Wurzeln, so zwar dass durch dasselbe jede einzelne Wurzel vollkommen genau bezeichnet, und von allen übrigen völlig isolirt erscheint. Die Bestimmung der Folgeglieder bezieht sich daher in der

Regel auch nur auf eine einzige solche isolirte Wurzel, und stellt die weitere Approximation vor.

I. Bestimmung der Anfangsglieder.

§. 17.

Wir substituiren in das Gleichungspolynom P anstatt x eine aufsteigend geordnete Reihe (56), deren Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ ist. Der Gang einer solchen Substitution wurde bereits genau beleuchtet. Hier wo statt x eine aufsteigend geordnete Reihe gesetzt wird, tritt die einzige Verschiedenheit gegen früher auf, dass die Substitutionsresultate gleichfalls aufsteigend nach a geordnet erscheinen werden. Diese Substitution lässt sich hier bei noch unbestimmt gelassenen Werthen des Exponenten ξ_0 nur in den einzelnen Gliedern $H a^{\alpha} x^{\varkappa}$ ausführen, wenn man sich mit dem Anfangsgliede begnügt. Jedes einzelne Glied $H a^{\alpha} x^{\varkappa}$ liefert nämlich einen Ausdruck, der nach aufsteigenden Potenzen von a geordnet ist und dessen erstes, mit der niedrigsten Potenz von a versehenes Glied die Form: $H h_0^{\varkappa} a^{\alpha+\varkappa\xi_0}$ besitzt. Summirt man alle diese verschiedenen, für die einzelnen Glieder des Gleichungspolynoms abgeleiteten Ausdrücke, so entsteht das vollständige Substitutionsresultat $\mathfrak{P}$. Das Anfangsglied desselben kann nur aus einer Gruppe von Gliedern entstehen, die die Form $H h_0^{\varkappa} a^{\alpha+\varkappa\xi_0}$ besitzen und deren jedes einem gewissen Gliede des Gleichungspolynoms P entspricht. Man hat nämlich die Gradzahlen, welche die Form $\alpha + \varkappa\xi_0$ besitzen, in Vergleichung zu bringen, und unter ihnen die kleinste zu erwählen. Das mit dieser kleinsten Gradzahl $\alpha + \varkappa\xi_0$ versehene Glied $H h_0^{\varkappa} a^{\alpha+\varkappa\xi_0}$ ist zugleich das Anfangsglied des Substitutionsresultates $\mathfrak{P}$. Dieses Aufsuchen der kleinsten Gradzahl $\alpha + \varkappa\xi_0$ kann nur geschehen, wenn ξ_0 einen bestimmten Zahlwerth besitzt. Allein hier handelt es sich um eine andere Untersuchung. Der Erfolg einer solchen Vergleichung der Gradzahlen $\alpha + \varkappa\xi_0$, kann verschieden ausfallen, je nach dem dem ξ_0 ertheilten Zahlwerthe; es sind namentlich zwei Fälle möglich: entweder findet sich unter der Gruppe dieser Gradzahlen $\alpha + \varkappa\xi_0$ eine einzige mit dem kleinsten Werthe versehene, während alle übrigen grössere Werthe besitzen; oder der kleinste Werth kommt zweien oder mehreren derselben gemeinschaftlich zu. Diejenigen Werthe von ξ_0, welche den zuerst erwähnten Fall herbeiführen, bewirken, dass ein einziges Glied $H a^{\alpha} x^{\varkappa}$ des Gleichungspolynoms einen mit der niedrigsten Potenz von a beginnenden Ausdruck liefert, während die aus allen übrigen Gliedern hervorgehenden Ausdrücke nur höhere Potenzen von a enthalten. Bei der Summirung dieser Ausdrücke wird dieses mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied daher vereinzelt stehen, sich mit keinem anderen verbinden lassen und zugleich das erste Glied des Substitutionsresultates $\mathfrak{P}$ darstellen. Für solche Werthe von ξ_0 ist folglich das erste Glied des Substitutionsresultates von der Form:

$$H h_0^{\varkappa} a^{\alpha+\varkappa\xi_0}, \tag{58}$$

sein Coëfficient $H h_0^{\varkappa}$ ein eintheiliger Ausdruck, weil es aus einem einzigen Gliede des Gleichungspolynoms hervorgeht, und stets von Null verschieden, so lange dem h_0 ein von Null verschiedener Werth ertheilt wird. Diese sind daher keine geeigneten Zahlwerthe für ξ_0, weil sie ein Nullwerden des Coëfficienten im ersten Gliede des Substitutionsresultates unmöglich

machen. Jenen Werthen von ξ_0 hingegen, welche zwei oder mehrere gleiche und kleinste Gradzahlen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ aufweisen, entsprechen eben so viele Glieder des Gleichungspolynomes, welche einen mit dieser niedrigsten Potenz von a beginnenden Ausdruck und daher auch zu dem ersten Gliede des Substitutionsresultates einen Bestandtheil liefern. Alle diese Bestandtheile besitzen die Form (58) und reduciren sich bei der Summirung der Ausdrücke auf ein Glied, welches a in der niedrigsten Potenz und einen Coëfficienten in Gestalt einer Summe von Gliedern $Hh^{\mathfrak{x}}$ besitzt und in folgender Form erscheint:

$$\Sigma\,[H\,h^{\mathfrak{x}}]\,.\,a^{\eta_0}.$$

η_0 bezeichnet hier diesen kleinsten Werth, der zweien oder mehreren Gradzahlen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ eigen ist, und das Summenzeichen Σ bezieht sich auf gewisse Combinationen, der Werthe H, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{a}$, welche jenen kleinsten Gradzahlen $\eta_0 = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ zugehören. Hiemit sind also alle zur Bestimmung von ξ_0 und h_0 dienenden Bedingungen bekannt: ξ_0 ist nämlich so zu wählen, dass zwei oder mehrere Gradzahlen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ gleich und am kleinsten ausfallen. Ist ξ_0 bekannt und sind hiemit auch jene Glieder $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynoms P bezeichnet, welchen diese kleinsten Werthe von $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ entsprechen; so lässt sich aus ihrer Summe $\Sigma[Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}]$ die andere $\Sigma[Hh^{\mathfrak{x}}]$ durch $a = 1$, $x = h$ Setzen ableiten, und $\Sigma[Hh^{\mathfrak{x}}] = 0$ ist die Bestimmungsgleichung für h_0.

Wir sehen hieraus, dass das gegenwärtige Problem eine grosse Übereinstimmung mit dem früher behandelten ausweise. Hier kommt es gleichfalls auf die Ableitung und Vergleichung der linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ an, derselben, die für die absteigende Entwickelung von x in Betrachtung kamen. Ist ξ_0 bestimmt, so ist die Bestimmungsgleichung für h_0 nämlich:

$$\Sigma[Hh^{\mathfrak{x}}] = 0$$

von einer ähnlichen Gestalt, wie die bei der absteigenden Entwickelung aufgestellte. Der einzige Unterschied besteht darin, dass ξ_0 so zu wählen ist, dass zwei oder mehrere dieser linearen Functionen jetzt gleich und am kleinsten ausfallen, während früher jene ξ_0 in Betrachtung kamen, die zweien oder mehreren Functionen gleiche und grösste Werthe ertheilen. Man hat also auch hier die einem einzelnen Gliede $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynomes P entsprechende lineare Function $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ zu bilden, und dieselben einer eigenen Untersuchung zu unterwerfen. Der Gang dieser Untersuchung wird sich, obwohl von dem für die absteigende Entwickelung gelehrten verschieden, ohne bedeutende Schwierigkeit angeben lassen.

Wenden wir uns zuerst zu der geometrischen Construction, so ergibt sich den einzelnen linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ entsprechend das bekannte System von geraden Linien. Dieses System ist genau das frühere, nur handelt es sich jetzt um andere Durchschnittspunkte als damals. Gleichwie früher für dieses System ein unendliches Polynom aufgefunden wurde, welches in sich alle oberhalb der Linien des Systems liegenden Punkte vereinigt, eben so besteht hier ein solches unendliche Polygon, welches unterhalb aller verzeichneten Geraden liegt, und in sich alle jene Punkte einschliesst, deren Ordinaten η kleiner sind als sämmtliche correspondirende η der Geraden. Dieses nach unten gelegene Polygon ist nur nach oben zu begrenzt, nach allen anderen Richtungen unbegrenzt. Die Begrenzung desselben bilden gewisse Stücke der geraden Linien im Systeme, und diese setzen sich zu einer gebrochenen Linie zusammen. Die Eckpunkte dieses Polygons oder dieser gebrochenen Linie sind es, welche die Werthe von ξ_0 liefern und um deren Bestimmung es sich eigentlich handelt. Dieses Polygon

besitzt gleichfalls nur auswärts springende Ecken, und die gebrochene Begrenzungslinie desselben ist daher in demselben Sinne nach aufwärts zu convex, wie die bei der absteigenden Entwickelung von x betrachtete concav war. Die einzelnen Stücke dieser gebrochenen Linie folgen daher in der Richtung von $\xi_0 = +\infty$ nach $\xi_0 = -\infty$ in aufsteigender Reihenfolge nach der Grösse von $\mathfrak{x}$, also auch nach der Grösse des mit der positiven Halbaxe des ξ_0 eingeschlossenen Winkels geordnet, so zwar, dass das am meisten rechts gelegene Anfangsstück derjenigen Geraden angehört, welche mit der Abscissenaxe den kleinsten Winkel einschliesst, dem also die mit dem kleinsten $\mathfrak{x}$ versehene lineare Function $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ entspricht. Auf dieses Anfangsstück folgen die übrigen Stücke in derjenigen Weise geordnet, wie es der Werth von $\mathfrak{x}$ vorschreibt, der in den entsprechenden linearen Functionen $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ erscheint. Das nach links zu befindliche Endstück ist der mit dem grössten $\mathfrak{x}$ versehenen linearen Function $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ angehörig. Von dieser Anordnungsweise kann man sich in dem schon einmal benützten Beispiele:

$$(59) \qquad (a+1)x^4 + x^3 + (a^2-1)x^2 - (a^2-2a)x + a^2 - a = 0$$

dessen System von Linien in Fig. 1 dargestellt ist, überzeugen. Der von diesem Systeme von Linien begrenzte, unterhalb gelegene Theil der Ebene besitzt die gebrochene Linie $iDCb$ als Begrenzungslinie. iD ist das am meisten nach rechts gelegene Stück desselben, an dieses reiht sich das Stück DC, und hieran wieder das Stück Cb; die ihnen entsprechenden $\mathfrak{x}$ besitzen die Werthe: 0, 2, 4 und erweisen sich daher, wie früher bemerkt wurde, aufsteigend nach ihrer Grösse geordnet. Hier sind die Eckpunkte C und D von Belang, sie liefern die zwei Werthe $\xi_0 = 0$ und $\xi_0 = \frac{1}{2}$, woraus wir schliessen, dass die Genüge leistenden Werthe x, nach aufsteigenden Potenzen von a entwickelt, mit einem Gliede beginnen, welches entweder die Form h_0 oder die andere $h_0 a^{\frac{1}{2}}$ besitzt. Für jeden dieser Werthe von ξ_0 besteht eine eigene Bestimmungsgleichung, welche die zugehörigen Werthe des Coëfficienten h_0 liefert. Diese leitet sich für $\xi_0 = 0$ ab aus denjenigen Gliedern des Gleichungspolynomes, welche durch die im Punkte C sich schneidenden Linien bezeichnet werden. Sie sind:

$$x^4 \quad , \quad x^3 \quad , \quad -x^2$$

und liefern die Gleichung:

$$(60) \qquad h^4 + h^3 - h^2 = 0.$$

Diese Gleichung liefert zuerst $h = 0$ entsprechend dem darin erscheinenden Factor h^2 und dann noch die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$h^2 + h - 1 = 0$$

die die Werthe:

$$h_0 = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

liefert. Wir gelangen so zu dem Resultate, dass zwei Auflösungen x aufsteigend nach a entwickelt die Anfangsglieder:

$$x_0 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$
$$x_0 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{5})$$

besitzen, während noch zwei andere bestehen, die mit einer höheren Potenz von a als a^0 beginnen. Diese zwei anderen Auflösungen sind durch den in der Bestimmungsgleichung (60)

erscheinenden Factor h^2 angedeutet, dem zwei gleiche Nullwurzeln entsprechen. Ihre Anfangsglieder sind mit $a^{\frac{1}{2}}$ versehen. Nehmen wir das ihnen entsprechende $\xi_0 = \frac{1}{2}$ vor, so finden wir durch den zugehörigen Punkt D in der Zeichnung nur die Glieder:

$$-x^2 \quad , \quad -a$$

bezeichnet, und erhalten hieraus die Bestimmungsgleichung:

$$-h^2 - 1 = 0$$

welche zwei Werthe für h liefert, nämlich:

$$h_0 = \sqrt{-1} \quad , \quad h_0 = -\sqrt{-1}$$

und so sind auch die Anfangsglieder dieser zwei Auflösungen, nämlich:

$$x_0 = \sqrt{-a} \quad , \quad x_0 = -\sqrt{-a}$$

ermittelt. Wir ersehen hieraus, dass die Gleichung (59) vier Auflösungen besitzt, welchen, nach aufsteigenden Potenzen von a entwickelt, die Anfangsglieder:

$$x_0 = \tfrac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \ , \ x_0 = \tfrac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) \ , \ x_0 = \sqrt{-a} \ , \ x_0 - \sqrt{-a}$$

zukommen.

Wir haben bei der absteigenden Entwickelung von x uns von der geometrischen Construction befreit, und an ihre Stelle eine einfache analytische Regel treten lassen. Ein Gleiches wird auch hier möglich und zweckdienlich sein. Dort haben wir nämlich die Gleichung nach Potenzen von x absteigend geordnet und die mit denselben Potenzen verknüpften Glieder zusammengefasst, x^x als Factor gesondert und die damit multiplicirten Ha^a in ein Polynom zusammengefasst, in Klammern eingeschlossen und absteigend nach a geordnet, so dass das Gleichungspolynom P die Gestalt erlangte, wie sie in diesem Beispiele (59) ersichtlich ist. Auf gleiche Weise kann man auch hier vorgehen, nur mit dem Unterschiede, dass es dann zweckdienlich erscheint, die mit den Potenzen von x multiplicirten Polynome, bestehend aus einer Summe von Gliedern Ha^a, aufsteigend zu ordnen, also der Gleichung die Gestalt:

$$(61) \qquad (1+a)x^4 + x^3 + (-1+a^2)x^2 + (2a-a^2)x - a + a^2 = 0$$

zu ertheilen. Nun leitet man, wie dort, eine Reihe von Untersuchungen ein, die mit dem ersten Gliede x^4 beginnen, und dann, durch den Gang der Untersuchungen von selbst geleitet, zu den späteren Gliedern überspringen. Man bilde daher die Quotienten: $\frac{0}{1} \quad \frac{0}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$

Die Zähler dieser Brüche sind aus den Exponenten: 0 0 0 1 1, welche der niedrigsten Potenz von a in den verschiedenen mit x multiplicirten Ausdrücken angehören, durch Subtraction des ersten von allen folgenden abgeleitet, die Nenner aber stellen die im entgegengesetzten Sinne genommenen Differenzen der Exponenten von x, nämlich von: 4 3 2 1 0 vor. Diese Quotienten geben die ξ der Durchschnittspunkte, welche die Linien $\eta_b = 0 + 4\xi$ mit den übrigen: $\eta_c = 0 + 3\xi$, $\eta_e = 0 + 2\xi$, $\eta_g = 1 + \xi$, $\eta_i = 1$ bildet. Von allen diesen Werthen ist der kleinste zu bestimmen (hier $\xi = 0$) und als brauchbar zu notiren. Zugleich sind die drei Glieder, nämlich: x^4 als das untersuchte, dann die zwei dem Quotienten Null

entsprechenden: x^3 und $-x^2$ behufs der Bildung der Bestimmungsgleichung für den Coëfficienten h_0 zu bezeichnen. Nun ist $-x^2$ das zunächst zu untersuchende Glied, ihm entsprechen die Quotienten: $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$, die auf gleiche Weise aus $-x^2$ und den folgenden Glidern: $2ax$ und $-a$ gebildet werden. Von ihnen ist $\frac{1}{2}$ der kleinste und daher der zweite brauchbare Werth ξ_0; ihm entsprechen die zwei Glieder $-x^2$ und $-a$ für die Bestimmungsgleichung für h_0. Der Sinn dieser analytischen Regel findet sich in dem Systeme von verzeichneten Geraden in einer populären Weise beleuchtet, denn gerade so müsste man verfahren, um die gebrochene Linie $bCDi$ abzuscheiden, indem man zuerst die Durchschnittspunkte der b mit allen übrigen Linien bestimmt, und unter ihnen den am meisten links gelegenen C erwählt, auf der so ermittelten Geraden e in gleicher Weise den am weitesten nach links gelegenen Durchschnittspunkt D aufsucht und so zur i gelangt, von der man schon im Voraus überzeugt ist, dass sie das rechte Endstück der gebrochenen Linie sei.

Auch diese Untersuchung gehört dem Gebiete der Ungleichungen an, namentlich ist das nach unten gelegene Polygon, um dessen Bestimmung es sich hier handelt, die geometrische Darstellung der Auflösungen eines Systems von Ungleichungen, welche die Gestalt:

$$\eta_0 < \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$$

besitzen, also eines Systems von Ungleichungen, welche geradezu die entgegengesetzten Bedingungen aussprechen als jene, die bei der absteigenden Entwickelung in Betracht kommen. Die gebrochene Linie, welche die Begrenzung dieses Polygons bildet, enthält alle jene Punkte, deren ξ und η diesen Ungleichungen genügen, bis auf eine einzige, die sie zwar nicht, aber dafür die entsprechende Gleichung $\eta = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ erfüllen, und stellt somit die Grenzwerthe der ersten Ordnung vor. Die Eckpunkte des Polygons aber erfüllen zwei Gleichungen von der Form $\eta = \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi$ und alle übrigen Ungleichungen, und stellen die Grenzwerthe der zweiten Ordnung vor. Auf solche Weise also fällt die Bestimmung der Werthe von ξ_0 zusammen mit der Aufsuchung der Grenzwerthe der zweiten Ordnung zu einem Systeme von Ungleichungen mit zwei Unbekannten, welche aus den einzelnen Gliedern $Ha^{\mathfrak{a}}x^{\mathfrak{x}}$ des Gleichungspolynoms abgeleitet werden, und die Form: $\eta_0 < \mathfrak{a} + \mathfrak{x}\xi_0$ besitzen. Wir glauben uns weitere Erläuterungen dieses Verfahrens ersparen zu können, weil die grösste Übereinstimmung mit dem früher und weitläufiger behandelten Probleme besteht und lassen jetzt die allgemeine Regel zur Bestimmung der Anfangsglieder der aufsteigenden Entwickelung folgen; wollen aber an einem Beispiele ihre Anwendung zeigen, um dasjenige in's klare Licht zu setzen, was bei der hier beobachteten Kürze vielleicht manchen Leser noch zweifelhaft erscheinen dürfte.

§. 18.

Die allgemeine Regel zur Bestimmung der Anfangsglieder für die aufsteigende Entwickelung der Wurzeln ist folgende: Man ordne das Gleichungspolynom in erster Instanz absteigend nach Potenzen von x, d. h. man bringe dasselbe auf die Form:

$$A_1 x^{\mathfrak{x}_1} + A_2 x^{\mathfrak{x}_2} - A_3 x^{\mathfrak{x}_3} + \ldots + A_m x^{\mathfrak{x}_m} = 0$$

wo die Exponenten in der Relation: $\mathfrak{x}_1 > \mathfrak{x}_2 > \mathfrak{x}_3 > \ldots > \mathfrak{x}_m$ zu einander stehen, die Polynome A_1, A_2, A_3, ... A_m aber nach Potenzen von a aufsteigend. Nun bilde man, einem jeden Bestandtheile: $A_1 x^{\mathfrak{x}_1}$, $A_2 x^{\mathfrak{x}_2}$, $A_3 x^{\mathfrak{x}_3}$, ... $A_m x^{\mathfrak{x}_m}$ des Gleichungspolynomes entsprechend, aus dem Exponenten $\mathfrak{a}$, im Anfangsgliede von A und dem Exponenten $\mathfrak{x}$ von x durch ein hier von selbst ersichtliches Verfahren eine lineare Ungleichung:

$$\eta < \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi \ , \ \eta < \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{x}_2 \xi \ , \ \eta < \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{x}_3 \xi \ , \ldots . \ \eta < \mathfrak{a}_m + \mathfrak{x}_m \xi$$

und suche die Grenzwerthe zweiter Ordnung, welche diesem Systeme von linearen Ungleichungen mit den zwei Unbekannten ξ und η entsprechen, d. h. jene zusammengehörigen Werthe von ξ und η, welche diese Ungleichungen streng genommen nicht mehr erfüllen, indem sie zwei oder mehrere derselben in identische Gleichungen, alle übrigen aber in identische Ungleichungen verwandeln. Diese seien folgende:

$$\xi_0' \ , \ \xi_0'' \ , \ \xi_0''' \ , \ldots . \ \xi_0^{(r)}$$
$$\eta_0' \ , \ \eta_0'' \ , \ \eta_0''' \ , \ldots . \ \eta_0^{(r)}$$

Gleichzeitig bezeichnet man für einen jeden solchen Grenzwerth der zweiten Ordnung jene Ungleichungen, die in Gleichungen übergehen, oder vielmehr die ihnen correspondirenden Glieder des Gleichungspolynoms, und erhält dermassen, einem jeden einzelnen Grenzwerthe der zweiten Ordnung entsprechend, eine Summe von Gliedern, die wir hier mit:

$$\Sigma[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]' \ , \ \Sigma[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]'' \ , \ \Sigma[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]''' \ , \ldots . \ \Sigma[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]^{(r)}$$

symbolisch bezeichnen wollen. Nun substituirt man in eine jede dieser Gliedersummen $a = 1$ und $x = h$, setzt sie alsdann der Nulle gleich, und erhält so für jeden Grenzwerth eine Gleichung mit der Unbekannten h:

$$\Sigma[H h^{\mathfrak{x}}]' = 0 \ , \ \Sigma[H h^{\mathfrak{x}}]'' = 0 \ , \ \Sigma[H h^{\mathfrak{x}}]''' = 0 \ , \ldots . \ \Sigma[H h^{\mathfrak{x}}]^{(r)} = 0.$$

Diese Gleichungen, der Reihe nach einzeln vorgenommen und aufgelöst, liefern jede eine gewisse Anzahl von Werthen für h, die zu demjenigen Werthe von ξ passen, welcher in dem correspondirenden Grenzwerthe zweiter Ordnung erscheint. Combinirt man nun jeden der Werthe ξ mit den ihm entsprechenden Werthen von h, so erhält man eine gewisse Anzahl von Systemen zusammengehöriger Werthe ξ_0 und h_0:

$$\xi_0' \ , \ \xi_0'' \ , \ \xi_0''' \ , \ldots . \ \xi_0^{(s)}$$
$$h_0' \ , \ h_0'' \ , \ h_0''' \ , \ldots . \ h_0^{(s)}$$

und diese liefern unmittelbar die Anfangsglieder der Wurzeln x für ihre aufsteigende Entwickelung:

$$h_0' a^{\xi_0'} \ , \ h_0'' a^{\xi_0''} \ , \ h_0''' a^{\xi_0'''} \ , \ldots . \ h_0^{(s)} a^{\xi_0^{(s)}}.$$

Ihre Anzahl s ist meistentheils grösser, als jene r der Grenzwerthe zweiter Ordnung und bei ganzen und rationalen Gleichungen in der Regel gleich der Gradzahl derselben.

Es ist jetzt noch übrig, anzugeben, in welcher Weise die Auflösung des Systems von Ungleichungen:

$$\eta < \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi \ , \ \eta < \mathfrak{a}_2 + \mathfrak{x}_2 \xi \ , \ \eta < \mathfrak{a}_3 + \mathfrak{x}_3 \xi \ , \ldots . \ \eta < \mathfrak{a}_m + \mathfrak{x}_m \xi$$

einzuleiten sei.

Man könnte hier in den Ungleichungen die Zeichen beider Theile in die entgegengesetzten und das Ungleichheitszeichen $<$ in $>$ verwandeln und würde so ein äquivalentes System von Ungleichungen erhalten, dessen Behandlungsweise schon im ersten Abschnitte §. 6 durch eine Regel festgestellt ist; allein ebenso leicht ist es, die Regel dem vorliegenden Systeme von Ungleichungen unmittelbar anzupassen. Man hat nämlich abermals ein combinatorisches Verfahren einzuleiten, das mit der ersten der so geordneten Ungleichungen beginnt, und zu den nächstfolgenden fortschreitet. Man subtrahirt zuvörderst die lineare Function $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi$ der ersten Ungleichung der Reihe nach von allen übrigen: $\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{x}_2 \xi$, $\mathfrak{a}_3 + \mathfrak{x}_3 \xi$, ... $\mathfrak{a}_m + \mathfrak{x}_m \xi$, setzt jede der hervorgehenden Differenzen:

$$\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1)\xi \ , \ \mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1)\xi \ , \ \mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{x}_4 - \mathfrak{x}_1)\xi \ , \ldots . \ a_m - \mathfrak{a}_1 + (\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_1)\xi$$

für sich gleich Null, löst jede solche Gleichung nach ξ auf, und sucht nun unter allen so gewonnenen Auflösungen:

$$-\frac{\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_1} \ , \ -\frac{\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_3 - \mathfrak{x}_1} \ , \ -\frac{\mathfrak{a}_4 - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_4 - \mathfrak{x}_1} \ , \ldots . \ -\frac{\mathfrak{a}_m - \mathfrak{a}_1}{\mathfrak{x}_m - \mathfrak{x}_1}$$

die kleinste Zahl (mit Rücksicht auf das Zeichen); diese ist der kleinste zulässige Werth von ξ_0. Wir wollen ihn mit ξ'_0 bezeichnen. Gleichzeitig notirt man nebst der ersten Ungleichung alle jene folgenden, welche diesen kleinsten Werth ξ'_0 geliefert haben, und für $\xi = \xi'_0$, $\eta = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{x}_1 \xi'_0$ in identische Gleichungen übergehen. Die letzte derselben, die wir mit $\eta < \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{x}_\alpha \xi$ bezeichnen wollen, bildet nun den Ausgangspunkt einer zweiten, der eben auseinandergesetzten vollkommen ähnlichen Untersuchung und wird mit allen ihr folgenden Ungleichungen combinirt den zweiten brauchbaren Werth von ξ_0, nämlich ξ''_0 liefern, und zugleich jene Ungleichungen bezeichnen, die für $\xi = \xi''_0$, $\eta = \mathfrak{a}_\alpha + \mathfrak{x}_\alpha \xi''_0$ sich in identische Gleichungen verwandeln. Die letzte der so bezeichneten Ungleichungen ist der Ausgangspunkt der dritten Untersuchung, welche ξ'''_0 liefert, an der aber nur die ihr nachfolgenden Ungleichungen Theil nehmen. Solchergestalt schreitet die Untersuchung entweder stätig oder sprungweise von der ersten Gleichung zu den nachfolgenden über. Die Anzahl der in Betracht kommenden Ungleichungen nimmt mit jedem Schritte ab. Ist man endlich dahin gelangt, dass die letzte Ungleichung $\eta < \mathfrak{a}_m + \mathfrak{x}_m \xi$ als eine solche bezeichnet ist, welche sich in eine identische Gleichung verwandelt, so schliesst sich die Untersuchung von selbst, indem alle Gleichungen erschöpft sind.

Bezüglich der zweckmässigsten Art, diese Rechnung zu Papier zu bringen, gelten dieselben Vorschriften, wie für die absteigende Entwickelung. Sie finden sich in §. 6 auseinandergesetzt. Hier tritt, wie sich aus dem Vorhergehenden von selbst ergibt, nur der einzige Unterschied auf, dass von jeder Quotientenreihe die kleinsten statt der grössten Zahlen zu nehmen sind.

Hier folgt ein Beispiel zur Erläuterung der gegebenen Regel:

$$(a^4 + a^5)\,x^5 + (3\,a + 4\,a^2 + a^3)\,x^4 + 2\,ax + (3 + 4\,a) = 0$$

erste Quotientenreihe: $-\frac{3}{1}$, $-\frac{3}{4}$, $-\frac{4}{5}$ unter ihnen ist $-\frac{3}{1}=-3$ der kleinste, und liefert: $\xi_0=-3$:

zweite Quotientenreihe: $-\frac{0}{3}$, $-\frac{1}{4}$ unter diesen ist $-\frac{1}{4}$ der kleinste, und liefert: $\xi_0=-\frac{1}{4}$.

Dem Werthe: $\xi_0=-3$ entsprechen die Glieder: $a^4x^5+3ax^4$
und die Bestimmungsgleichung: $h^5+3h^4=0$;
diese liefert: $h_0=-3$
und das Anfangsglied: $x_0'=-\frac{3}{a^3}$;

dem Werthe: $\xi_0=-\frac{1}{4}$ entsprechen die Glieder: $3ax^4+3$
und die Bestimmungsgleichung: $3h^4+3=0$;
diese liefert: $h_0=\sqrt[4]{-1}$
und das Anfangsglied in vier verschiedenen Formen: $x_0=\sqrt[4]{-\frac{1}{a}}$.

II. Bestimmung der Folgeglieder.

§. 19.

Wenn schon die Bestimmung der Anfangsglieder von x für die aufsteigende Entwickelungsform eine grosse Ähnlichkeit besitzt mit dem bei der absteigenden Entwickelung zum gleichen Zwecke einzuleitenden Verfahren; so geht diese Ähnlichkeit bei der Bestimmung der Folgeglieder in eine vollkommene Übereinstimmung über. Man hat genau dieselben Schritte, wie bei der absteigenden Entwickelungsform zu machen; und ist man gar bei der vollständigen Isolirung der Wurzel angelangt, so besteht der einzige Unterschied nur noch darin, dass die vorliegenden Substitutionsresultate, welche bei Entwickelung der Folgeglieder in die Rechnung eingehen, aufsteigend geordnet sind; im Rechnungsverfahren selbst herrscht nicht der geringste Unterschied.

Beginnen wir mit dem gewöhnlichsten Falle, demjenigen nämlich, wo das gewonnene Anfangsglied $x_0=h_0a^{\xi_0}$ nur einer einzigen Wurzel zukommt, d. h. setzen wir voraus, dass

$$\Sigma[Hh_0^r]=0$$

und $\Sigma[\mathfrak{x}Hh_0^{r-1}]$ von Null verschieden, also h_0 eine einfache Wurzel der Bestimmungsgleichung $\Sigma[Hh^r]=0$ gewesen sei, und versuchen wir jetzt, das Folgeglied $h_1a^{\xi_1}$ dermassen zu bestimmen, dass bei der Substitution von $x=h_0a^{\xi_0}+h_1a^{\xi_1}$ die Reduction auf Null im Substitutionsresultate $\mathfrak{P}$ auch bei der nächstfolgenden Potenz von a erfolge, so zwar, dass nicht nur die Glieder mit der niedrigsten, sondern auch jene mit der nächst höheren Potenz sich tilgen. Man hat:

$$\mathfrak{x}^x = h_0{}^x a^{x\xi_0} + \mathfrak{x} h_0{}^{x-1} h_1 . a^{(x-1)\xi_0+\xi_1} + \ldots\ldots$$

Hier besitzen die aufgeschriebenen beiden Glieder wegen des Stattfindens der Relation $\xi_0 < \xi_1$ die beiden niedrigsten Potenzen von a, alle übrigen, hier nicht aufgeführten aber sämmtlich höhere Potenzen. Jedes einzelne Glied $H a^\alpha x^x$ des Gleichungspolynomes P liefert demnach einen aufsteigend geordneten Ausdruck, der, in seinen beiden ersten Gliedern entwickelt, die Form besitzt:

$$H a^\alpha \mathfrak{x}^x = H h_0{}^x a^{\alpha+x\xi_0} + \mathfrak{x} H h_0{}^{x-1} h_1 a^{\alpha+x\xi_0-\xi_0+\xi_1} + \ldots\ldots \tag{62}$$

und durch Summirung aller dieser verschiedenen Ausdrücke, ausgedehnt auf alle Glieder des Gleichungspolynomes, gelangt man zum Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_1$. Das erste, mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied des geordneten Substitutionsresultates ist einer früheren Untersuchung und Bezeichnungsweise zufolge:

$$\Sigma[H h_0{}^x a^{\alpha+x\xi_0}] = 0. \tag{63}$$

Wir gehen nun daran, das nächst niedrigere, zweite Glied zu bilden. Vor allem ist einleuchtend, dass, dem zweiten aufgeführten Gliede

$$\mathfrak{x} H h_0{}^{x-1} h_1 a^{\alpha+x\xi_0-\xi_0+\xi_1} \tag{64}$$

entsprechend, sich beim Summiren eine Gruppe

$$\Sigma[\mathfrak{x} H h_0{}^{x-1} h_1 a^{\alpha+x\xi_0-\xi_0+\xi_1}] \tag{65}$$

ergeben wird, correspondirend allen jenen Gliedern des Gleichungspolynomes, welche bei der Bestimmung des Exponenten ξ_0 notirt wurden und auf welche sich das Summenzeichen Σ, einer schon öfter gebrauchten Bezeichnungsweise zufolge, erstreckt. Man bemerkt mit leichter Mühe, dass der Factor $h_1 a^{-\xi_0+\xi_1}$ allen diesen Gliedern gemeinschaftlich anhängt, und dass sie noch überdies alle mit derselben Potenz von a versehen sind, weil $\alpha + x\xi_0$ in allen Gliedern, auf die sich die Summirung erstreckt, einerlei und kleinsten Zahlwerth η_0 hat. Es geht daraus hervor, dass sich alle Glieder dieser Gruppe durch Reduction auf ein einziges zusammenziehen lassen, von der Form:

$$\mathfrak{H}_0' h_1 . a^{\mathfrak{A}_0'+\xi_1} \tag{66}$$

wo $\mathfrak{H}'_0$ und $\mathfrak{A}'_0$ die Bedeutungen haben:

$$\mathfrak{H}_0' = \Sigma[\mathfrak{x} H h_0{}^{x-1}] \tag{67}$$

$$\mathfrak{A}_0' = \eta_0 - \xi_0. \tag{68}$$

unter η_0 den kleinsten Werth von $\alpha + x\xi_0$ verstanden. Diese Gruppe (65) liefert also ein von Null verschiedenes Glied, so lange h_0 eine einfache Wurzel der Bestimmungsgleichung (63) ist. Ausser den hier betrachteten Gliedern, welche durch die Summirung Σ erhalten wurden, wären noch jene übrigen zusammenzufassen, welche denjenigen Gliedern des Gleichungspolynomes entsprechen, die ausser dem Bereiche des Summenzeichens Σ liegen, d. h. die grössere, η_0 übersteigende Werthe von $\alpha + x\xi_0$ liefern, und die wir, um uns kürzer ausdrücken zu können, unter dem Summenzeichen $\mathfrak{S}$ vereinigt denken wollen. Es ist aber klar vor Augen, dass alle

solchen Glieder durchaus höhere Potenzen von a aufweisen werden im Vergleiche zu dem Gliede (66), weil offenbar $\mathfrak{a} + \mathfrak{x}\,\xi_0 - \xi_0 + \xi_1$ die Grösse $\mathfrak{A}'_0 + \xi_1 = \eta_0 - \xi_0 + \xi_1$ bei allen übersteigt. Eben so ist auch klar, dass die übrigen, hier nicht aufgeführten Bestandglieder des Ausdruckes (62) nur Glieder mit höheren Potenzen von a zu liefern im Stande seien. Wir haben uns daher nur noch zum ersten Gliede des Ausdruckes (62), d. h. zu dem $Hh_0^x\, a^{a+x\xi_0}$ zu wenden, und nachdem schon die Summirung Σ daran vorgenommen wurde, noch auf jene übrigen Glieder des Gleichungspolynomes P überzugehen, die ausser dem Bereiche dieser Summe Σ, hingegen im Bereiche der Summirung $\mathfrak{S}$ liegen, und unter ihnen das mit der niedrigsten Potenz von a versehene, oder falls mehrere solche sich ergeben sollten, ihre Summe zu bestimmen. $\mathfrak{H}_0\, a^{\mathfrak{A}_0}$ sei dieses verlangte Glied; so ist nunmehr kein Zweifel, dass das mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied des Substitutionsresultates nur aus den zwei Gliedern:

$$\mathfrak{H}_0\, a^{\mathfrak{A}_0} \text{ und } \mathfrak{H}_0'\, h_1\, a^{\mathfrak{A}_0'+\xi_1}$$

entstehen könne und zwar je nach der Wahl des Zahlwerthes von ξ_1 aus einem oder aus beiden. Hier liegen nun die Bedingungen für ξ_1 und h_1 klar vor Augen, um auch diese Potenz von a verschwinden zu lassen. Man erreicht dies nämlich durch Erfüllen der Gleichung:

$$\mathfrak{H}_0\, a^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0'\, h_1\, a^{\mathfrak{A}_0'+\xi} = 0 \tag{69}$$

also durch:

$$\xi_1 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_0' \quad , \quad h_1 = -\frac{\mathfrak{H}_0}{\mathfrak{H}_0'} \tag{70}$$

$\mathfrak{H}_0\, a^{\mathfrak{A}_0}$ und $\mathfrak{H}'_0\, a^{\mathfrak{A}'_0}$ sind die ersten Glieder der aufsteigend geordneten Substitutionsresultate, die für $x = x_0$ aus P und $\frac{dP}{dx}$ hervorgehen.

Man sieht hieraus, dass das einzuleitende Rechnungsverfahren vollkommen übereinstimmt mit jenem, welches bei dem absteigenden Entwickelungsgange angegeben wurde. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Substitutionsresultate aufsteigend geordnet werden.

Wie man das erste Folgeglied $h_1\, a^{\xi_1}$ gefunden hat, eben so findet man die übrigen.

Hat man nämlich schon eine Summe von Entwickelungsgliedern:

$$x_r = h_0\, a^{\xi_0} + h_1\, a^{\xi_1} + \ldots\ldots + h_r\, a^{\xi_r}$$

erhalten, so kann man noch eines hinzufügen: $h_{r+1}\, a^{\xi r+1}$, mit noch unbestimmt gelassenen h_{r+1} und ξ_{r+1}, nun anstatt x den Ausdruck $x_r + h_{r+1}\, a^{\xi r+1}$ in das Gleichungspolynom substituiren, das Substitutionsresultat ordnen und hierauf die Bedingungen für h_{r+1} und ξ_{r+1} ableiten, damit eine weitere Reduction auf Null erfolge. Bei dieser Substitution verwandelt sich das Gleichungspolynom P in einen $h_{r+1}\, a^{\xi r+1}$ und a enthaltenden Ausdruck von der Form:

$$P = S[H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}}] + h_{r+1}\, a^{\xi r+1}\, S[\mathfrak{x}\, H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-1}] + \ldots\ldots \tag{71}$$

Hier bedeuten $S[H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}}]$ und $S[\mathfrak{x}\, H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-1}]$ die für $x = x_r$ aus P und $\frac{dP}{dx}$ hervorgehenden Substitutionsresultate und sind daher a enthaltende Ausdrücke, die aufsteigend nach Potenzen dieser Grösse geordnet sind. In $S[H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}}]$ findet eine Reduction auf Null in einer

Reihe der niedrigsten Potenzen Statt und das erste von Null verschiedene Glied desselben, welches wir mit $\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}$ bezeichnen wollen, wird daher durch wirkliche Substitution ermittelt werden müssen. Im zweiten Bestandtheile erscheint $S[\mathfrak{x} H a^{\alpha} x_r^{\mathfrak{x}-1}]$ als Factor von $h_{r+1} a^{\xi r+1}$. Das mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied derselben ist offenbar

$$\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}] a^{\mathfrak{A}_0' \xi_0} = \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}.$$

Die übrigen mit höheren Potenzen von $h_{r+1} a^{\xi r+1}$ versehenen Bestandtheile, die in (71) nicht ausdrücklich aufgeführt sind, können hier aus jeder weiteren Berücksichtigung gelassen werden, so lange, wie hier vorausgesetzt wurde, $\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}]$ einen von Null verschiedenen Werth besitzt, weil sie sämmtlich nur Glieder mit höheren Potenzen von a beherbergen. Es geht daraus hervor, dass für jede Wahl von h_{r+1} und ξ_{r+1}, so lange nur $\xi_{r+1} > \xi_r$ erfüllt bleibt, das erste, mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied des Substitutionsresultates P nur aus den beiden Gliedern:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r} \text{ und } \mathfrak{H}_0' h_{r+1} a^{\mathfrak{A}_0' + \xi_{r+1}}$$

hervorgehen könne. Hier sind gleichfalls die für h_{r+1} und ξ_{r+1} zu Recht bestehenden Bedingungen unmittelbar ersichtlich: Man hat nämlich die Gleichung:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r} + \mathfrak{H}_0' h_{r+1} a^{\mathfrak{A}_0' + \xi_{r+1}} = 0 \tag{72}$$

zu erfüllen, d. h.

$$\xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_0' \text{ und } h_{r+1} = -\frac{\mathfrak{H}_r}{\mathfrak{H}_0'} \tag{73}$$

zu wählen. Es findet sich die früher gemachte Behauptung bestätigt, dass das hier geltende Verfahren in nichts von jenem verschieden sei, das bei der absteigenden Reihenentwickelung in analogen Fällen zur Bestimmung der Folgeglieder diente, als eben nur in der verkehrten Ordnungsweise der Substitutionsresultate.

§. 20.

Wenden wir nun noch unsere Aufmerksamkeit jenen anderen, seltener zutreffenden Fällen zu, wo die gewonnenen Anfangsglieder der Entwickelung als wiederholte Wurzeln höherer Gleichungen erscheinen, und überzeugen wir uns auch in diesen Ausnahmsfällen von der vollkommenen Übereinstimmung des Rechnungsverfahrens bei der auf- und absteigenden Entwickelung. Setzen wir also voraus, die Bestimmung der Anfangsglieder von x hätte zu einem bestimmten solchen $x_0 = h_0 a^{\xi_0}$ geführt, und der Coëfficient h_0 in demselben sei eine m-mal wiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung:

$$\Sigma[H h_0^{\mathfrak{x}}] = 0. \tag{74}$$

Es bestehen dann die identischen Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\Sigma[H h_0^{\mathfrak{x}}] = 0 \\ &\Sigma[\mathfrak{x} H h_0^{\mathfrak{x}-1}] = 0 \\ &\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H h_0^{\mathfrak{x}-2}] = 0 \end{aligned} \tag{75}$$

$$\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+2)\,H h_0^{\mathfrak{x}-m+1}]=0;$$

hingegen ist

$$\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+1)\,H h_0^{\mathfrak{x}-m}]$$

von Null verschieden.

Substituiren wir anstatt x in das Gleichungspolynom $P=S[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]$ den Ausdruck:

$$x=x_0+x'=h_0 a^{\xi_0}+h_1 a^{\xi_1}+\ldots. \tag{76}$$

wobei h_0 und ξ_0 eben jene speciellen Werthe besitzen, die bei der Bestimmung des Anfangsgliedes dafür aufgefunden worden, x' aber eine aufsteigend geordnete Reihe bedeutet, beginnend mit dem Gliede $h_1 a^{\xi_1}$, in welchem h_1 und ξ_1 noch unbestimmt gelassen sind; so erhält man:

$$x^{\mathfrak{x}}=x_0^{\mathfrak{x}}+\mathfrak{x}\,x_0^{\mathfrak{x}-1}x'+\tbinom{\mathfrak{x}}{2}x_0^{\mathfrak{x}-2}x'^2+\ldots+\tbinom{\mathfrak{x}}{m-1}x_0^{\mathfrak{x}-m+1}x'^{m-1}+\tbinom{\mathfrak{x}}{m}x_0^{\mathfrak{x}-m}x'^m+\ldots. \tag{77}$$

weil zufolge der Relation $\xi_0<\xi_1$ nur bei dieser Entwickelungsweise ein aufsteigend geordneter Ausdruck gewonnen wird. Man findet ferner:

$$\begin{aligned}P=S[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]=S[H a^{\mathfrak{a}} x_0^{\mathfrak{x}}]+S[\mathfrak{x}\,H a^{\mathfrak{a}} x_0^{\mathfrak{x}-1}]x'+\tfrac{1}{2}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\,H a^{\mathfrak{a}} x_0^{\mathfrak{x}-2}]x'^2+\ldots\\ +\tfrac{1}{1\ldots(m-1)}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+2)\,H a^{\mathfrak{a}} x_0^{\mathfrak{x}-m+1}]x'^{m-1}+\\ +\tfrac{1}{1\ldots m}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+1)\,H a^{\mathfrak{a}} x_0^{\mathfrak{x}-m}]x'^m+\ldots.\end{aligned} \tag{78}$$

und hat jetzt bei unbestimmt gelassenen x_1 und ξ_1 die Reductionen so weit wie möglich durchzuführen und die mit den niedrigsten Potenzen von a versehenen Glieder zu bestimmen. Vorerst lassen sich die Summen S in zwei Theile zerlegen: Σ und $\mathfrak{S}$, wo in Σ die mit dem kleinsten Werthe von $\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\,\xi_0$ versehenen Glieder, in $\mathfrak{S}$ aber alle übrigen zusammengefasst erscheinen; ferner ist das erste Glied $h_1 a^{\xi_1}$ von x' jedenfalls mit der niedrigsten Potenz von a versehen, so zwar, dass man, x' durch $h_1 a^{\xi_1}$ ersetzend, wohl eine grosse Anzahl von Gliedern wird weggelassen haben, aber durchaus nur solche, die die niedrigste Potenz von a sicherlich nicht besitzen. Man erhält dermassen verfahrend:

$$\begin{aligned}P=\Sigma[H h_0^{\mathfrak{x}}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}]+h_1 a^{\xi_1}.\Sigma[\mathfrak{x}\,H h_0^{\mathfrak{x}-1}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-\xi_0}]+\tfrac{1}{2}h_1^2 a^{2\xi_1}.\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\,H h_0^{\mathfrak{x}-2}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-2\xi_0}]+\ldots.\\ +\tfrac{h_1^{m-1}a^{(m-1)\xi_1}}{1\ldots(m-1)}\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+2)\,H h_0^{\mathfrak{x}-m+1}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-(m-1)\xi_0}]+\\ +\tfrac{h_1^m a^{m\xi_1}}{1\ldots m}\Sigma[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+1)\,H h_0^{\mathfrak{x}-m}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-m\xi_0}]+\ldots.\\ +\mathfrak{S}.[H h_0^{\mathfrak{x}}a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0}]+h_1 a^{\xi_1}.\mathfrak{S}[\mathfrak{x}.H h_0^{\mathfrak{x}-1}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-\xi_0}]+\tfrac{1}{2}h_1^2 a^{2\xi_1}.\mathfrak{S}[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\,H h_0^{\mathfrak{x}-2}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-2\xi_0}]+\ldots.\\ +\tfrac{h_1^{m-1}a^{(m-1)\xi_1}}{1\ldots(m-1)}\mathfrak{S}[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+2)\,H h_0^{\mathfrak{x}-m+1}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-(m-1)\xi_0}]+\\ +\tfrac{h_1^m a^{m\xi_1}}{1\ldots m}\mathfrak{S}[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-m+1)\,H h_0^{\mathfrak{x}-m}.a^{\mathfrak{a}+\mathfrak{x}\xi_0-m\xi_0}]+\ldots.\end{aligned}$$

In Folge der Gleichungen (74), (75) verschwinden alle mit Σ bezeichneten Summen unter den hier aufgeführten, mit Ausnahme der letzten, die jedenfalls einen von Null verschiedenen Werth erlangt, den wir einer früheren Bezeichnungsweise gemäss mit $\mathfrak{H}_0^{(m)}\,a^{\mathfrak{A}_0(m)}$ andeuten wollen, wobei $\mathfrak{A}_0^{(m)}=\eta_0-m\,\xi_0$ ist. Die mit $\mathfrak{S}$ bezeichneten Summen hingegen sind im

Allgemeinen von Null verschieden und zwar selbst wieder Polynome, in welchen a erscheint. Die ersten, mit der niedrigsten Potenz von a versehenen Glieder derselben lassen sich vermittelst directer Substitution finden; wir wollen sie für die m ersten mit:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} , \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} , \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''} , \ldots \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)}} \ldots\ldots$$

bezeichnen; die letzte fällt von selbst aus dem Bereiche jeder ferneren Betrachtung, wie allsogleich gezeigt werden soll.

Es ist nämlich hier:

$$\mathfrak{A}_0 > \eta_0 , \mathfrak{A}_0' > \eta_0 - \xi_0 , \mathfrak{A}_0'' > \eta_0 - \xi_0 , \ldots \mathfrak{A}_0^{(m-1)} > \eta_0 - (m-1)\xi_0 \ldots\ldots$$

weil in den Summen $\mathfrak{S}$ die mit dem kleinsten Werthe von $\alpha + \varkappa \xi_0$ versehenen Glieder nicht erscheinen. Die letzte der aufgeschriebenen Summen $\mathfrak{S}$ ist demnach jedenfalls mit einer höheren Potenz von a versehen, als die letzte Summe Σ. Alle übrigen hier nicht aufgeführten Bestandglieder fallen, wie eine leichte Überlegung lehrt, von selbst weg, so lange

$$\Sigma[\varkappa(\varkappa-1)\ldots.(\varkappa-m+1) H h_0^{\varkappa-m}] a^{\eta_0 - m\xi_0} = \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m)}}$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Wir schliessen hieraus, dass für alle möglichen Werthe von ξ_1, wenn sie nur die Relation $\xi_1 > \xi_0$ erfüllen, das erste, mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied des Substitutionsresultates P sich nur aus einem oder aus mehreren der folgenden zusammensetzen könne:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}, h_1 H_0' a^{\mathfrak{A}'_0 + \xi_1}, \frac{1}{2} h_1^2 \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1}, \ldots\ldots \frac{1}{1\ldots(m-1)} h_1^{m-1} \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)} + (m-1)\xi_1},$$
$$\frac{1}{1\ldots m} h_1^m \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m)} + m\xi_1}.$$

Hier liegen nun die für ξ_1 und h_1 bestehenden Bedingungen klar vor Augen: ξ_1 ist nämlich dermassen zu wählen, dass unter diesen Gliedern mindestens zwei oder mehrere die niedrigste Potenz von a aufweisen, also ist ihm ein Grenzwerth zweiter Ordnung für das System von Ungleichungen:

$$\begin{aligned}
&\eta < \mathfrak{A}_0 \\
&\eta < \mathfrak{A}_0' + \xi_1 \\
&\eta < \mathfrak{A}_0'' + 2\xi_1 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\eta < \mathfrak{A}_0^{(m-1)} + (m-1)\xi_1 \\
&\eta < \mathfrak{A}_0^{(m)} + m\xi_1
\end{aligned}$$

zu ertheilen. Man kann solcher brauchbaren Werthe für ξ_1 höchstens m und muss mindestens Einen finden. Die Bestimmung der zugehörigen h_1 erfolgt durch Auflösen der entsprechenden Gleichungen. Im Ganzen ergeben sich in der Regel auf diesem Wege m verschiedene Folgeglieder $h_1 a^{\xi_1}$, deren jedes einer einzigen und bestimmten Auflösung x zukommt; bisweilen finden sich aber wiederholte Wurzelwerthe h_1 vor und die Anzahl der von einander verschiedenen Folgeglieder $h_1 a^{\xi_1}$ ist dann kleiner als m.

Das Verfahren, welches zu den Folgegliedern $h_1 a^{\xi_1}$ führt, wenn h_0 eine wiederholte Wurzel der Bestimmungsgleichung war, ist daher im Wesentlichen folgendes: Man substi-

tuire das gefundene Anfangsglied $h_0 a^{\xi_0}$ anstatt x in das Gleichungspolynom und in seine m ersten derivirten Functionen, ordne diese Substitutionsresultate aufsteigend nach Potenzen von a und bilde nun aus den ersten von Null verschiedenen Gliedern derselben, die wir mit:

$$\mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0}, \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'}, \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''}, \ldots . \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)}}, \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m)}}$$

bezeichnet haben, die folgende Gleichung nach x' des m-ten Grades:

$$(79) \qquad \mathfrak{H}_0 a^{\mathfrak{A}_0} + \mathfrak{H}_0' a^{\mathfrak{A}_0'} x' + \frac{1}{2} \mathfrak{H}_0'' a^{\mathfrak{A}_0''} x'^2 + \ldots . + \frac{1}{1 \ldots (m-1)} \mathfrak{H}_0^{(m-1)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m-1)}} x'^{m-1} + \frac{1}{1 \ldots m} \mathfrak{H}_0^{(m)} a^{\mathfrak{A}_0^{(m)}} x'^m = 0$$

und wende darauf das bekannte Verfahren an, welches die Anfangsglieder von x' in der aufsteigenden Entwickelungsform liefert; dieselben sind die gesuchten Werthe von $h_1 a^{\xi_1}$.

Man bemerkt hier allsogleich die vollkommene Übereinstimmung dieses Verfahrens mit jenem, welches bei der absteigenden Entwickelung von x angegeben wurde.

§. 21.

Es bleibt uns jetzt nur noch ein einziger Fall zu erörtern, nämlich die Bestimmung eines späteren Folgegliedes $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$, wenn die Summe aller vorhergehenden Entwickelungsglieder, nämlich:

$$x_r = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \ldots . + h_r a^{\xi_r}$$

bekannt ist, und die in denselben erscheinenden Coëfficienten $h_0, h_1, h_2, \ldots . h_r$ wiederholte Wurzeln ihrer Bestimmungsgleichungen darstellen. Es ist dies der allgemeinste Fall von allen und wir werden auch in diesem die vollkommenste Übereinstimmung zwischen dem auf- und absteigenden Entwickelungsvorgange nachweisen.

Wir wollen annehmen, dass die Coëfficienten $h_0, h_1, h_2, \ldots . h_r$ als wiederholte Wurzeln nicht nur ihren Bestimmungsgleichungen, sondern auch den daraus durch Differentiationen abgeleiteten Gleichungen Genüge leisten, und namentlich der letzte derselben h_r eine p-fache Wurzel darstelle. Wir werden nun anstatt x den Ausdruck:

$$(80) \qquad x_r + x' = h_0 a^{\xi_0} + h_1 a^{\xi_1} + h_2 a^{\xi_2} + \ldots + h_r a^{\xi_r} + h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + \ldots .$$

in das Gleichungspolynom P substituiren, wobei wir die Werthe von h_{r+1} und ξ_{r+1} noch ganz unbestimmt lassen. Das auf diesem Wege hervorgehende Substitutionsresultat wird daher die Grössen a und x' in sich schliessen, und, so lange die in x' erscheinenden Grössen h und ξ unbestimmt bleiben, nur jene Reductionen zulassen, die zufolge der zweckmässigen Wahl von $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots . \xi_r, h_0. h_1, h_2, \ldots . h_r$ eintreten. Schreitet man nun zur Bestimmung des mit der niedrigsten Potenz von a versehenen Gliedes derselben, so bleibt seine Form so lange unbestimmt, als über ξ_{r+1} nicht in einer bestimmten Weise verfügt wird.

Beschränkt man die Werthe von ξ_{r+1} durch die Relation: $\xi_{r+1} > \xi_r$, eine Beschränkung die unerlässlich ist, wenn x ein wohlgeordneter Ausdruck sein soll, so ergibt sich nur eine

beschränkte Anzahl von Gliedern, $p+1$ an der Zahl, die möglicherweise einzeln oder zu mehreren, je nach dem speciellen Werthe von ξ_{r+1} das erste mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied zusammensetzen können.

Dieselben besitzen $h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}}$ in verschiedenen Potenzen von der 0^{ten} bis p^{ten} und sind namentlich folgende:

$$\mathfrak{H}_r\, a^{\mathfrak{A}_r},\ h_{r+1}\,\mathfrak{H}_r'\, a^{\mathfrak{A}'r+\xi_{r+1}},\ \frac{h^2{}_{r+1}}{1\,.\,2}\,\mathfrak{H}_r''\, a^{\mathfrak{A}''r+2\xi_{r+1}},\ \ldots\ldots\ \frac{h_{r+1}{}^{p-1}}{1\ldots.(p-1)}\,\mathfrak{H}_r{}^{(p-1)}\, a^{\mathfrak{A}_r(p-1)+(p-1)\xi_{r+1}},$$
$$\frac{h_{r+1}{}^{p}}{1\ldots p}\,\mathfrak{H}_r{}^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r(p)+p\xi_{r+1}},$$

wo die gebrauchten Bezeichnungen die bekannten Bedeutungen haben. Zur Bestimmung von ξ_{r+1} wendet man sich nun zum Systeme von Ungleichungen

$$\begin{aligned}
&\eta < \mathfrak{A}_r\\
&\eta < \mathfrak{A}_r' \quad + \quad \xi_{r+1}\\
&\eta < \mathfrak{A}_r'' \quad + 2\,\xi_{r+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\eta < \mathfrak{A}_r{}^{(p-1)} + (p-1)\,\xi_{r+1}\\
&\eta < \mathfrak{A}_r{}^{(p)} \quad + \quad p\,\xi_{r+1}
\end{aligned}$$

und findet als Grenzwerthe zweiter Ordnung lauter brauchbare Werthe für diese Grösse. Für jeden solchen Werth von ξ_{r+1} besteht eine entsprechende Gleichung in h_{r+1} meist höheren Grades, deren von Null verschiedene Wurzeln die verlangten Werthe darstellen.

Dies ist im Wesentlichen der Gang und das Ergebniss der nachfolgenden Untersuchungen.

Substituiren wir in das Gleichungspolynom P anstatt x den Ausdruck $x_r + x'$ der in entwickelter Form in (80) ersichtlich ist, so erhält man:

$$(82)\qquad P = S[H a^{\mathfrak{a}} x_r{}^{\mathfrak{x}}] + x'.\,S[\mathfrak{x}\,H a^{\mathfrak{a}} x_r{}^{\mathfrak{x}-1}] + \frac{x'^2}{2}\,S[\mathfrak{x}\,(\mathfrak{x}-1)\,H a^{\mathfrak{a}} x_r{}^{\mathfrak{x}-2}] + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{x'^p}{1\ldots p}\,S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-p+1)\,H a^{\mathfrak{a}} x_r{}^{\mathfrak{x}-p}] + \ldots\ldots$$

Setzen wir voraus, dass in den hier erscheinenden Summen, welche die für $x = x_r$ aus den Polynomen:

$$P,\ \frac{dP}{dx},\ \frac{d^2P}{dx^2};\ \ldots\ldots\ \frac{d^pP}{dx^p};\ \ldots\ldots$$

hervorgehenden Substitutionsresultate, also nach Potenzen von a aufsteigend geordnete Polynome darstellen, die von Null verschiedenen ersten, also mit der niedrigsten Potenz von a versehenen Glieder bezüglich mit:

$$\mathfrak{H}_r\, a^{\mathfrak{A}_r},\ \mathfrak{H}_r'\, a^{\mathfrak{A}_r'},\ \mathfrak{H}_r''\, a^{\mathfrak{A}_r''},\ \ldots\ldots\ \mathfrak{H}_r{}^{p}\, a^{\mathfrak{A}_r(p)},\ \ldots\ldots$$

bezeichnet werden, und bedenkt man noch überdies, dass $h_{r+1}\, a^{\xi r+1}$ das erste Glied von x' ist, so findet man als erste und niedrigste Glieder der einzelnen Bestandtheile in (82):

$$(83)\qquad \mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r},\ h_{r+1}\,\mathfrak{H}_r'\, a^{\mathfrak{A}_r'+\xi_{r+1}},\ \frac{1}{2}\,h^2{}_{r+1}\,\mathfrak{H}_r''\, a^{\mathfrak{A}_r''+2\xi_{r+1}},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{1\ldots.p}\,h^p{}_{r+1}\,\mathfrak{H}_r{}^{(p)}\, a^{\mathfrak{A}_r(p)+p\,\xi_{r+1}},\ \ldots.$$

Eine weitere Reduction im niedrigsten Gliede durch entsprechende Wahl von ξ_{r+1} wird erfolgen, wenn unter den Exponenten dieser Glieder:

$$(84) \qquad \mathfrak{A}_r\ ,\ \mathfrak{A}_r'+\xi_{r+1}\ ,\ \mathfrak{A}_r''+2\,\xi_{r+1}\ ,\ \ldots\ldots\ \mathfrak{A}_r^{(p)}+p\,\xi_{r+1}\ ,\ \ldots\ldots$$

zwei oder mehrere gleich und am kleinsten ausfallen, oder mit anderen Worten, wenn ξ_{r+1} gleich einem Grenzwerthe der zweiten Ordnung für das System von Ungleichungen:

$$(85) \qquad \begin{aligned} \eta &< \mathfrak{A}_r \\ \eta &< \mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}_r'' + 2\,\xi_{r+1} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta &< \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\,\xi_{r+1} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{aligned}$$

und noch überdies der Bedingung $\xi_{r+1} > \xi_r$ entsprechend gewählt wird.

Wir können zwar jetzt noch nicht beweisen, dass wenn h_r eine p-mal wiederholte Wurzel seiner Bestimmungsgleichung war, die Gruppe der $p+1$ ersten dieser Ungleichungen wirklich solche über ξ_r liegende Grenzwerthe für ξ_{r+1} liefern werde, wollen aber indess dies als wahr annehmen, den Beweis aber später folgen lassen.

Wir nehmen also an, dass das System von Ungleichungen $p+1$ an der Zahl:

$$(86) \qquad \begin{aligned} \eta &< \mathfrak{A}_r \\ \eta &< \mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}_r'' + 2\,\xi_{r+1} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \eta &< \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\,\xi_{r+1} \end{aligned}$$

lauter Grenzwerthe liefere, die über ξ_r fallen. Das System (85) ist aufsteigend nach den Coëfficienten von ξ_{r+1} geordnet. Geht man bei der Bestimmung der Grenzwerthe in dieser Reihenfolge vor, indem man mit der ersten Ungleichung beginnt und auf die späteren übergeht, so erhält man zuerst den allergrössten Grenzwerth und hierauf die nächst niedrigeren. Es ist hieraus ersichtlich, dass, wenn es überhaupt solche über ξ_r liegende Grenzwerthe gibt, sie nur aus einer Gruppe der ersten Ungleichungen hervorgehen können. Ob aber solche über ξ_r liegende Grenzwerthe bestehen, d. h. ob zu den Gliedersummen x_r wirklich jedesmal ein Folgeglied $h_{r+1}a^{\xi r+1}$ gefunden werden könne und dass namentlich die Gruppe (86) der ersten Ungleichungen $p+1$ an der Zahl nur lauter solche liefere, muss vor der Hand noch als zweifelhaft angenommen werden; den Beweis, dass dies wirklich stattfinde, werden wir, wie bereits erwähnt, später folgen lassen.

Denken wir uns nun unter ξ_{r+1} einen bestimmten jener über ξ_r liegenden Grenzwerthe der zweiten Ordnung für das System (85) oder (86), ferner unter

$$(87) \qquad \eta_{r+1} = \mathfrak{A}_r^{(q)} + q\,\xi_{r+1} = \ldots\ldots = \mathfrak{A}_r^{(q+s)} + (q+s)\,\xi_{r+1}$$

diejenigen Gleichungen, in welche sich die entsprechenden Ungleichungen verwandeln, wobei also der Natur der Sache nach $q+s \leq p$ ausfällt, so ist hiemit eine Reihe von Gliedern der in (83) aufgeführten bezeichnet:

$$(88) \qquad \frac{h_{r+1}^{q}}{1\ldots q}\,\mathfrak{H}_r^{(q)}\,a^{\mathfrak{A}_r(q)+q\xi_{r+1}},\ \ldots\ldots\ \frac{h_{r+1}^{q+s}}{1\ldots(q+s)}\,\mathfrak{H}_r^{(q+s)}\,a^{\mathfrak{A}_r(q+s)+(q+s)\xi_{r+1}}$$

welche alle dieselbe und niedrigste Potenz $a^{\eta r+1}$ enthalten und bei der Summirung sich in ein einziges zusammenziehen lassen:

$$(89) \qquad \left[\frac{h_{r+1}{}^{q}}{1 \ldots q} \mathfrak{H}_r{}^{(q)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s}}{1 \ldots (q+s)} \mathfrak{H}_r{}^{(q+s)}\right] a^{\eta_{r+1}}.$$

Eine Reduction desselben auf Null lässt sich demnach durch eine zweckmässige Wahl des bisher noch unbestimmt gelassenen Coëfficienten h_{r+1} herbeiführen, gebunden an das Erfülltsein der Bedingungsgleichung:

$$(90) \qquad \frac{h_{r+1}{}^{q}}{1 \ldots q} \mathfrak{H}_r{}^{(q)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s}}{1 \ldots (q+s)} \mathfrak{H}_r{}^{(q+s)} = 0.$$

Diese Gleichung ist ganz und rational und lässt demnach ausser den Nullwerthen noch mindestens einen einzigen, in der Regel aber s verschiedene Werthe von h_{r+1} zu.

Zu einem jeden Grenzwerthe ξ_{r+1} ergibt sich eine entsprechende Gleichung, die nach Wegschaffen der Nullwurzeln von einem gewissen Grade s ist, entsprechend dem Unterschiede $(q+s) - q$ der Coëfficienten von ξ_{r+1} in den zugehörigen beiden äussersten linearen Functionen. Die Summe aller verschiedenen s, welche den einzelnen Grenzwerthen angehören, ist demnach, wie leicht ersichtlich, gleich p.

Die Gesammtzahl der auf solche Weise hervorgehenden Folgeglieder $h_{r+1} a^{\xi r+1}$ ist folglich in der Regel p, und eine Verminderung ihrer Anzahl kann nur durch das Auftreten gleicher Wurzeln erfolgen, welche dann wieder den Keim für mehrere Folgeglieder $h_{r+2} a^{\xi r+2}$ in sich schliessen.

Wir haben also im Grunde nur noch zu beweisen, dass das System (86) wirklich nur lauter über ξ_r liegende Grenzwerthe liefern könne. Dies ist der Zweck der nachfolgenden Untersuchungen.

Wir werden nämlich nun das nächstfolgende Glied $h_{r+2} a^{\xi r+2}$ auf dieselbe Weise bestimmen, und finden, dass wenn h_{r+1} eine t-fache Wurzel der Gleichung (90) ist, zu der Gliedersumme x_{r+1} das nächstfolgende wirklich durch eine Gleichung vom Grade t gegeben sei. Man wird also in der Regel t verschiedene Folgeglieder $h_{r+2} a^{\xi r+2}$ oder wieder gleiche Wurzelwerthe für h_{r+2} erhalten, die aus demselben Grunde zu mehreren verschiedenen oder gleichen $h_{r+3} a^{\xi r+3}$ Veranlassung geben u. s. w., so dass eine t-mal wiederholte Wurzel h_{r+1} jedenfalls bei fortgesetzter Entwickelung entweder zu t verschiedenen Auflösungen führt, oder die Bestimmungsgleichungen für die Coëfficienten fortan bei höherem Grade erhält, was dann als ein Beweis anzusehen ist, dass die entwickelten Glieder nicht nur die $P = 0$, sondern auch eine oder mehrere der derivirten Gleichungen erfüllen, mit anderen Worten, dass die betreffende Auflösung als doppelte, drei- oder mehrfache Wurzel der $P = 0$ zu gelten habe.

Stellen wir uns unter h_{r+1} jetzt einen bestimmten Zahlwerth vor, gezogen aus der Gleichung (90) und, um den allgemeinsten Fall zu berücksichtigen, wollen wir annehmen, derselbe sei eine t-mal wiederholte Wurzel, so dass die Gleichungen bestehen:

$$(91) \qquad \begin{aligned} &\frac{h_{r+1}{}^{q}\mathfrak{H}_r{}^{(q)}}{1 \ldots q} + \ldots\ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s}\mathfrak{H}_r{}^{(q+s)}}{1 \ldots (q+s)} = 0 \\ &\frac{h_{r+1}{}^{q-1}\mathfrak{H}_r{}^{(q)}}{1 \ldots (q-1)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-1}\mathfrak{H}_r{}^{(q+s)}}{1 \ldots (q+s-1)} = 0 \\ &\frac{h_{r+1}{}^{q-2}\mathfrak{H}_r{}^{(q)}}{1 \ldots (q-2)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-2}\mathfrak{H}_r{}^{(q+s)}}{1 \ldots (q+s-2)} = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{h_{r+1}{}^{q-t+1}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-t+1)}+\ldots\ldots+\frac{h_{r+1}{}^{q+s-t+1}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-t+1)}=0$$

aber der Ausdruck:

$$\frac{h_{r+1}{}^{q-t}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-t)}+\ldots\ldots+\frac{h_{r+1}{}^{q+s-t}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-t)}$$

von Null verschieden bleibt. Substituiren wir nun anstatt x den Werth $x_r + h_{r+1}\,a^{\xi r+1}$ in die Polynome:

$$P,\ \frac{dP}{dx},\ \frac{d^2P}{dx^2},\ \ldots\ \frac{d^tP}{dx^t},$$

welche die Form besitzen:

$$\begin{aligned}
P &= S[H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}}]\\
\frac{dP}{dx} &= S[\mathfrak{x} H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-1}]\\
\frac{d^2P}{dx^2} &= S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-2}]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} &= S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+2) H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-t+1}]\\
\frac{d^tP}{dx^t} &= S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+1) H a^{\mathfrak{a}} x^{\mathfrak{x}-t}]
\end{aligned} \tag{92}$$

so erhält man:

$$P = S[H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}}] + h_{r+1}\,a^{\xi_{r+1}}\,S[\mathfrak{x} H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-1}] + \tfrac{1}{2}h^2{}_{r+1}\,a^{2\xi_{r+1}}\,S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-2}] + \ldots. \tag{93}$$

$$\frac{dP}{dx} = S[\mathfrak{x} H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-1}] + h_{r+1}a^{\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-2}] + \tfrac{1}{2}h^2{}_{r+1}a^{2\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)(\mathfrak{x}-2) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-3}] + . \tag{94}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2P}{dx^2} &= S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-2}] + h_{r+1}\,a^{\xi_{r+1}}\,S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)(\mathfrak{x}-2) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-3}] +\\
&\quad + \tfrac{1}{2}h^2{}_{r+1}\,a^{2\xi_{r+1}}\,S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)(\mathfrak{x}-2)(\mathfrak{x}-3) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-4}] + \ldots.
\end{aligned} \tag{95}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} = S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+2) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-t+1}] + h_{r+1}\,a^{\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+1) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-t}] + \ldots \tag{96}$$

$$\frac{d^tP}{dx^t} = S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+1) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-t}] + h_{r+1}\,a^{\xi_{r+1}}S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-t-1}] + \ldots \tag{97}$$

Da vorausgesetztermassen die ersten mit der niedrigsten Potenz von a versehenen Glieder von

$$S[H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}}]\ ,\ S[\mathfrak{x} H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-1}]\ ,\ S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-2}]\ \ldots.\ S[\mathfrak{x}(\mathfrak{x}-1)\ldots(\mathfrak{x}-t+1) H a^{\mathfrak{a}} x_r^{\mathfrak{x}-t}]$$

mit:

$$\mathfrak{H}_r\,a^{\mathfrak{A}_r}\ ,\ \mathfrak{H}_r'\,a^{\mathfrak{A}_r'}\ ,\ \mathfrak{H}_r''\,a^{\mathfrak{A}_r''}\ ,\ \ldots\ \mathfrak{H}_r^{(t)}\,a^{\mathfrak{A}_r^{(t)}}$$

bezeichnet wurden, so sind die Exponenten von a in den ersten Gliedern der einzelnen Bestandtheile

(98)	in (93):	$\mathfrak{A}_r$	$, \mathfrak{A}_r' + \xi_{r+1}$	$, \mathfrak{A}_r'' + 2\xi_{r+1}\ ,\ \ldots.\ ,\ \mathfrak{A}_r^{(p)} + p\,\xi_{r+1}\ ,\ \ldots\ldots\ldots$
(99)	in (94):	$\mathfrak{A}_r'$	$, \mathfrak{A}_r'' + \xi_{r+1}$	$\ ,\ \ldots.\ ,\ \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-1)\xi_{r+1}\ ,\ \ldots\ldots$
(100)	in (95):	$\mathfrak{A}_r''$		$\ ,\ \ldots.\ ,\ \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-2)\xi_{r+1}\ ,\ \ldots\ldots$
(101)	in (96):	$\mathfrak{A}_r^{(t-1)}$	$, \mathfrak{A}_r^{(t)} + \xi_{r+1}$	$\ ,\ \ldots.\ ,\ \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-t+1)\xi_{r+1}\ ,\ \ldots$
(102)	in (97):	$\mathfrak{A}_r^{t}$		$\ ,\ \ldots.\ ,\ \mathfrak{A}_r^{(p)} + (p-t)\xi_{r-1}\ ,\ \ldots\ldots$

Man soll nun unter ihnen die kleinsten Werthe ermitteln. Wir haben η_{r+1} den kleinsten Zahlwerth genannt, der für den speciellen Werth von ξ_{r+1} unter den linearen Functionen des Systemes (85) erscheinen, wobei η_{r+1} den in (87) ersichtlichen Werth besitzt. Da nun $q + s$ einen jedenfalls t übersteigenden oder mindestens ihm gleichkommenden Werth hat, so sind

$$\begin{aligned}
&\text{für } (98) \ldots . \eta_{r+1}\\
&\text{für } (99) \ldots . \eta_{r+1} - \xi_{r+1}\\
&\text{für } (100) \ldots . \eta_{r+1} - 2\xi_{r+1}\\
&\quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .\\
&\text{für } (101) \ldots . \eta_{r+1} - (t-1)\xi_{r+1}\\
&\text{für } (102) \ldots . \eta_{r+1} - t\xi_{r+1}
\end{aligned}$$

die kleinsten dort erscheinenden Zahlwerthe. Das mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied in den für $x = x_r + h_{r+1} a^{\xi r+1}$ aus

$$P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \ldots \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}}, \frac{d^tP}{dx^t}$$

hervorgehenden Substitutionsresultaten besitzt demnach, vor der Ausführung der durch eine specielle Wahl von h_{r+1} möglichen Reductionen, die Form:

$$\begin{aligned}
P &= \left[\frac{h_{r+1}{}^q \mathfrak{H}_r(q)}{1 \ldots q} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s} \mathfrak{H}_r(q+s)}{1 \ldots (q+s)}\right] a^{\eta r+1} + \ldots .\\
\frac{dP}{dx} &= \left[\frac{h_{r+1}{}^{q-1} \mathfrak{H}_r(q)}{1 \ldots (q-1)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-1} \mathfrak{H}_r(q+s)}{1 \ldots (q+s-1)}\right] a^{\eta r+1-\xi r+1} + \ldots .\\
\frac{d^2P}{dx^2} &= \left[\frac{h_{r+1}{}^{q-2} \mathfrak{H}_r(q)}{1 \ldots (q-2)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-2} \mathfrak{H}_r(q+s)}{1 \ldots (q+s-2)}\right] a^{\eta r+1-2\xi r+1} + \ldots .\\
&\quad . \quad .\\
\frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}} &= \left[\frac{h_{r+1}{}^{q-t+1} \mathfrak{H}_r(q)}{1 \ldots (q-t+1)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-t+1} \mathfrak{H}_r(q+s)}{1 \ldots (q+s-t+1)}\right] a^{\eta r+1-(t-1)\xi r+1} + \ldots .\\
\frac{d^tP}{dx^t} &= \left[\frac{h_{r+1}{}^{q-t} \mathfrak{H}_r(q)}{1 \ldots (q-t)} + \ldots\ldots + \frac{h_{r+1}{}^{(q+s-t)} \mathfrak{H}_r(q+s)}{1 \ldots (q+s-t)}\right] a^{\eta r+1-t\xi r+1} + \ldots .
\end{aligned}$$

Zufolge der Gleichungen (91) verschwinden aber alle diese Glieder mit Ausnahme des letzten, und die Substitutionsresultate

$$P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \ldots . \frac{d^tP}{dx^t}$$

beginnen daher mit einer anderen, höheren Potenz von a. Bezeichnet man einer öfter gebrauchten Bezeichnungsweise gemäss die ersten von Null verschiedenen Glieder der für $x = x_{r+1}$ aus $P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}, \ldots \frac{d^{t-1}P}{dx^{t-1}}, \frac{d^tP}{dx^t}$ hervorgehenden und vollkommen geordneten Substitutionsresultate mit:

$$\mathfrak{H}_{r+1} a^{\mathfrak{A}r+1}, \mathfrak{H}'_{r+1} a^{\mathfrak{A}'r+1}, \mathfrak{H}''_{r+1} a^{\mathfrak{A}''r+1}, \ldots . \mathfrak{H}^{(t-1)}_{r+1} a^{\mathfrak{A}^{(t-1)}_{r+1}}, \mathfrak{H}^{(t)}_{r+1} a^{\mathfrak{A}^{(t)}_{r+1}}$$

so bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{r+1} > \eta_{r+1}\\
&\mathfrak{A}'_{r+1} > \eta_{r+1} - \xi_{r+1}\\
&\mathfrak{A}''_{r+1} > \eta_{r+1} - 2\xi_{r+1}
\end{aligned} \qquad (103)$$

$$\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-1)} > \eta_{r+1} - (t-1)\,\xi_{r+1}$$
$$\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} = \eta_{r+1} - t\,\xi_{r+1}$$
$$\mathfrak{H}_{r+1}^{(t)} = \frac{h_{r+1}{}^{q-t}\mathfrak{H}_r(q)}{1\ldots(q-t)} + \ldots + \frac{h_{r+1}{}^{q+s-t}\mathfrak{H}_r(q+s)}{1\ldots(q+s-t)}.$$

Die derivirten Polynome höherer Ordnung, wie z. B. $\frac{d^{t+1}P}{dx^{t+1}}$ besitzen aber Anfangsglieder, deren $\mathfrak{A}^{(v)}{}_{r+1}$ mindestens den Werth $\eta_{r+1} - v\,\xi_{r+1}$ erreicht oder aber darüber liegt, wie eine analoge Betrachtung lehrt, so zwar dass für alle über t liegenden Werthe von v die doppeldeutige Relation:

$$\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(v)} \geqq \eta_{r+1} - v\,\xi_{r+1} \tag{104}$$

besteht.

Diese Relationen (103) und (104) erlauben uns nun unmittelbar den Schluss, dass zur Bestimmung des nächstfolgenden Gliedes $h_{r+2}\,a^{\xi_{r+2}}$ ein System von $t+1$ Ungleichungen aufzulösen sei, welches lauter Grenzwerthe liefert, die über ξ_{r+1} liegen und demnach brauchbare Werthe von ξ_{r+2} darstellen. In der That, denkt man sich im Systeme von Ungleichungen (85), welches zur Bestimmung von ξ_{r+1} dienlich war, r in $r+1$ und $r+1$ in $r+2$ verwandelt, so erhält man daraus unmittelbar das zur Bestimmung von ξ_{r+2} dienliche System:

$$\begin{aligned}
&\eta < \mathfrak{A}_{r+1}\\
&\eta < \mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2}\\
&\eta < \mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\eta < \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-1)} + (t-1)\xi_{r+2}\\
&\eta < \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} + t\xi_{r+2}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\eta < \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(v)} + v\,\xi_{r+2}.
\end{aligned} \tag{105}$$

Nun folgt aus den Ungleichungen und der Gleichung in (103):

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-1)} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} > \xi_{r+1}\\
&\frac{\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-2)} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{2} > \xi_{r+1}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\mathfrak{A}''_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{t-2} > \xi_{r+1}\\
&\frac{\mathfrak{A}'_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{t-1} > \xi_{r+1}\\
&\frac{\mathfrak{A}_{r+1} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{t} > \xi_{r+1}.
\end{aligned} \tag{106}$$

Die im ersten Theile dieser Ungleichungen stehenden Quotienten sind aber geradezu jene Werthe von ξ_{r+2}, welche die lineare Function $\mathfrak{A}^{(t)}{}_{r+1} + t\,\xi_{r+2}$ der Reihe nach gleichmachen den übrigen:

(107) $\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-1)} + (t-1)\xi_{r+2}$, $\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t-2)} + (t-2)\xi_{r+2}$, $\mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2}$, $\mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2}$; $\mathfrak{A}_{r+1}$

und da sie, wie hier ersichtlich ist, alle grösser sind als ξ_{r+1}, so werden alle der Gruppe von Ungleichungen:

(108)
$$\begin{aligned} \eta &< \mathfrak{A}_{r+1} \\ \eta &< \mathfrak{A}'_{r+1} + \xi_{r+2} \\ \eta &< \mathfrak{A}''_{r+1} + 2\xi_{r+2} \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \eta &< \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} + t\xi_{r+2} \end{aligned}$$

zukommenden Grenzwerthe grösser ausfallen als ξ_{r+1} und daher brauchbare Werthe für ξ_{r+2} liefern.

Die Gleichung (103) und die Ungleichung (104) liefern für $v > t$ die Relation:

$$\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(v)} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} \geqq (t-v)\,\xi_{r+1}$$

oder die gleichbedeutende:

$$\frac{\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(v)} - \mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)}}{v-t} \leqq \xi_{r+1}.$$

Der im ersten Theile dieser Relation stehende Quotient ist geradezu der Werth von ξ_{r+2} für den die beiden linearen Functionen: $\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(t)} + t\xi_{r+2}$ und $\mathfrak{A}_{r+1}{}^{(v)} + v\xi_{r+2}$ gleiche Werthe erlangen, und da derselbe, wie hier ersichtlich, für alle über t liegenden v kleiner oder gleich ξ_{r+1} ausfällt, so entnimmt man unmittelbar, dass alle übrigen Ungleichungen des Systems (105), welche auf die Gruppe (108) folgen sollten, lauter unbrauchbare Grenzwerthe liefern werden.

Es ist also hiemit erwiesen, dass wenn bei der Bestimmung des Folgegliedes $h_r\, a^{\xi_r}$ der Coëfficient h_r als eine t-mal wiederholte Wurzel der entsprechenden Bestimmungsgleichung erhalten worden, die Ermittlung des nächstfolgenden Entwickelungsgliedes $h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}}$ durch ein System von $t+1$ Ungleichungen, oder wenn man will, durch eine höhere Buchstabengleichung vom Grade t gegeben sei, welche lauter brauchbare Werthe dafür liefert, und hiemit wäre die früher erwähnte Lücke des Beweises ausgefüllt, wenn man sich daran erinnert, dass dasselbe Verhalten auch schon bei $h_0\, a^{\xi_0}$ gelte.

Fassen wir nun alles bisher über die Bestimmung der Folgeglieder Gesagte zusammen, so stellt sich die vollkommenste Übereinstimmung zwischen der ab- und aufsteigenden Entwickelungsweise heraus: Um zu einem ermittelten Bestandtheile x_r der Wurzel das unmittelbar darauffolgende Glied $h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}}$ aufzufinden, hat man vor allem anderen zu untersuchen, ob der letzte Coëfficient h_r eine einfache oder eine wiederholte Wurzel seiner Bestimmungsgleichung war. Ist h_r eine p-mal wiederholte Wurzel (wo übrigens auch $p=1$ sein kann), so hat man x_r anstatt x in die Polynome:

$$P\ ,\ \frac{dP}{dx}\ ,\ \frac{d^2P}{dx^2}\ ,\ \cdots\ \frac{d^pP}{dx^p}$$

zu substituiren, diese Substitutionsresultate aufsteigend zu ordnen, ihre ersten Glieder:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}\ ,\ \mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r}\ ,\ \mathfrak{H}''_r a^{\mathfrak{A}''_r}\ ,\ \ldots\ \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r^{(p)}}$$

zu bestimmen und nun aus ihnen die Gleichung:

$$(109) \qquad \mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r} + x' \mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'_r} + \frac{x'^2}{2} \mathfrak{H}''_r a^{\mathfrak{A}''_r} + \ldots\ldots + \frac{x'^p}{1\ldots p} \mathfrak{H}_r^{(p)} a^{\mathfrak{A}_r^{(p)}} = 0$$

zu bilden, welche x' als Unbekannte enthält, und das bekannte Verfahren zur Bestimmung der Anfangsglieder von x' für die aufsteigend nach Potenzen von a geordnete Entwickelungsform anzuwenden. Alle auf solche Weise gefundenen Anfangsglieder stellen brauchbare Werthe von $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ dar. Findet man mehrere von einander verschiedene solche Glieder, so bildet ein jedes den Ausgangspunkt einer eigenen ferneren Entwickelung und man wird endlich in der Regel dahin gelangen, dass zu jeder entwickelten Gliedersumme nur ein einziges Folgeglied gehört, zu dessen Bestimmung eine Gleichung des ersten Grades führt. Ist man dahin gekommen, so sind die Wurzeln der Gleichung vollkommen isolirt, und die weiter fortgesetzte Rechnung erfüllt nur den Zweck, eine grössere Anzahl von Entwickelungsgliedern zu liefern. Hier können wieder zweierlei Fälle eintreten. Gewöhnlich lässt sich nämlich die Entwickelung ins Unendliche fortsetzen, weil das aus dem Gleichungspolynome P hervorgehende Substitutionsresultat von Null verschieden bleibt, wie viele Glieder man auch bilden mag; bisweilen jedoch schliesst sich die Entwickelung von selbst, indem bei einem gewissen Gliede das Substitutionsresultat vollständig verschwindet. Dieser Fall gehört, wie leicht einzusehen, nicht zur Regel sondern zu den Ausnahmen. Unter solchen günstigen Umständen führt also die Entwickelung zu einer geschlossenen Form von x. Dies Abbrechen der Entwickelung liegt hier sogar mitunter in der Gewalt des Rechners; bisweilen nämlich lässt sich eine Grösse $\mathfrak{a} = \alpha - a$ finden, nach welcher eine Wurzel aufsteigend entwickelt in geschlossener Form erhalten werden kann, und es hängt nur dann von der zweckmässigen Wahl von α ab. Wir werden in einer nächstfolgenden Abhandlung diesen Gegenstand ausführlicher behandeln.

Wir halten es für überflüssig, die hier auseinandergesetzte Methode noch durch Beispiele weiter zu beleuchten, da das dabei einzuschlagende Rechnungsverfahren keinen neuen Weg verfolgt, der nicht schon dem Leser von der absteigenden Entwickelung her bekannt wäre und daher alles dort Gesagte auch hier vollkommen passt.

§. 22.

Wir haben schon zu wiederholten Malen Gelegenheit gefunden, auf die Übereinstimmung hinzuweisen, welche zwischen der aufsteigenden und der absteigenden Reihenentwickelung stattfindet. Hier wollen wir noch eine solche zur Sprache bringen. Im §. 16 wurde dargethan, dass man bei der absteigenden Reihenentwickelung von x, wenn dieselbe bis zu einer gewissen Weite vorgeschritten ist, mit einer einzigen Theiloperation nicht immer nur ein einziges Folgeglied, sondern deren mehrere auf Einmal erhalten könne. Genau dieselbe Eigenthümlichkeit kommt auch der aufsteigenden Entwickelungsweise zu. Ist man nämlich in der Rechnung so weit vorgeschritten, dass die Substitutionsresultate $\mathfrak{P}'_r$ und $\mathfrak{P}''_r$, welche für $x = x_r$ aus den derivirten Polynomen $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{d^2P}{dx^2}$ abgeleitet werden, beim fortwährenden Zunehmen der Gliederanzahl r fortan dieselben Anfangsglieder $\mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'_p}$ und

$\mathfrak{H}_q'' a^{\mathfrak{A}_q''}$ aufweisen; so ist man bei dem Punkte angelangt, wo durch eine schickliche Abänderung des Rechnungsverfahrens mit einem einzigen Schritte immer mehrere Glieder auf Einmal erhalten werden können. Anstatt nämlich, wie die frühere Regel zur Bestimmung der Folgeglieder vorschreibt, nur das erste Glied des Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_r'}$ zu suchen, welches eben der Werth des nächsten Folgegliedes $h_{r+1} a^{\xi_{r+1}}$ ist, führt man die Division weiter aus, und erhält so mehrere Glieder auf Einmal:

$$h_{r+1} a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2} a^{\xi_{r+2}} + h_{r+3} a^{\xi_{r+3}} + \ldots + h_{r+s} a^{\xi_{r+s}}. \tag{110}$$

Die Grenze, bis zu welcher die Division fortgesetzt werden darf, wird durch eine sehr einfache Relation:

$$\xi_{r+s} < \mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1} \tag{111}$$

festgesetzt. Alle auf solche Weise entwickelten Glieder, deren Exponenten ξ diese Relation erfüllen, sind verlässlich, d. h. sind von denjenigen nicht verschieden, welche zufolge des gewöhnlichen Verfahrens einzeln aus der Quotientenreihe:

$$-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}'_r}, -\frac{\mathfrak{P}_{r+1}}{\mathfrak{P}'_{r+1}}, -\frac{\mathfrak{P}_{r+2}}{\mathfrak{P}'_{r+2}}, \ldots -\frac{\mathfrak{P}_{r+s-1}}{\mathfrak{P}'_{r+s-1}} \tag{112}$$

hervorgehen. Die Anzahl s dieser verlässlichen Glieder ist beim Fortschreiten der Entwickelung im raschen Wachsen begriffen. Diese Eigenthümlichkeit tritt aber, wie gesagt, erst dann auf, wenn die Anfangsglieder von $\mathfrak{P}'_r$ und $\mathfrak{P}''_r$ unverändert bleiben beim fortwährenden Wachsen der Gliederanzahl r. Dieses Unveränderbleiben der Anfangsglieder ist ein Beweis, dass die entwickelte Gliedersumme gar keiner Auflösung der derivirten Gleichungen $\frac{dP}{dx} = 0$ oder $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$ eigen sei und dass somit durch dieselbe das der Entwickelung unterworfene x vollkommen isolirt sei von allen Wurzeln dieser beiden derivirten Gleichungen. Es ist leicht einzusehen, dass man bei den meisten Gleichungen, wenn nicht schon beim Anfange der Rechnung, so doch im weiteren Verlaufe derselben zu diesem Punkte gelangen müsse, und nur dann, wenn die der Entwickelung unterworfene Wurzel gleichzeitig mit der $P = 0$ noch eine der beiden derivirten Gleichungen $\frac{dP}{dx} = 0$ und $\frac{d^2P}{dx^2} = 0$ erfüllt, dieses Constantwerden der Anfangsglieder $\mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}_r'}$ und $\mathfrak{H}_r'' a^{\mathfrak{A}_r''}$ niemals eintreten werde, weil in einem solchen Falle die entwickelten Glieder bei einer der beiden derivirten Gleichungen genau dieselbe Wirkung, wie bei der $P = 0$ ausüben. In dem Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_r'$ oder $\mathfrak{P}_r''$ wird nämlich die Reduction auf Null genau so, wie bei dem Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_r$ durch Hinzufügen neuer Folgeglieder, d. h. beim Zunehmen der Gliederanzahl r von den niedrigsten Potenzen von a aus zu den nächst höheren übergehend unaufhaltsam fortschreiten, so zwar dass der Exponent $\mathfrak{A}_r'$ oder der andere $\mathfrak{A}_r''$ ebenso wie der $\mathfrak{A}_r$ bei dem Wachsen von r sich fortwährend ändert und ins Unbegrenzte wächst. Allein in einem solchen Falle besteht ein gemeinschaftlicher Factor in P und einem der beiden derivirten Polynome $\frac{dP}{dx}$ und $\frac{d^2P}{dx^2}$. Denselben kann man auf die bekannte Weise finden. Setzt man ihn der Nulle gleich, so erhält man eine neue und einfachere Gleichung, welcher genau dasselbe x entspricht und bei der dieser Übelstand meist nicht mehr stattfindet. Ein solcher Ausnahmsfall ist demnach immer als ein günstiger zu betrachten.

Nachdem wir nun bemerkt haben, dass die hier besprochene Bedingung entweder durch hinreichend weit fortgesetzte Entwickelung von x bei der Gleichung $P = 0$ erfüllt oder vermittelst der Bestimmung des sonst in P und $\frac{dP}{dx}$ oder in P und $\frac{d^2P}{dx^2}$ enthaltenen gemein-

schaftlichen Factors eine neue Gleichung abgeleitet werden könne, welche die verlangte Isolirung verstattet; so wollen wir nun zum Beweise des früher Behaupteten schreiten.

Wir setzen voraus, eine Auflösung der Gleichung $P=0$ sei, in ihren $r+1$ ersten Gliedern aufsteigend entwickelt, durch die Gliedersumme x_r dargestellt und von allen Auflösungen der derivirten Gleichungen $\frac{dP}{dx}=0$ und $\frac{d^2P}{dx^2}=0$ isolirt, oder mit anderen Worten, die Anfangsglieder derjenigen Substitutionsresultate $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$, deren Index gleich oder grösser als r ist, seien stets dieselben; und wollen jetzt die Bedingungen entwickeln, unter welchen das $s+1^{\text{ste}}$ Entwickelungsglied des Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{r'}}$ mit dem ersten Gliede von $-\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}_{r+s'}}$ übereinstimmt oder davon differirt. Das erste Glied von $-\frac{\mathfrak{P}_{r+s}}{\mathfrak{P}_{r+s'}}$ ist nämlich hier der gewöhnlichen Regel zufolge das $(r+s+2)^{\text{ste}}$ Entwickelungsglied der Wurzel x, während das $(s+1)^{\text{ste}}$ Glied des Quotienten $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{r'}}$ gleichfalls das $(r+s+2)^{\text{ste}}$ in der Reihe wird, wenn man den Entwickelungsgliedern dieses Quotienten die $r+1$ Glieder der Gliedersumme x_r vorsetzt. Wenn wir daher die Bedingungen kennen, unter welchen eine völlige Gleichheit zwischen ihnen besteht oder das Gegentheil stattfindet, so haben wir unseren Zweck erreicht.

Bezeichnen wir mit x' die Summe der auf x_r unmittelbar folgenden s Entwickelungsglieder von x:

$$x' = h_{r+1}a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2}a^{\xi_{r+2}} + \ldots\ldots + h_{r+s}a^{\xi_{r+s}} \tag{113}$$

so hat man:

$$x_{r+s} = x_r + x' \tag{114}$$

und folglich:

$$\mathfrak{P}_{r+s} = \mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}_r'x' + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_r''x'^2 + \tfrac{1}{2.3}\mathfrak{P}_r'''x'^3 + \ldots\ldots \tag{115}$$

$$\mathfrak{P}'_{r+s} = \mathfrak{P}_r' + \mathfrak{P}_r''x' + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_r'''x'^2 + \ldots\ldots \tag{116}$$

$$\mathfrak{P}''_{r+s} = \mathfrak{P}_r'' + \mathfrak{P}_r'''x' + \ldots\ldots \tag{117}$$

Die ersten Glieder von $\mathfrak{P}_r, \mathfrak{P}_r', \mathfrak{P}_r'', \mathfrak{P}_r''', \ldots\ldots$ sind der gewöhnlichen Bezeichnungsweise zufolge:

$$\mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}_r}\ ,\ \mathfrak{H}_r' a^{\mathfrak{A}_{r'}}\ ,\ \mathfrak{H}_r'' a^{\mathfrak{A}_{r''}}\ ,\ \mathfrak{H}_r''' a^{\mathfrak{A}_{r'''}}\ ,\ \ldots\ldots$$

wobei, den früher gemachten Voraussetzungen entsprechend, $\mathfrak{H}'_r a^{\mathfrak{A}'r}$ und $\mathfrak{H}_r'' a^{\mathfrak{A}''r}$ die unveränderlichen Werthe besitzen, die auch für $r+1, r+2, \ldots\ldots$ gelten. Wir wollen sie daher durch $\mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'p}$ und $\mathfrak{H}''_q a^{\mathfrak{A}''q}$ ersetzen, weil das Constantwerden dieser Anfangsglieder möglicherweise schon bei einem früheren Entwickelungsgliede von x, denen die Indices p und q entsprechen, erfolgt sein kann. Das erste Glied von x' aber ist, wie in (113) ersichtlich: $h_{r+1}a^{\xi r+1}$. Es geht daraus hervor, dass das erste mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied von $\mathfrak{P}_{r+s}$, $\mathfrak{P}'_{r+s}$ und $\mathfrak{P}''_{r+s}$ nur aus folgenden Gliedern entstehen könne:

$$\mathfrak{P}_{r+s} = \mathfrak{H}_r a^{\mathfrak{A}r} + h_{r+1}\mathfrak{H}_p' a^{\mathfrak{A}'p+\xi r+1} + \frac{h^2r+1}{2}\mathfrak{H}_q'' a^{\mathfrak{A}_q''+2\xi r+1} + \frac{h^3r+1}{2.3}\mathfrak{H}_r''' a^{\mathfrak{A}r'''+3\xi r+1} + \ldots\ldots \tag{118}$$

$$\mathfrak{P}'_{r+s} = \mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'p} + h_{r+1}\mathfrak{H}_q'' a^{\mathfrak{A}_q''+\xi r+1} + \frac{h^2r+1}{2}\mathfrak{H}_r''' a^{\mathfrak{A}r'''+2\xi r+1} + \ldots\ldots \tag{119}$$

$$\mathfrak{P}''_{r+s} = \mathfrak{H}_q'' a^{\mathfrak{A}_q''} + h_{r+1}\mathfrak{H}_r''' a^{\mathfrak{A}r'''+\xi r+1} + \ldots\ldots \tag{120}$$

Da nun vorausgesetztermassen $\mathfrak{P}'$ und $\mathfrak{P}''$ für alle Indices, die gleich oder grösser sind als r, dieselben Anfangsglieder $\mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'p}$ und $\mathfrak{H}''_q a^{\mathfrak{A}''q}$ besitzen sollen, so gilt dies auch von $\mathfrak{P}'_{r+s}$ und $\mathfrak{P}''_{r+s}$. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $\mathfrak{A}''_q$ unter allen in den Gliedern (120) erscheinenden Exponenten den kleinsten Werth besitzt und $\mathfrak{A}'_p$ unter allen in den Gliedern (119) vorkommenden Exponenten am kleinsten ausfällt, also wenn die folgenden Relationen bestehen:

$$\mathfrak{A}_p' < \mathfrak{A}_q'' + \xi_{r+1} < \mathfrak{A}_r''' + 2\xi_{r+1} \text{ und alle übrigen.} \tag{121}$$

Beim Ausdrucke $\mathfrak{P}_{r+s}$ aber herrscht ein anderes Verhalten. Zufolge der zweckmässigen Wahl von x', namentlich in Folge der Werthe:

$$\xi_{r+1} = \mathfrak{A}_r - \mathfrak{A}_p' \tag{122}$$

$$h_{r+1} = -\frac{\mathfrak{H}_r}{\mathfrak{H}_{p'}} \tag{123}$$

tilgen sich die beiden ersten Glieder der (118), und das erste von Null verschiedene Glied wird nur durch wirkliche Substitution und Ausführung aller Reductionen bestimmt werden können. So viel ist aber gewiss, dass dasselbe entweder nur aus den zwei Bestandtheilen:

$$\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}_r' x' \tag{124}$$

oder gleichzeitig auch aus den übrigen:

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_r'' x'^2 + \tfrac{1}{1.2}\mathfrak{P}_r''' x'^3 + \ldots . \tag{125}$$

seine constituirenden Elemente zieht. Den Relationen (121) und (122) zufolge gilt aber auch die andere:

$$\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_p' + \xi_{r+1} < \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1} < \mathfrak{A}_r''' + 3\xi_{r+1} \text{ und alle übrigen,} \tag{126}$$

woraus unmittelbar ersichtlich ist, dass das erste mit der niedrigsten Potenz von a versehene Glied der Summe (125)

$$\tfrac{1}{2}\mathfrak{H}_q'' h_{r+1}^2 a^{\mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1}}$$

sei. Es folgt hieraus, dass wenn im vollkommen geordneten Substitutionsresultate $\mathfrak{P}_{r+s}$ der Exponent $\mathfrak{A}_{r+s}$ des ersten von Null verschiedenen Gliedes kleiner ist, als $\mathfrak{A}''_q + 2\xi_{r+1}$, dasselbe nur aus den beiden Bestandtheilen (124) entstanden sein könne, während für den anderen Fall:

$$\mathfrak{A}_{r+s} \geqq \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1} \tag{127}$$

auch die übrigen Bestandtheile (125) zu seiner Bildung beitragen werden. Besteht also die Relation:

$$\mathfrak{A}_{r+s} < \mathfrak{A}_q'' + 2\xi_{r+1} \tag{128}$$

so ist das Anfangsglied von $\mathfrak{P}_{r+s}$ identisch mit jenem von $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$; hat aber die entgegengesetzte (126) Statt, so differiren die Anfangsglieder von $\mathfrak{P}_{r+s}$ und $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r x'$.

Bei der aufsteigenden Entwickelung beginnt im Substitutionsresultate die Reduction auf Null bei der niedrigsten Potenz von a und geht beim Hinzufügen neuer Folgeglieder auf die nächst höheren Potenzen über. Sonach werden die Substitutionsresultate $\mathfrak{P}$, wie sie nach einem jeden einzelnen Folgegliede hervorgehen, mit stets höheren Potenzen von a beginnen, und daher die Exponenten $\mathfrak{A}$ in folgender Relation zu einander stehen:

$$\mathfrak{A}_r < \mathfrak{A}_{r+1} < \mathfrak{A}_{r+2} < \mathfrak{A}_{r+3} < \ldots < \mathfrak{A}_{r+s-1} < \mathfrak{A}_{r+s} \ldots .$$

Da nun $\mathfrak{A}'_q + 2\,\xi_{r+1}$ einen vollkommen bestimmten Zahlwerth hat, während die Exponenten $\mathfrak{A}$ mit ihrem Index fortwährend wachsen, so wird man, weil gemäss den Relationen (126)

(129) $$\mathfrak{A}_r < \mathfrak{A}''_q + 2\,\xi_{r+1}$$

ist, beim Übergange von $\mathfrak{A}_r$ zu $\mathfrak{A}_{r+1}$, $\mathfrak{A}_{r+2}$, ... endlich zu zwei Exponenten $\mathfrak{A}_{r+s-1}$ und $\mathfrak{A}_{r+s}$ gelangen, die in folgender Relation zu $\mathfrak{A}''_p + 2\,\xi_{r+1}$ stehen:

(130) $$\mathfrak{A}_{r+s-1} < \mathfrak{A}''_q + 2\,\xi_{r+1} \leqq \mathfrak{A}_{r+s}.$$

Es ist dann auch:

(131) $$\mathfrak{A}_r < \mathfrak{A}_{r+1} < \mathfrak{A}_{r+2} < \ldots < \mathfrak{A}_{r+s-1} < \mathfrak{A}''_q + 2\,\xi_{r+1} \leqq \mathfrak{A}_{r+s}.$$

Aus dieser Relation in Verbindung mit dem eben früher Bewiesenen folgt, dass die ersten Glieder von

(132) $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{P}_r$

(133) $\mathfrak{P}_{r+1}$ „ $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r \,.\, h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}}$

(134) $\mathfrak{P}_{r+2}$ „ $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r \left[h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2}\, a^{\xi_{r+2}}\right]$

(135) $\mathfrak{P}_{r+3}$ „ $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r \left[h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2}\, a^{\xi_{r+2}} + \ldots\ldots + h_{r+3}\, a^{\xi_{r+3}}\right]$

. . . . . .

(136) $\mathfrak{P}_{r+s-1}$ „ $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r \left[h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2}\, a^{\xi_{r+2}} + h_{r+s-1}\, a^{\xi_{r+s-1}}\right]$

dieselben sind, während die ersten Glieder von

(137) $\mathfrak{P}_{r+s}$ und $\mathfrak{P}_r + \mathfrak{P}'_r \left[h_{r+1}\, a^{\xi_{r+1}} + h_{r+2}\, a^{\xi_{r+2}} + \ldots\ldots + h_{r+s}\, a^{\xi_{r+s}}\right]$

differiren. Dividirt man diese Ausdrücke oder vielmehr nur ihre ersten Glieder durch das mit entgegengesetzten Zeichen genommene unveränderliche Anfangsglied von $\mathfrak{P}'$ nämlich durch $-\mathfrak{H}'_p a^{\mathfrak{A}'_p}$, so ist wieder das Ergebnise dieser Division einerlei bei den links und den rechts stehenden Ausdrücken in (132), (133), (134), (135), ... (136), different aber bei den beiden Ausdrücken (137). Die links stehenden Ausdrücke liefern aber bei dieser Division der Reihe nach die Entwickelungsglieder von x:

$$h_{r+2}\, a^{\xi_{r+2}} \;,\; h_{r+3}\, a^{\xi_{r+3}} \;,\; \ldots\ldots\; h_{r+s}\, a^{\xi_{r+s}}$$

und folglich thun dies auch die rechts stehenden Ausdrücke mit Ausnahme des letzten (137). Man überzeugt sich aber sehr leicht, dass die rechts stehenden Ausdrücke geradezu die Theilreste vorstellen, wie sie sich bei der Division von $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{r'}}$ ergeben und hiemit ist also der Beweis geführt, dass die bis inclusive zum Gliede $h_{r+s}\, a^{\xi_{r+s}}$ fortgesetzte Division von $-\frac{\mathfrak{P}_r}{\mathfrak{P}_{r'}}$ lauter verlässliche Glieder von x liefert, während schon das nächste Glied unrichtig wäre. Es ist auch durch die Relation (130) die Grenze, bis zu der die Division fortgesetzt werden darf, genau bezeichnet. Man kann dieselbe auf eine andere Gestalt bringen, indem man allerseits $\mathfrak{A}'_p$ abzieht und sich erinnert, dass $\mathfrak{A}_{r+s-1} - \mathfrak{A}'_p = \xi_{r+s}$ und $\mathfrak{A}_{r+s} - \mathfrak{A}'_p = \xi_{r+s+1}$ ist, wodurch sie sich in die:

$$\xi_{r+s} < \mathfrak{A}''_q - \mathfrak{A}'_p + 2\,\xi_{r+1} \leqq \xi_{r+s+1}$$

verwandelt, die mit der anfangs aufgeführten (111) identisch ist.

Lith.u ged i d.k.k.Hof u Staatsdruckerei,

Denkschriften der k.Akad.d.Wissensch.mathem. naturw. Cl. XII.Bd.1856.

WIEN.

AUS DER KAISERLICH-KÖNIGLICHEN HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

1856.

3 2044 093 282 390